

Е. ЯНКЕ

Ф.ЭМДЕ

Ф.ЛЁШ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

JANKE—EMDE—LÖSCH

TAFELN HÖHERER FUNKTIONEN

SECHSTE AUFLAGE

Neubearbeitet von F. LÖSCH

Е. ЯНКЕ, Ф. ЭМДЕ, Ф. ЛЕШ

В161.6
Я62

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ФОРМУЛЫ, ГРАФИКИ, ТАБЛИЦЫ

ПЕРЕВОД С 6-го ПЕРЕРАБОТАННОГО
НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Л. И. СЕДОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1964

517.2 (03)

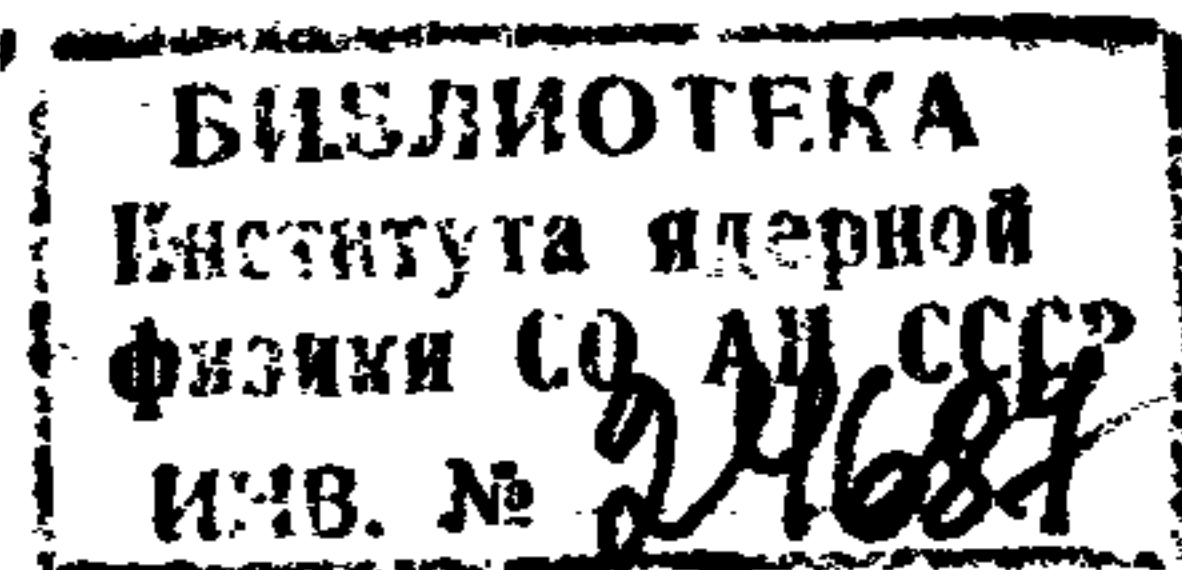
Я 62

УДК 517.6/8(083.3)

АННОТАЦИЯ

Настоящая книга является переводом существенно переработанного Ф. Лёшем издания широко известного во всем мире справочника Е. Янке и Ф. Эмде. Она является совершенно особой энциклопедией по специальным функциям: содержит их определения и множество формул, 73 таблицы и 210 оригинальных чертежей и графиков, представляющих особую ценность. Таблицы дают достаточную для многих прикладных вопросов точность и удобны в обращении, а чертежи ярко иллюстрируют качественную сторону поведения функций (как в действительной, так и в комплексной областях).

Обилие материала и тщательность его обработки делают книгу необходимым подручным пособием для специалистов в области механики, физики, техники. Она будет очень полезна студентам вычислительных специальностей и инженерно-техническим работникам, встречающимся в своей практической деятельности с многочисленными расчетами.



Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш

Специальные функции (Формулы, графики, таблицы)

М., 1964 г., 344 стр. с илл.

Редактор Н. Х. Розов.

Техн. редактор В. Н. Крючкова.

Корректор С. Н. Емельянова

Сдано в набор 28/V 1963 г. Подписано к печати 7/I 1964 г. Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 21,5. Условн. печ. л. 29,46. Уч.-изд. л. 33,46. Тираж 10 500 экз.
Цена книги 1 р. 87 к. Заказ № 669.

Издательство «Наука».

Редакция физико-математических справочников.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Гос. типография «Пяргале», г. Вильнюс, ул. Латако, 6. Заказ № 538.

СОДЕРЖАНИЕ

Перечень таблиц	8
Предисловие к русскому изданию	10
Из предисловия к 6-му немецкому изданию	11
Замечания об устройстве таблиц	13
I. Некоторые константы и вспомогательные таблицы	15
A. Часто встречающиеся постоянные	15
B. Постоянные Эйлера C, γ	15
C. Числа Бернулли B_n	15
D. Числа Эйлера E_n	16
E. Постоянная Каталана G	16
F. Вспомогательные таблицы для вычислений с комплексными числами	16
1. Обратные величины	16
2. Квадратные корни	18
3. Прямоугольные и полярные координаты	20
4. Сложение векторов	21
II. Тригонометрические функции	24
1. Некоторые специальные тригонометрические функции	24
2. Элементарные трансцендентные уравнения	24
III. Гиперболические функции	30
1. Определения	30
2. Частные значения	30
3. Основные соотношения	31
4. Представление одной функции через другие	31
5. Формулы сложения	31
6. Функции кратных аргументов	31
7. Степени	32
8. Связь с показательными функциями и логарифмами	32
9. Формулы дифференцирования и интегрирования	32
10. Представления при малых значениях аргументов	33
11. Асимптотика при больших значениях аргументов	33
12. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан)	33
13. Некоторые трансцендентные уравнения	35
IV. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного	36
1. Синус, косинус	36
2. Арксинус	39
3. Тангенс	40
4. Арктангенс	43
5. Переход от одной функции к другой	44
6. Знак действительной и мнимой части функции	45
7. Приведение к положительным острым углам	46
8. Поведение функций в комплексной плоскости	47
V. Гамма-функции	49
Определения и обозначения	49
A. Гамма-функция $\Gamma(z)$	52
1. Представления	52
2. Частные значения	54
3. Функциональные уравнения	54
4. Некоторые интегральные формулы	55

В.	Логарифмическая производная $\psi(z)$ гамма-функции	56
1.	Представления	56
2.	Частные значения	57
3.	Функциональные уравнения	57
4.	Производная $\psi'(z)$	57
С.	Неполные гамма-функции $\Gamma(a, z)$, $\gamma(a, z)$	60
VI.	Интегральная показательная функция и родственные функции	62
1.	Интегральная показательная функция и интегральный логарифм	62
2.	Интегральный синус и интегральный косинус	65
3.	Некоторые интегральные формулы	67
VII.	Интеграл ошибок и связанные с ним функции	70
1.	Интеграл ошибок	70
2.	Интегралы Френеля	82
VIII.	Дзета-функция Римана	88
1.	Определение и представления	88
2.	Частные значения	91
3.	Функциональные уравнения	91
IX.	Эллиптические интегралы	94
	Определения и обозначения	94
A.	Приведение эллиптических интегралов к нормальной форме	96
1.	Общие замечания	96
2.	Приведение к нормальной форме действительных интегралов	96
B.	Нормальная форма неполных интегралов	99
1.	Представления	99
2.	Функциональные уравнения	109
С.	Нормальная форма полных интегралов	109
1.	Представления	109
2.	Функциональные уравнения	116
X.	Эллиптические функции	120
	Определения и обозначения	120
A.	Эллиптические функции Якоби	120
1.	Амплитуда Якоби $\operatorname{am}(u, k)$	120
2.	Функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$	122
3.	Частные значения	123
4.	Функциональные уравнения	125
5.	Дзета-функция Якоби $\operatorname{zn}(u, k)$	127
B.	Эллиптические функции Вейерштрасса	127
1.	Функции Вейерштрасса $\wp u$, ζu , σu	127
2.	Представления	129
3.	Функциональные уравнения	130
4.	Соотношения между функциями Якоби и Вейерштрасса	130
С.	Тэта-функции	130
1.	Определение и представления	130
2.	Частные значения	131
3.	Функциональные уравнения	132
4.	Связь с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами. Модулярная функция	133
XI.	Ортогональные полиномы	144
A.	Полиномы Чебышева	144
B.	Полиномы Лагерра	147
С.	Полиномы Эрмита (функции параболического цилиндра)	151
XII.	Функции Лежандра (сферические функции)	158
1.	Определения и обозначения	158
2.	Функции Лежандра 1-го и 2-го рода	159
3.	Присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода	162
4.	Интегральные представления	163
5.	Частные значения. Асимптотика	164
6.	Функциональные уравнения. Нормированные функции Лежандра	164

XIII. Функции Бесселя (цилиндрические функции)	178
A. Функции Бесселя 1-го, 2-го и 3-го рода	178
1. Определения и обозначения	178
2. Представления с помощью рядов	181
3. Интегральные представления	221
4. Асимптотика	222
5. Нули	229
6. Функциональные уравнения	243
7. Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешимые в функциях Бесселя	245
B. Модифицированные функции Бесселя	247
1. Определения и обозначения	247
2. Функции $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$	247
3. Функции Кельвина	264
C. Функции, связанные с функциями Бесселя	287
1. Функции Ангера и Вебера	287
2. Функции Струве	288
XIV. Функции Матье (функции эллиптического цилиндра)	298
1. Определения и обозначения	298
2. Представления для собственных значений	305
3. Разложение в ряды Фурье	305
4. Нули	306
5. Функциональные уравнения. Присоединенные функции Матье	306
XV. Конфлюэнтные гипергеометрические функции	308
1. Функция $\Phi(a, c; z)$	308
2. Функция $\Psi(a, c; z)$	315
3. Функции $M_{\chi, \mu}(z)$, $W_{\chi, \mu}(z)$	316
4. Частные случаи	317
XVI. Некоторые специальные функции физики	318
A. Функция излучения Планка	318
B. Функция Ланжевена	320
C. Функции Планка—Эйнштейна и Дебая	320
1. Функции Планка—Эйнштейна	320
2. Функции Дебая	323
D. Функции распространения тепла от источников	326
Библиография	329
Предметный указатель	343

ПЕРЕЧЕНЬ ТАБЛИЦ

I.	Некоторые константы и вспомогательные таблицы	15
	1. Обратные величины для комплексных чисел	17
	2. Квадратные корни из комплексных чисел	18
	3. Тригонометрическая форма комплексных чисел	20
	4. Сложение векторов	22
II.	Тригонометрические функции	24
	5. Функции $x \operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ и $\frac{\sin x}{x}$	26
	6. Функции $x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ и $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$	29
	7. Экстремумы функции $\sin x/x$	29
III.	Гиперболические функции	30
	8. Показательные и гиперболические функции	34
	9. Некоторые вспомогательные величины	35
IV.	Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного	36
	10. Функция $\sin(x+iy) = se^{i\sigma}$	39
	11. Функция $\operatorname{tg}(x+iy) = te^{i\tau}$	42
V.	Гамма-функции	49
	12. Гамма-функция $\Gamma(x) = (x-1)!$	58
	13. Функции $\psi(x)$ и $\psi'(x)$	58
	14. Величины, обратные к гамма-функции: $\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \frac{1}{x!}$ и $\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{1}{(-x)!}$	59
VI.	Интегральная показательная функция и родственные функции	62
	15. Интегральные показательные функции $Ei^*(x)$ и $-Ei(-x)$	64
	16. Интегральный синус $Si(x)$ и интегральный косинус $Ci(x)$	68
	17. Экстремумы функций $ci(x)$ и $si(x)$	69
VII.	Интеграл ошибок и связанные с ним функции	70
	18. Интеграл ошибок $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$	73
	19. Производные интеграла ошибок $\Phi(x)$	74
	20. Функции $e^{x^2} [1 - \Phi(x)]$ и e^{-x^2}	80
	21. Функция $y = \int_0^x e^{t^2} dt$	80
	22. Интеграл ошибок $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и его производная $\varphi(x)$	81
	23. Интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$	84
	24. Интегралы Френеля $C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ и $S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	85
VIII.	Дзета-функция Римана	88
	25. Нули $0,5 + ia_n$ дзета-функции Римана $\zeta(x)$	91
	26. Дзета-функция Римана $\zeta(x)$	92

IX. Эллиптические интегралы	94
27. Неполный эллиптический интеграл 1-го рода $F(\varphi, k)$	103
28. Неполный эллиптический интеграл 2-го рода $E(\varphi, k)$	106
29. Полные эллиптические интегралы $K(\sin \alpha)$ и $E(\sin \alpha)$	117
30. Полные эллиптические интегралы $K(k)$ и $E(k)$	118
31. Полные эллиптические интегралы $B(k)$, $C(k)$ и $D(k)$	118
32. Вспомогательные функции $h(k)$, $c(k)$ и $d(k)$	119
X. Эллиптические функции	120
33. Тэта-функции и их производные	138
34. Вспомогательная таблица для тэта-функций	139
35. Функция $\ln q$	140
XI. Ортогональные полиномы	144
36. Функции Лагерра $l_n(x)$	149
37. Функции параболического цилиндра $\varphi_n(x)$	155
XII. Функции Лежандра	158
38. Полиномы Лежандра $P_n(x)$	169
39. Полиномы Лежандра $P_n(\cos \vartheta)$	171
40. Производные полиномов Лежандра $\frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos \vartheta)$	173
41. Функции Лежандра 2-го рода $Q_n(x)$	175
XIII. Функции Бесселя	178
42. Функции $\Lambda_n(x) = n!(x/2)^{-n} J_n(x)$	193
43. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$	203
44. Функции Бесселя $J_{n/2}(x)$	208
45. Функции Бесселя $J_{n/3}(x)$ и $J_{n/4}(x)$	210
46. Функции Бесселя $J_\nu(n)$	211
47. Функции Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$	216
48. Нули $j_{0,s}$ функции $J_0(x)$ и соответствующие значения функции $J_1(x)$	232
49. Нули $j_{1,s}$ функции $J_1(x)$ и экстремумы функции $J_0(x)$	232
50. Нули $j_{n,s}$ функций $J_n(x)$	232
51. Два первых нуля $j_{\nu,1}$ и $j_{\nu,2}$ функций $J_\nu(x)$	233
52. Первые шесть корней $x_{\nu,s}$ уравнения $J_\nu(x) N_\nu(kx) - J_\nu(kx) N_\nu(x) = 0$	242
53. Модифицированные функции Бесселя $I_0(x)$ и $I_1(x)$	251
54. Модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$	255
55. Модифицированные функции Бесселя $\frac{2}{\pi} K_0(x)$ и $\frac{2}{\pi} K_1(x)$	256
56. Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ и $\frac{2}{\pi} K_\nu(x)$ для $\nu = 1/3, 2/3$	262
57. Первые корни $x_{n,s}$ уравнения $I_n(x) J'_n(x) - J_n(x) I'_n(x) = 0$	263
58. Функции $\text{ber}(x)$, $\text{bei}(x)$	274
59. Функции $\text{ber}'(x)$, $\text{bei}'(x)$	276
60. Функции $\text{her}(x)$, $\text{hei}(x)$	278
61. Функции $\text{her}'(x)$, $\text{hei}'(x)$	280
62. Функции $\text{ber}(x)$, $\text{bei}(x)$, $\text{ber}'(x)$, $\text{bei}'(x)$, $\text{her}(x)$, $\text{hei}(x)$, $\text{her}'(x)$, $\text{hei}'(x)$ (продолжение)	282
63. Функции $J_n(r\sqrt{i}) = b_n e^{i\beta_n}$ и $H_n^{(1)}(r\sqrt{i}) = h_n e^{i\eta_n}$ ($n=0, 1$)	283
64. Функции $J_0(r\sqrt{i})/J_1(r\sqrt{i})$ и $H_0^{(1)}(r\sqrt{i})/H_1^{(1)}(r\sqrt{i})$	285
65. Функции Вебера $E_0(x)$, $E_1(x)$ и функции Струве $H_0(x)$, $H_1(x)$	289
66 и 67. Неполные функции Ангера и Вебера	297
XVI. Некоторые специальные функции физики	318
68. Функция излучения Планка	319
69. Функция Ланжевена	321
70. Функции Планка—Эйнштейна C_ν и $(U-U_0)/T$	322
71. Функции Планка—Эйнштейна $-(F-F_0)/T$ и S	323
72. Функции Дебая C_ν и $(U-U_0)/T$	324
73. Функции Дебая $-(F-F_0)/T$ и S	325

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Написанный много лет назад, справочник Е. Янке и Ф. Эмде получил широкое распространение как в Советском Союзе, так и за границей. Он являлся и является сейчас ценным пособием при решении различных инженерных и прикладных задач, требующих применения аппарата специальных функций. Эта книга будет полезна не только при различного рода численных расчетах, но и при изучении разнообразных задач механики, физики, техники, а также для знакомства со специальными функциями или для быстрого наведения какой-нибудь справки.

В 1960 году появилось новое немецкое издание этого справочника, значительно усовершенствованное, переработанное и расширенное Ф. Лёшем. Внесенные им изменения настолько существенны, что, по существу, можно говорить о появлении новой книги. Нет необходимости останавливаться здесь на этих изменениях — они подробно перечислены в предисловии самого Ф. Лёша к немецкому изданию.

Предлагаемая русскому читателю книга представляет собой заново выполненный перевод с немецкого издания 1960 года. Перевод этот был сделан Г. В. Толстой; значительное участие в обработке рукописи и ее подготовке к печати принял редактор издательства Н. Х. Розов.

Необходимо указать следующие изменения, внесенные в русское издание по сравнению с немецким оригиналом.

В последних зарубежных изданиях был целиком опущен первый раздел справочника Янке и Эмде, посвященный элементарным функциям. Однако он содержал важные и далеко не «элементарные» сведения о гиперболических функциях, о тригонометрических функциях комплексного аргумента и т. п., а также полезные таблицы. Поэтому издательство сочло целесообразным восстановить подавляющее большинство материала этого раздела, используя третье русское издание (опущены только главы, посвященные степеням и кубическим уравнениям, стоящие в стороне от основной темы книги). Деление книги на два раздела — элементарные и специальные функции — признано излишним.

В нескольких местах материал немецкого издания был перепланирован по-иному для удобства пользования книгой (так, таблица коэффициентов для квадратичной интерполяции, находившаяся в конце книги, перенесена в предисловие о пользовании таблицами и т. п.) или пополнен из третьего русского издания.

Подстрочные примечания, а также добавления в тексте, взятые в квадратные скобки, включены в книгу Н. Х. Розовым.

В подготовке библиографии для настоящего издания большое участие приняла Н. С. Мельникова.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К 6-му НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание заново тщательно переработано. Вследствие широкого распространения и исключительного одобрения, которые эта книга нашла повсюду, переработка была произведена с чувством глубокой ответственности. Я старался не изменять характера книги, но, с другой стороны, стремился расширить ее и облегчить, насколько возможно, пользование ею.

С этой целью я часто располагал материал по-новому. Объяснению функций и обозначений отведено гораздо больше места, чем это было раньше. При выборе обозначений, которые в области специальных функций все еще не являются едиными, я отдавал предпочтение тем, которые в настоящее время наиболее употребительны в литературе *).

Все таблицы тщательно пересмотрены с целью обеспечить их надежность. В помощь вычислителю большая часть таблиц снабжена разностями, которые позволяют удобным образом производить линейную или квадратичную интерполяцию.

Обновленная библиография находится в конце книги. Так как число учебников и собраний формул и таблиц специальных функций значительно увеличилось за последние десятилетия, то при их перечислении пришлось ограничиться только наиболее значительными работами **).

Выбор материала в прежних изданиях оказался настолько хорошим, что его можно было бы сохранить целиком. Однако значение, которое новые классы специальных функций приобретают в приложениях, было принято во внимание, и поэтому сделаны многочисленные расширения и добавления. Это касается почти всех разделов книги; ниже перечислены только наиболее существенные изменения.

1. Для интеграла ошибок и его производной, чаще всего применяемых в теории вероятности и в статистике, добавлены новые таблицы.

2. Расширены таблицы интегралов Френеля.

3. В разделе об эллиптических функциях приведена таблица для $\ln q$, в которой использованы десятые доли градуса. К таблице тэта-функций, по предложению Ф. Трикоми***), добавлена вспомогательная таблица, которая позволяет удобно получать значения функций вплоть до окрестности $\alpha = 90^\circ$.

4. Изложения полиномов Лагерра и Эрмита, которые были разбросаны в различных местах, собраны в расширенном виде в разделе об ортогональных полиномах и дополнены изложением полиномов Чебышева.

*) В настоящем русском издании все обозначения величин и функций приведены по возможности в соответствие с обозначениями, установившимися в отечественной литературе. Для биномиальных коэффициентов сохранено обозначение $\binom{n}{m}$ вместо распространенной у нас записи C_n^m . — Прим. ред.

**) В настоящем русском издании в список литературы добавлены многочисленные отечественные книги, справочники и таблицы, более доступные советскому читателю. — Прим. ред.

***) Имеется в виду книга F. G. Tricomi, *Funzioni Ellittiche*, Bologna, 1951. — Прим. ред.

5. Раздел о функциях Бесселя подвергся самым многочисленным изменениям: специальный раздел посвящен модифицированным функциям Бесселя; заново вычислена таблица корней уравнения $J_\nu(x) N_\nu(kx) - J_\nu(kx) N_\nu(x) = 0$; таблица функций Струве, которая была выброшена в двух предыдущих изданиях, вновь включена согласно многочисленным пожеланиям.

6. Раздел о конфлюэнтных гипергеометрических функциях написан заново на основании известных работ Ф. Трикоми *).

7. Раздел о некоторых специальных функциях физики содержит функцию излучения Планка, функцию Ланжевена и функции распространения тепла от источников, а также вновь вычисленные таблицы функций Планка—Эйнштейна и Дебая, имеющие существенное значение в физической химии.

Желание не увеличивать объем книги заставило меня компенсировать принятые расширения сокращениями в других местах. Так, были выброшены таблицы функций последействия и индуктивности катушек, которые могут быть взяты из соответствующей технической литературы.

Фридрих Лёш

*) Имеется в виду книга F. G. Tricomi, *Funzioni ipergeometriche confluenti*, Roma, 1954. См. также работу F. G. Tricomi, *Mem. Sciences Math.*, № 140, Paris, 1959. — Прим. ред.

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УСТРОЙСТВЕ ТАБЛИЦ

Значения функций, содержащиеся в последующих таблицах, получены из более точных значений округлением их обычным образом, а именно: последний десятичный знак увеличен на 1, если величина последующих цифр превосходит $1/2$ единицы последнего десятичного знака. Эти табличные значения, следовательно, вообще имеют ошибку самое большее в $1/2$ единицы последнего десятичного знака. Только в немногих таблицах возможна ошибка в единицу последнего десятичного знака.

Если для всех табличных значений какого-нибудь столбца (или строки) одна или несколько начальных цифр совпадают, то эти цифры отделены и поставлены жирным шрифтом сверху и снизу этого столбца (или в начале строки). Таким же образом мы поступили, когда отброшенные начальные цифры в рассматриваемом столбце отличаются только на единицу в последнем десятичном знаке. Тогда те табличные значения, для которых происходит изменение, отмечены звездочкой (*).

[В некоторых таблицах употребляются также следующие обозначения: число $(-n)$, прибавленное в скобках после табличного значения, указывает, что это значение должно быть умножено на множитель 10^{-n} . Например, из таблицы 37 получаем: $\Phi_3(1,20) = -0,030\ 396$, а $\Phi_3(1,39) = +0,092\ 024$.]

Табличный шаг везде равен 1, 2 или 5 единицам последнего десятичного знака табличного аргумента. В большинстве случаев нужные значения функций нельзя взять непосредственно из таблицы; тогда их надо получить интерполяцией. Почти все таблицы приспособлены для линейной или квадратичной интерполяции, причем предполагается, что при интерполяции допустима наибольшая ошибка в 2 единицы последнего десятичного знака. Разности 1-го и 2-го порядков, необходимые для интерполяции, присоединены к таблицам; их всегда надо понимать в единицах последнего десятичного знака. В некоторых случаях разности 1-го порядка снабжены предупреждающим знаком (!); он означает, что ошибка при линейной интерполяции, возможно, превосходит 2 единицы, но ни в коем случае не 5 единиц последнего десятичного знака, а для большей степени точности надо применить квадратичную интерполяцию.

Линейная интерполяция. Разности 1-го порядка, служащие для линейной интерполяции, обозначены обычным шрифтом и стоят *между строками таблицы*. Для удобства вычислителя они всегда приведены для табличного шага, равного 1 (в единицах последнего десятичного знака табличного аргумента). Для значения аргумента x , лежащего в табличном интервале $\langle x_0, x_1 \rangle$, значение функции $y = f(x)$, следовательно, получается прибавлением к табличному значению $y_0 = f(x_0)$ произведения разности аргументов $x - x_0$ (в единицах последнего знака табличного аргумента) на табличную разность, соответствующую $\langle x_0, x_1 \rangle$.

Примеры. 1). Из таблицы 38 надо получить $P_3(0,6635)$. Находим: $x_0 = 0,66$, $f(x_0) = -0,2713$, табличная разность равна 182, $x - x_0 = 0,35$; отсюда

$$P_3(0,6635) = f(x) = -0,2713 + 0,35 \cdot 185 \cdot 10^{-4} = -0,2649.$$

Точное значение равно $-0,2650$.

2). Из таблицы 69 надо получить $L(3,126)$. Находим: $x_0 = 3,10$, $f(x_0) = 0,6815$, табличная разность равна 9,4, $x - x_0 = 2,6$; отсюда

$$L(3,126) = f(x) = 0,6815 + 2,6 \cdot 9,4 \cdot 10^{-4} = 0,6839.$$

Точное значение равно 0,6840.

Квадратичная интерполяция. Разности 2-го порядка, служащие для квадратичной интерполяции, напечатаны *курсивом* и стоят *в табличных строках*. Обозначив

табличные аргументы	табличные значения	разности 2-го порядка
x_0	$y_0 = f(x_0)$	$\delta^2 y_0$
x_1	$y_1 = f(x_1)$	$\delta^2 y_1$

вычисляют значение функции $y=f(x)$ для значения аргумента x , лежащего в табличном интервале $\langle x_0, x_1 \rangle$, по формуле Эверетта — Лапласа:

$$y = (1-t)y_0 E_0^2 \delta^2 y_0 + t y_1 + E_1^2 \delta^2 y_1,$$

где $t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, а значения коэффициентов E_0^2, E_1^2 должны быть взяты из следующей

таблицы.

таблицы.

i	E_0^2	E_1^2		i	E_0^2	E_1^2	
0,00	0,0000 33	0,0000 17	1,00	0,25	- 0,0547 11	- 0,0391 13	0,75
01	- 0,0033 32	- 0,0017 16	0,99	26	0558 10	0404 13	74
02	0065 31	0033 17	98	27	0568 10	0417 13	73
03	0096 29	0050 17	97	28	0578 9	0430 13	72
04	0125 29	0067 16	96	29	0587 8	0443 12	71
0,05	- 0,0154 28	- 0,0083 17	0,95	0,30	- 0,0595 7	- 0,0455 12	0,70
06	0182 27	0100 16	94	31	0602 7	0467 12	69
07	0209 27	0116 16	93	32	0609 6	0479 11	68
08	0236 25	0132 17	92	33	0615 6	0490 11	67
09	0261 24	0149 16	91	34	0621 5	0501 11	66
0,10	- 0,0285 23	- 0,0165 16	0,90	0,35	- 0,0626 4	- 0,0512 10	0,65
11	0308 23	0181 16	89	36	0630 3	0522 10	64
12	0331 21	0197 16	88	37	0633 3	0532 10	63
13	0352 21	0213 16	87	38	0636 2	0542 9	62
14	0373 20	0229 15	86	39	0638 2	0551 9	61
0,15	- 0,0393 19	- 0,0244 16	0,85	0,40	- 0,0640 1	- 0,0560 8	0,60
16	0412 18	0260 15	84	41	0641 0	0568 9	59
17	0430 18	0275 15	83	42	0641 0	0577 7	58
18	0448 16	0290 15	82	43	0641 0	0584 7	57
19	0464 16	0305 15	81	44	0641 1	0591 7	56
0,20	- 0,0480 15	- 0,0320 15	0,80	0,45	- 0,0639 1	- 0,0598 6	0,55
21	0495 14	0335 14	79	46	0638 3	0604 6	54
22	0509 13	0349 14	78	47	0635 3	0610 6	53
23	0522 13	0363 14	77	48	0632 3	0616 5	52
24	0535 12	0377 14	76	49	0629 4	0621 4	51
0,25	- 0,0547	- 0,0391	0,75	0,50	- 0,0625	- 0,0625	0,50
	E_1^2	E_0^2	i		E_1^2	E_0^2	i

Можно получить улучшение формулы Эверетта—Лапласа, если заменить в ней разности 2-го порядка $\delta^2 y$ на видоизмененные разности 2-го порядка

$$\hat{\delta}^2 y = \delta^2 y - 0,184 \delta^4 y.$$

[Формула Эверетта—Лапласа примет тогда вид

$$y = (1-t)y_0 + E_0^2 \hat{\delta}^2 y_0 + t y_1 + E_1^2 \hat{\delta}^2 y_1;$$

остальные обозначения имеют тот же смысл, что и выше.] В тех случаях, когда это оказывается существенным для получения требуемой точности, в таблицах вместо разностей 2-го порядка даются прямо видоизмененные разности 2-го порядка.

Примеры. 1). Из таблицы 16 надо получить $Si(12,2)$. Находим:

$$x_0 = 12,0, \quad y_0 = 1,5050, \quad \hat{\delta}^2 y_0 = 190, \quad x_1 = 12,5, \quad y_1 = 1,4923, \quad \hat{\delta}^2 y_1 = 205.$$

Так как $t = 0,4$, то, согласно приведенной выше таблице, $E_0^2 = -0,064$, $E_1^2 = -0,056$. Поэтому

$$y = Si(12,2) = 0,6 \cdot 1,5050 - 0,064 \cdot 190 \cdot 10^{-4} + 0,4 \cdot 1,4923 - 0,056 \cdot 205 \cdot 10^{-4} = 1,4976.$$

Точное значение равно 1,4975.

2). Из таблицы 40 надо получить $Q_1(0,8835)$. Находим:

$$x_0 = 0,88, \quad y_0 = 0,21068, \quad \hat{\delta}^2 y_0 = 391, \quad x_1 = 0,89, \quad y_1 = 0,26551, \quad \hat{\delta}^2 y_1 = 460.$$

Так как $t = 0,35$, то $E_0^2 = -0,0626$, $E_1^2 = -0,0512$. Поэтому

$$y = Q_1(0,8835) = 0,65 \cdot 0,21068 - 0,0626 \cdot 391 \cdot 10^{-5} + 0,35 \cdot 0,26551 - 0,0512 \cdot 460 \cdot 10^{-5} = 0,22939.$$

Точное значение равно 0,22939.

І. НЕКОТОРЫЕ КОНСТАНТЫ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ

А. ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПОСТОЯННЫЕ

$\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562 = 1:0,707\ 106\ 781$	$\frac{\pi}{2} = 1,570\ 796\ 327 = 1:0,636\ 619\ 772$
$\sqrt{3} = 1,732\ 050\ 808 = 1:0,577\ 350\ 269$	$\pi^2 = 9,869\ 604\ 401 = 1:0,101\ 321\ 184$
$\sqrt{10} = 3,162\ 277\ 660 = 1:0,316\ 227\ 766$	$\pi^3 = 31,006\ 276\ 680 = 1:0,032\ 251\ 534$
$\sqrt[3]{2} = 1,259\ 921\ 050 = 1:0,793\ 700\ 526$	$\pi\sqrt{2} = 4,442\ 882\ 938 = 1:0,225\ 079\ 079$
$\sqrt[3]{10} = 2,154\ 434\ 690 = 1:0,464\ 158\ 883$	$\sqrt{\pi} = 1,772\ 453\ 851 = 1:0,564\ 189\ 584$
$e = 2,718\ 281\ 828 = 1:0,367\ 879\ 441$	$\sqrt{2\pi} = 2,506\ 628\ 275 = 1:0,398\ 942\ 280$
$e^2 = 7,389\ 056\ 099 = 1:0,135\ 335\ 283$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,253\ 314\ 137 = 1:0,797\ 884\ 561$
$\sqrt{e} = 1,648\ 721\ 271 = 1:0,606\ 530\ 660$	$\sqrt[3]{\pi} = 1,464\ 591\ 888 = 1:0,682\ 784\ 063$
$\ln 10 = 2,302\ 585\ 093 = 1:0,434\ 294\ 482$	$e^\pi = 23,140\ 692\ 633 = 1:0,043\ 213\ 918$
$\lg e = 0,434\ 294\ 482$	$e^{\pi/2} = 4,810\ 477\ 381 = 1:0,207\ 879\ 576$
$\ln 2 = 0,693\ 147\ 181$	$\lg \pi = 0,497\ 149\ 873$
$\ln 3 = 1,098\ 612\ 289$	$\ln \pi = 1,144\ 729\ 886$
$\pi = 3,141\ 592\ 654 = 1:0,318\ 309\ 886$	

В. ПОСТОЯННЫЕ ЭЙЛЕРА C , γ

Постоянная Эйлера (или Эйлера—Маскерони) C [определяется как предел

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right];$$

так же называют постоянную γ , связанную с C соотношениями]

$$\begin{aligned} C &= \ln \gamma, & \gamma &= e^C, \\ C &= 0,577\ 215\ 665, & \gamma &= 1,781\ 072\ 418. \end{aligned}$$

С. ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ B_n

Числами Бернулли B_n называются коэффициенты в разложении

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

Именно, справедливы равенства

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2k+1} = 0, \quad B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots);$$

в частности,

$$\begin{array}{ll} B_2 = 1:6 = 0,166\,666\,667 & B_{12} = -691:2730 = -0,253\,113\,553 \\ B_4 = -1:30 = -0,033\,333\,333 & B_{14} = 7:6 = 1,166\,666\,667 \\ B_6 = 1:42 = 0,023\,809\,524 & B_{16} = -3617:510 = -7,092\,156\,863 \\ B_8 = -1:30 = -0,033\,333\,333 & B_{18} = 43\,867:798 = 54,971\,177\,945 \\ B_{10} = 5:66 = 0,075\,757\,576 & B_{20} = -174\,611:330 = -529,124\,242\,424 \end{array}$$

Иногда $(-1)^{n+1}B_{2n}$ называется n -м числом Бернулли и обозначается через B_n .

Д. ЧИСЛА ЭЙЛЕРА E_n

[Числами Эйлера E_n называются коэффициенты в разложении

$$\frac{2}{e^z + e^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Именно, справедливы равенства

$$E_0 = 1, \quad E_{2k+1} = 0, \quad E_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{4^{k+1} \cdot (2k)!}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots);$$

в частности,

$$\begin{array}{ll} E_2 = -1 & E_{12} = 2\,702\,765 \\ E_4 = 5 & E_{14} = -199\,360\,981 \\ E_6 = -61 & E_{16} = 19\,391\,512\,145 \\ E_8 = 1385 & E_{18} = -2\,404\,879\,675\,441 \\ E_{10} = -50\,251 & E_{20} = 370\,371\,188\,237\,525 \end{array}$$

Е. ПОСТОЯННАЯ КАТАЛАНА G

Постоянной Каталана G называется величина

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, \quad G = 0,915\,965\,594.]$$

Г. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Все следующие формулы остаются верными, если в обеих частях равенств заменить i на $-i$.

1. Обратные величины

Таблица 1 позволяет находить величины (рис. 1)

$$\frac{1}{1+ix} = u - iv = \frac{1-ix}{1+x^2}, \quad \frac{1}{x+i} = v - iu.$$

В общем случае

$$\begin{array}{ll} 0 < b < a: & x = \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{\pm a + ib} = \pm \frac{u}{a} - i \frac{v}{a}; \\ 0 < a < b: & x = \frac{a}{b}, \quad \frac{1}{\pm a + ib} = \pm \frac{v}{b} - i \frac{u}{b}. \end{array}$$

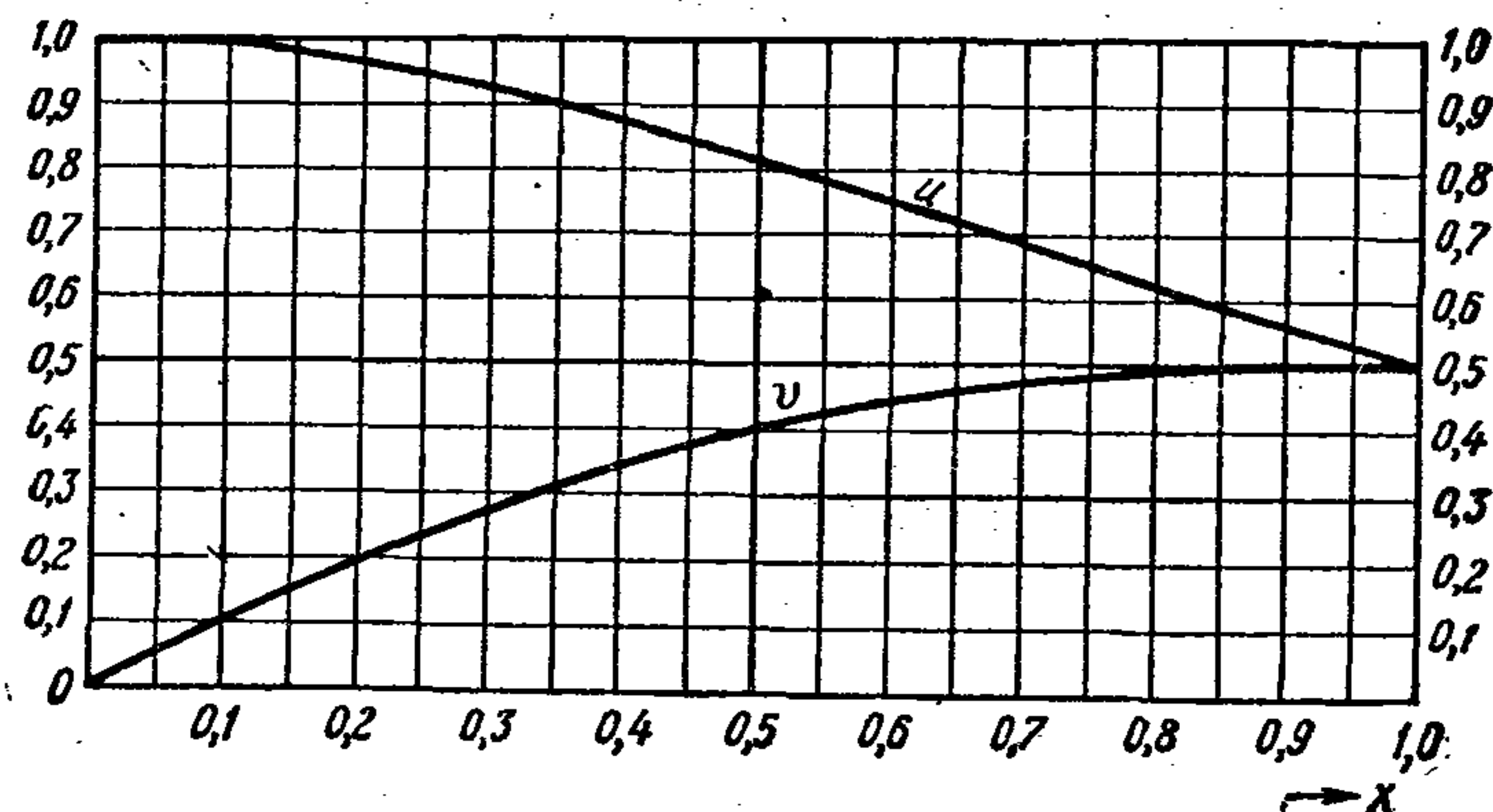


Рис. 1. $\frac{1}{1+ix} = u - iv$, $\frac{1}{x+i} = v - iu$.

Таблица 1. Обратные величины для комплексных чисел

$1:(1+ix) = u - iv$

$1:(x+i) = v - iu$

x	u	v	x	u	v	x	u	v
0	1	0	0,35	0,8909	0,3118	0,70	0,6711	0,4698
0,01	0,9999	0,01999	0,36	0,8853	0,3187	0,71	0,6648	0,4720
0,02	0,9996	0,01999	0,37	0,8796	0,3254	0,72	0,6586	0,4742
0,03	0,9991	0,02997	0,38	0,8738	0,3321	0,73	0,6524	0,4762
0,04	0,9984	0,03994	0,39	0,8680	0,3385	0,74	0,6462	0,4782
0,05	0,9975	0,04988	0,40	0,8621	0,3448	0,75	0,6400	0,4800
0,06	0,9964	0,05978	0,41	0,8561	0,3510	0,76	0,6339	0,4817
0,07	0,9951	0,06966	0,42	0,8501	0,3570	0,77	0,6278	0,4834
0,08	0,9936	0,07949	0,43	0,8440	0,3629	0,78	0,6217	0,4850
0,09	0,9920	0,08928	0,44	0,8378	0,3686	0,79	0,6157	0,4864
0,10	0,9901	0,09901	0,45	0,8316	0,3742	0,80	0,6098	0,4878
0,11	0,9880	0,10868	0,46	0,8254	0,3797	0,81	0,6038	0,4891
0,12	0,9858	0,11830	0,47	0,8191	0,3850	0,82	0,5979	0,4903
0,13	0,9834	0,12784	0,48	0,8127	0,3901	0,83	0,5921	0,4914
0,14	0,9808	0,13731	0,49	0,8064	0,3951	0,84	0,5863	0,4925
0,15	0,9780	0,14670	0,50	0,8000	0,4000	0,85	0,5806	0,4935
0,16	0,9750	0,15601	0,51	0,7936	0,4047	0,86	0,5748	0,4944
0,17	0,9719	0,16523	0,52	0,7872	0,4093	0,87	0,5692	0,4952
0,18	0,9686	0,17435	0,53	0,7807	0,4138	0,88	0,5636	0,4959
0,19	0,9652	0,1834	0,54	0,7742	0,4181	0,89	0,5580	0,4966
0,20	0,9615	0,1923	0,55	0,7678	0,4223	0,90	0,5525	0,4972
0,21	0,9578	0,2011	0,56	0,7613	0,4263	0,91	0,5470	0,4978
0,22	0,9538	0,2098	0,57	0,7548	0,4302	0,92	0,5416	0,4983
0,23	0,9498	0,2184	0,58	0,7483	0,4340	0,93	0,5362	0,4987
0,24	0,9455	0,2269	0,59	0,7418	0,4377	0,94	0,5309	0,4990
0,25	0,9412	0,2353	0,60	0,7353	0,4412	0,95	0,5256	0,4993
0,26	0,9367	0,2435	0,61	0,7288	0,4446	0,96	0,5204	0,4996
0,27	0,9321	0,2517	0,62	0,7223	0,4478	0,97	0,5152	0,4998
0,28	0,9273	0,2596	0,63	0,7159	0,4510	0,98	0,5101	0,4999
0,29	0,9224	0,2675	0,64	0,7094	0,4540	0,99	0,5050	0,5000
0,30	0,9174	0,2752	0,65	0,7030	0,4569	1,00	0,5000	0,5000
0,31	0,9123	0,2828	0,66	0,6966	0,4597			
0,32	0,9071	0,2903	0,67	0,6902	0,4624			
0,33	0,9018	0,2976	0,68	0,6838	0,4650			
0,34	0,8964	0,3048	0,69	0,6775	0,4674			

2. Квадратные корни

Таблица 2 позволяет находить величины (рис. 2)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1+ix} &= \pm (u+iv), & \frac{u^2}{v^2} \end{aligned} \right\} &= \frac{\sqrt{1+x^2} \pm 1}{2}, \\ \sqrt{x+i} &= \pm (U+iV), & \frac{U^2}{V^2} \end{aligned} \right\} &= \frac{\sqrt{1+x^2} \pm x}{2}.$$

Положив $x = \operatorname{sh} 2t$, получим также

$$u = \operatorname{ch} t, \quad v = \operatorname{sh} t, \quad U = \sqrt{0,5} e^t, \quad V = \sqrt{0,5} e^{-t}.$$

В общем случае

$$\begin{aligned} 0 < b < a: \quad x &= \frac{b}{a}, \quad \sqrt{a+ib} = \pm (u\sqrt{a} + iv\sqrt{a}), \\ & \sqrt{-a+ib} = \pm (v\sqrt{a} + iu\sqrt{a}); \\ 0 < a < b: \quad x &= \frac{a}{b}, \quad \sqrt{a+ib} = \pm (U\sqrt{b} + iV\sqrt{b}), \\ & \sqrt{-a+ib} = \pm (V\sqrt{b} + iU\sqrt{b}). \end{aligned}$$

Таблица 2. Квадратные корни из комплексных чисел

$\sqrt{1+ix}=u+iv$							$\sqrt{-1+ix}=v+iu$				
x	0	1	2	3	4		5	6	7	8	9
0,0	1,00 00	00	00	01	02		03	04	06	08	10
	0,0 000	050	100	150	200		250	300	350	400	450
0,1	1,00 12	15	18	21	24		28	32	36	40	45
	0,0 499	549	599	649	698		748	798	847	896	946
0,2	1,00 49	54	60	65	71		77	83	89	96	*02
	0,0 995	*044	*093	*142	*192		*240	*289	*338	*387	*435
0,3	1,01 09	17	24	32	40		48	56	64	73	82
	0,1 484	532	580	629	677		724	772	820	868	915
0,4	1,0 191	200	209	219	229		239	249	259	269	280
	0,1 963	010	*057	*104	*151		*198	*244	*291	*337	*383
0,5	1,0 291	302	313	324	336		347	359	371	383	395
	0,2 429	475	521	567	612		658	703	748	793	838
0,6	1,0 407	420	432	445	458		471	484	497	510	524
	0,2 883	927	972	*016	*060		*104	*148	*192	*235	*278
0,7	1,0 537	551	565	579	593		607	621	635	649	664
	0,3 322	365	408	450	493		536	578	620	662	704
0,8	1,0 678	693	708	723	738		753	768	783	798	814
	0,3 746	787	829	870	911		952	993	*034	*075	*115
0,9	1,0 829	844	860	876	891		907	923	939	955	971
	0,4 156	196	236	276	315		355	394	434	473	512

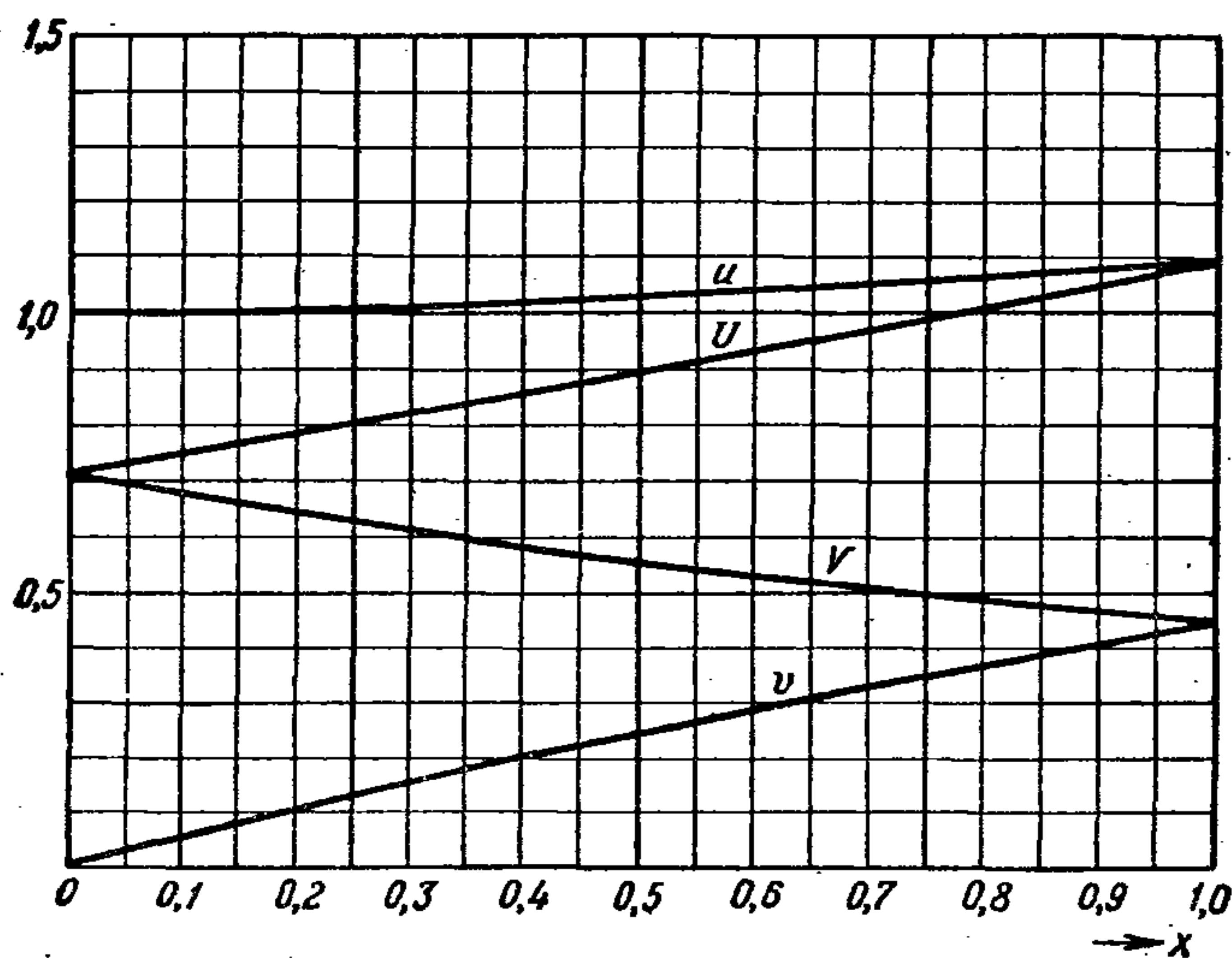


Рис. 2. $\sqrt{1+ix} = \pm(u+iv)$, $\sqrt{x+i} = \pm(U+iV)$.

Продолжение табл. 2

$\sqrt{x+i} = U + iV$

$\sqrt{-x+i} = V + iU$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,7	071	107	142	178	214	250	286	323	359	396
	0,7	071	036	001	*966	*931	*897	*862	*828	*794	*760
0,1	0,7	433	470	507	545	582	620	657	695	733	771
	0,6	727	693	660	627	595	562	530	497	466	434
0,2	0,7	810	848	886	925	964	*002	*041	*080	*119	*158
	0,6	402	371	340	309	279	248	218	188	158	129
0,3	0,8	198	237	276	316	355	395	435	474	514	554
	0,6	099	070	041	013	*984	*956	*928	*900	*873	*845
0,4	0,8	594	634	674	714	754	794	834	874	914	954
	0,5	818	791	765	738	712	686	660	634	609	584
0,5	0,8	995	*035	*075	*115	*156	*196	*236	*276	*317	*357
	0,5	559	534	510	485	461	437	414	390	367	344
0,6	0,9	397	438	478	518	558	599	639	679	719	759
	0,5	321	298	275	253	231	209	187	166	144	123
0,7	0,9	800	840	880	920	960	*000	*040	*080	*120	*160
	0,5	102	081	061	040	020	000	*980	*960	*941	*921
0,8	1,0	200	239	279	319	359	398	438	477	517	556
	0,4	902	883	864	845	827	809	790	772	754	737
0,9	1,0	596	635	674	714	753	792	831	870	909	948
	0,4	719	701	684	667	650	633	616	600	583	567

3. Прямоугольные и полярные координаты

Таблица 3 позволяет находить величины (рис. 3)

$1 + ix = me^{i\mu}, \quad x + i = me^{i(90^\circ - \mu)}.$

Очевидно, что

$\operatorname{tg} \mu = x, \quad m = \sqrt{1 + x^2} = 1 + x \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{1}{\cos \mu}.$

В общем случае пусть

$\pm a + ib = re^{i\varrho}.$

Даны a, b ; определяются r, ϱ :

$0 < b < a: \quad x = \frac{b}{a}, \quad r = am, \quad \begin{cases} \varrho = \mu, \\ \varrho = 180^\circ - \mu; \end{cases}$
 $0 < a < b: \quad x = \frac{a}{b}, \quad r = bm, \quad \varrho = 90^\circ \mp \mu.$

Даны r, ϱ ; определяются a, b :

$0 < \varrho < 45^\circ: \quad \mu = \varrho, \quad \left. \begin{matrix} \mu = 180^\circ - \varrho, \\ \mu = |90^\circ - \varrho|, \end{matrix} \right\} \begin{matrix} a = \frac{r}{m}, & b = \frac{r}{m} x; \\ a = \frac{r}{m} x, & b = \frac{r}{m}. \end{matrix}$

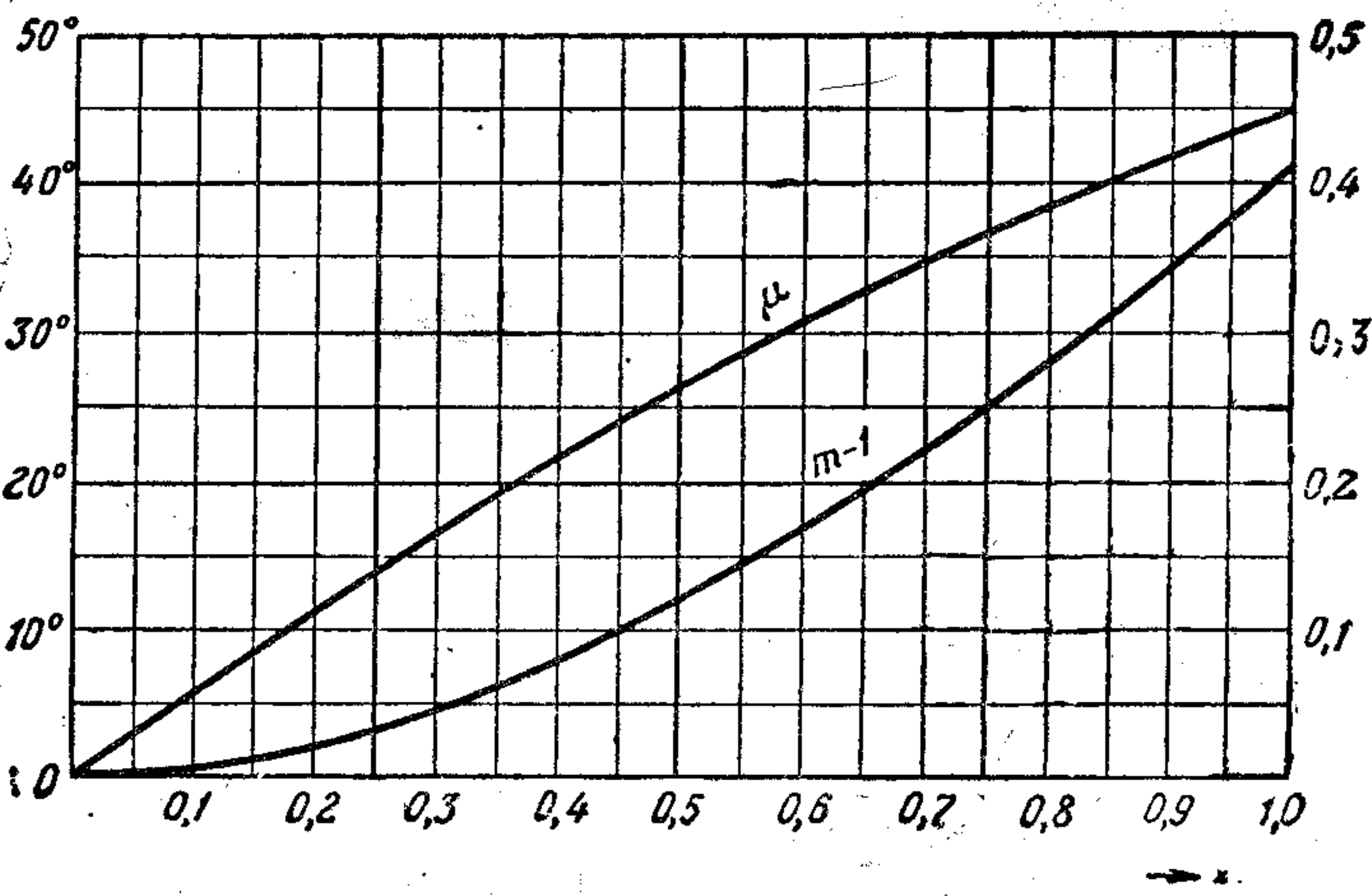


Рис. 3. $1 + ix = me^{i\mu}, \quad x + i = me^{i(90^\circ - \mu)}.$

Таблица 3. Тригонометрическая форма комплексных чисел

$1 + ix = me^{i\mu}$

$x + i = me^{i(90^\circ - \mu)}$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	1,0000	000	005	020	045	080	125	180	245	320	405
	0,	0000°	0573°	1146°	1719°	2292°	2865°	3438°	4011°	4584°	5157°
1	1,000	0500	0605	0720	0845	0980	1125	1280	1445	1620	1805
	0,	5729°	6302°	6875°	7448°	8021°	8594°	9167°	9740°	*0312°	*0885°
2	1,000	2000	2205	2420	2645	2880	3124	3379	3644	3919	4204
	1,	1458°	2030°	2603°	3176°	3748°	4321°	4894°	5466°	6039°	6611°
0,03	1,000	4499	4804	5119	5444	5778	6123	6478	6843	7217	7602
	1,	7184°	7756°	8328°	8901°	9473°	*0045°	*0618°	*1190°	*1762°	*2334°

Продолжение табл. 3

$$1+ix = me^{i\mu}$$

$$x+i = me^{i(90^\circ-\mu)}$$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,04	1,000	7997	8401	8816	9241	9675	*0120	*0573	*1037	*1513	*1998
	2,	2906°	3478°	4050°	4622°	5194°	5766°	6337°	6909°	7481°	8052°
5	1,001	2492	2997	3511	4035	4569	5114	5668	6232	6806	7390
	2,	8624°	9196°	9767°	*0338°	*0910°	*1481°	*2052°	*2623°	*3194°	*3765°
6	1,001	7984	8588	9202	9825	*0459	*1103	*1756	*2420	*3093	*3777
	3,	4936°	4907°	5478°	6049°	6619°	7190°	7760°	8331°	8901°	9472°
7	1,002	4470	5173	5886	6610	7343	8086	8839	9601	*0374	*1156
	4,	0042°	0612°	1182°	1752°	2322°	2891°	3461°	4031°	4600°	5170°
8	1,003	1948	2751	3564	4386	5218	6060	6912	7774	8645	9527
	4,	5739°	6308°	6878°	7447°	8016°	8585°	9153°	9722°	*0291°	*0859°
9	1,004	0418	1320	2231	3152	4083	5024	5974	6935	7905	8886
	5,	1428°	1996°	2564°	3132°	3700°	4268°	4836°	5404°	5971°	6539°
0,1	1,0	0499	0603	0717	0841	0975	1119	1272	1435	1607	1789
	—	5,711°	6,277°	6,843°	7,407°	7,970°	8,531°	9,090°	9,648°	10,204°	10,758°
2	1,0	1980	2181	2391	2611	2840	3078	3325	3581	3846	4120
	10×1,	1310°	1860°	2407°	2953°	3496°	4036°	4574°	5110°	5642°	6172°
3	1,0	4403	4695	4995	5304	5622	5948	6283	6626	6977	7336
	10×1,	6699°	7223°	7745°	8263°	8778°	9290°	9799°	*0305°	*0807°	*1306°
4	1,0	7703	8079	8462	8853	9252	9659	*0073	*0494	*0923	*1360
	10×2,	1801°	2294°	2782°	3268°	3750°	4228°	4702°	5174°	5641°	6105°
5	1,1	1803	2254	2712	3177	3649	4127	4613	5105	5603	6108
	10×2,	6565°	7022°	7474°	7924°	8369°	8811°	9249°	9683°	*0114°	*0541°
6	1,1	6619	7137	7661	8190	8727	9269	9817	*0371	*0930	*1495
	10×3,	0964°	1383°	1799°	2211°	2619°	3024°	3425°	3822°	4216°	4606°
7	1,2	2066	2642	3224	3811	4403	5001	5603	6211	6823	7440
	10×3,	4992°	5375°	5754°	6129°	6501°	6870°	7235°	7596°	7954°	8309°
8	1,2	8063	8690	9322	9958	*0599	*1245	*1894	*2548	*3207	*3870
	10×3,	8660°	9008°	9352°	9693°	*0030°	*0365°	*0696°	*1023°	*1348°	*1669°
9	1,3	4537	5208	5882	6562	7242	7932	8623	9316	*0015	*0716
	10×4,	1987°	2302°	2614°	2923°	3229°	3531°	3831°	4128°	4421°	4712°

4. Сложение векторов

[Таблица 4 позволяет находить величины

$$1 + re^{i\frac{\pi}{2}\varrho} = se^{i\frac{\pi}{2}\sigma}, \quad r + e^{i\frac{\pi}{2}\varrho} = se^{i\frac{\pi}{2}(\varrho-\sigma)}.$$

Очевидно, что

$$s = \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos \varrho}, \quad \operatorname{ctg} \sigma = \operatorname{ctg} \varrho + \frac{1}{r \sin \varrho}.$$

Если в общем случае надо сложить заданные векторы $ae^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$ и $be^{i\frac{\pi}{2}\beta}$, $0 < b < a$, то их сумма $ae^{i\frac{\pi}{2}\alpha} + be^{i\frac{\pi}{2}\beta} = ce^{i\frac{\pi}{2}\gamma}$ находится так: определим по таблице 4 величины s и σ , соответствующие

$$r = \frac{b}{a}, \quad \varrho = |\alpha - \beta|;$$

тогда

$$c = as, \quad \gamma = \begin{cases} \alpha + \sigma, & \text{если } \alpha < \beta, \\ \alpha - \sigma, & \text{если } \alpha > \beta. \end{cases}$$

Таблица 4. Сложение векторов

s

φ	$r=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	1,1000	1,2000	1,3000	1,4000	1,5000	1,6000	1,7000	1,8000	1,9000	2,0000
0,05	1,0997	1,1995	1,2993	1,3991	1,4990	1,5988	1,6987	1,7986	1,8985	1,9985
0,10	1,0989	1,1979	1,2972	1,3965	1,4959	1,5954	1,6949	1,7945	1,8942	1,9938
0,15	1,0977	1,1954	1,2936	1,3921	1,4908	1,5896	1,6886	1,7877	1,8869	1,9861
0,20	1,0955	1,1918	1,2887	1,3859	1,4836	1,5815	1,6797	1,7781	1,8767	1,9754
0,25	1,0931	1,1872	1,2823	1,3781	1,4744	1,5712	1,6684	1,7658	1,8636	1,9616
0,30	1,0900	1,1817	1,2746	1,3685	1,4632	1,5586	1,6545	1,7509	1,8477	1,9447
0,35	1,0865	1,1752	1,2655	1,3572	1,4500	1,5438	1,6382	1,7333	1,8289	1,9249
0,40	1,0825	1,1677	1,2552	1,3443	1,4349	1,5267	1,6195	1,7130	1,8073	1,9021
0,45	1,0780	1,1594	1,2435	1,3298	1,4179	1,5075	1,5983	1,6902	1,7829	1,8764
0,50	1,0730	1,1501	1,2306	1,3137	1,3990	1,4861	1,5748	1,6647	1,7558	1,8478
0,55	1,0677	1,1401	1,2164	1,2960	1,3782	1,4626	1,5489	1,6368	1,7260	1,8163
0,60	1,0619	1,1292	1,2011	1,2768	1,3556	1,4371	1,5208	1,6064	1,6935	1,7820
0,65	1,0557	1,1176	1,1847	1,2562	1,3314	1,4096	1,4905	1,5735	1,6585	1,7450
0,70	1,0492	1,1053	1,1672	1,2342	1,3054	1,3801	1,4579	1,5383	1,6209	1,7053
0,75	1,0424	1,0923	1,1487	1,2108	1,2778	1,3488	1,4233	1,5008	1,5808	1,6629
0,80	1,0353	1,0787	1,1293	1,1863	1,2486	1,3156	1,3866	1,4610	1,5383	1,6180
0,85	1,0280	1,0646	1,1091	1,1605	1,2180	1,2807	1,3479	1,4190	1,4934	1,5706
0,90	1,0204	1,0500	1,0881	1,1336	1,1859	1,2441	1,3073	1,3749	1,4462	1,5208
0,95	1,0128	1,0351	1,0663	1,1058	1,1526	1,2059	1,2648	1,3287	1,3969	1,4686
1,00	1,0050	1,0198	1,0440	1,0770	1,1180	1,1662	1,2207	1,2806	1,3454	1,4142
1,05	0,9972	1,0043	1,0212	1,0475	1,0824	1,1251	1,1748	1,2306	1,2918	1,3576
1,10	0,9893	0,9886	0,9981	1,0173	1,0457	1,0827	1,1274	1,1789	1,2363	1,2989
1,15	0,9815	0,9729	0,9746	0,9865	1,0082	1,0392	1,0785	1,1251	1,1789	1,2382
1,20	0,9738	0,9573	0,9511	0,9554	0,9700	0,9946	1,0283	1,0703	1,1197	1,1756
1,25	0,9662	0,9418	0,9276	0,9240	0,9313	0,9491	0,9769	1,0138	1,0589	1,1111
1,30	0,9588	0,9265	0,9042	0,8926	0,8922	0,9029	0,9243	0,9558	0,9964	1,0450
1,35	0,9516	0,9116	0,8812	0,8614	0,8529	0,8562	0,8709	0,8967	0,9325	0,9772
1,40	0,9447	0,8972	0,8587	0,8305	0,8138	0,8091	0,8168	0,8364	0,8672	0,9080
1,45	0,9381	0,8833	0,8369	0,8003	0,7750	0,7620	0,7621	0,7753	0,8006	0,8373
1,50	0,9320	0,8701	0,8159	0,7709	0,7368	0,7151	0,7071	0,7131	0,7329	0,7654
1,55	0,9262	0,8578	0,7931	0,7427	0,6997	0,6690	0,6523	0,6507	0,6643	0,6922
1,60	0,9210	0,8464	0,7776	0,7161	0,6641	0,6238	0,5978	0,5879	0,5948	0,6180
1,65	0,9162	0,8360	0,7605	0,6913	0,6304	0,5804	0,5443	0,5251	0,5246	0,5429
1,70	0,9120	0,8268	0,7452	0,6687	0,5992	0,5393	0,4925	0,4630	0,4541	0,4669
1,75	0,9084	0,8188	0,7319	0,6488	0,5711	0,5013	0,4434	0,4022	0,3834	0,3902
1,80	0,9054	0,8121	0,7207	0,6318	0,5468	0,4677	0,3981	0,3440	0,3132	0,3129
1,85	0,9031	0,8069	0,7117	0,6181	0,5269	0,4395	0,3587	0,2902	0,2444	0,2351
1,90	0,9014	0,8031	0,7053	0,6082	0,5122	0,4181	0,3275	0,2443	0,1793	0,1569
1,95	0,9003	0,8008	0,7013	0,6021	0,5031	0,4046	0,3071	0,2120	0,1247	0,0785
2,00	0,9000	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000	0,0000

Продолжение табл. 4

 σ

q	r=0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,05	0,00454	0,00833	0,01153	0,01428	0,01666	0,01875	0,02059	0,02222	0,02268	0,02500
0,10	0,00906	0,01663	0,02304	0,02854	0,03330	0,03745	0,04116	0,04443	0,04738	0,05000
0,15	0,01354	0,02487	0,03448	0,04274	0,04990	0,05617	0,06171	0,06663	0,07103	0,07500
0,20	0,01796	0,03303	0,04584	0,05685	0,06542	0,07481	0,08221	0,08880	0,09469	0,10000
0,25	0,02229	0,04107	0,05707	0,07086	0,08285	0,09337	0,10266	0,11093	0,11834	0,12500
0,30	0,02652	0,04897	0,06816	0,08473	0,09916	0,11184	0,12304	0,13302	0,14196	0,15000
0,35	0,03063	0,05569	0,07905	0,09842	0,11533	0,13019	0,14334	0,15506	0,16555	0,17500
0,40	0,03458	0,06420	0,08974	0,11192	0,13132	0,14840	0,16354	0,17703	0,18911	0,20000
0,45	0,03838	0,07147	0,10016	0,12517	0,14710	0,16645	0,18361	0,19892	0,2126	0,2250
0,50	0,04198	0,07848	0,11030	0,13815	0,16265	0,18431	0,20355	0,2207	0,2351	0,2500
0,55	0,04538	0,08518	0,12010	0,15082	0,17793	0,20195	0,2233	0,2424	0,2596	0,2750
0,60	0,04855	0,09154	0,12953	0,16313	0,19290	0,2193	0,2429	0,2640	0,2829	0,3000
0,65	0,05147	0,09752	0,13855	0,17504	0,2075	0,2364	0,2623	0,2854	0,3063	0,3250
0,70	0,05413	0,10309	0,14710	0,18650	0,2217	0,2532	0,2814	0,3067	0,3295	0,3500
0,75	0,05650	0,10821	0,15513	0,19745	0,2355	0,2696	0,3003	0,3278	0,3526	0,3750
0,80	0,05857	0,11284	0,16260	0,2078	0,2487	0,2856	0,3188	0,3487	0,3757	0,4000
0,85	0,06031	0,11695	0,16944	0,2176	0,2614	0,3011	0,3370	0,3694	0,3986	0,4250
0,90	0,06172	0,12048	0,17559	0,2266	0,2734	0,3161	0,3548	0,3898	0,4214	0,4500
0,95	0,06276	0,12340	0,18098	0,2349	0,2847	0,3304	0,3721	0,4098	0,4441	0,4750
1,00	0,06345	0,12567	0,18555	0,2422	0,2952	0,3440	0,3888	0,4296	0,4665	0,5000
1,05	0,06375	0,12723	0,18921	0,2486	0,3047	0,3568	0,4049	0,4488	0,4888	0,5250
1,10	0,06366	0,12806	0,19189	0,2539	0,3131	0,3687	0,4203	0,4676	0,5108	0,5500
1,15	0,06317	0,12811	0,19351	0,2580	0,3203	0,3795	0,4348	0,4859	0,5326	0,5750
1,20	0,06228	0,12734	0,19396	0,2607	0,3262	0,3890	0,4483	0,5034	0,5540	0,6000
1,25	0,06097	0,12572	0,19318	0,2619	0,3304	0,3971	0,4506	0,5201	0,5750	0,6250
1,30	0,05925	0,12321	0,19105	0,2615	0,3328	0,4034	0,4715	0,5358	0,5955	0,6500
1,35	0,05712	0,11980	0,18750	0,2592	0,3332	0,4077	0,4807	0,5503	0,6153	0,6750
1,40	0,05459	0,11545	0,18243	0,2548	0,3312	0,4096	0,4877	0,5633	0,6345	0,7000
1,45	0,05166	0,11016	0,17576	0,2482	0,3265	0,4087	0,4923	0,5745	0,6526	0,7250
1,50	0,04835	0,10393	0,16744	0,2392	0,3186	0,4043	0,4936	0,5832	0,6695	0,7500
1,55	0,04467	0,09677	0,15740	0,2275	0,3072	0,3958	0,4910	0,5888	0,6848	0,7750
1,60	0,04066	0,08871	0,14564	0,2130	0,2919	0,3825	0,4833	0,5902	0,6978	0,8000
1,65	0,03632	0,07978	0,13216	0,19553	0,2720	0,3633	0,4691	0,5861	0,7075	0,8250
1,70	0,03170	0,07005	0,11700	0,17508	0,2474	0,3371	0,4465	0,5641	0,7126	0,8500
1,75	0,02683	0,05959	0,10027	0,15164	0,2175	0,3029	0,4130	0,5507	0,7103	0,8750
1,80	0,02173	0,04849	0,08212	0,12536	0,18239	0,2595	0,3656	0,5105	0,6958	0,9000
1,85	0,01646	0,03686	0,06274	0,09654	0,14221	0,2065	0,3011	0,4451	0,6586	0,9250
1,90	0,01105	0,02481	0,04239	0,06562	0,09761	0,14416	0,2171	0,3423	0,5747	0,9500
1,95	0,00555	0,01248	0,02137	0,03320	0,04963	0,07424	0,11446	0,19138	0,3832	0,9750
2,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	—

II. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Некоторые специальные тригонометрические функции

Таблицы 5, 6 позволяют находить значения часто встречающихся функций $x \operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ (рис. 4).

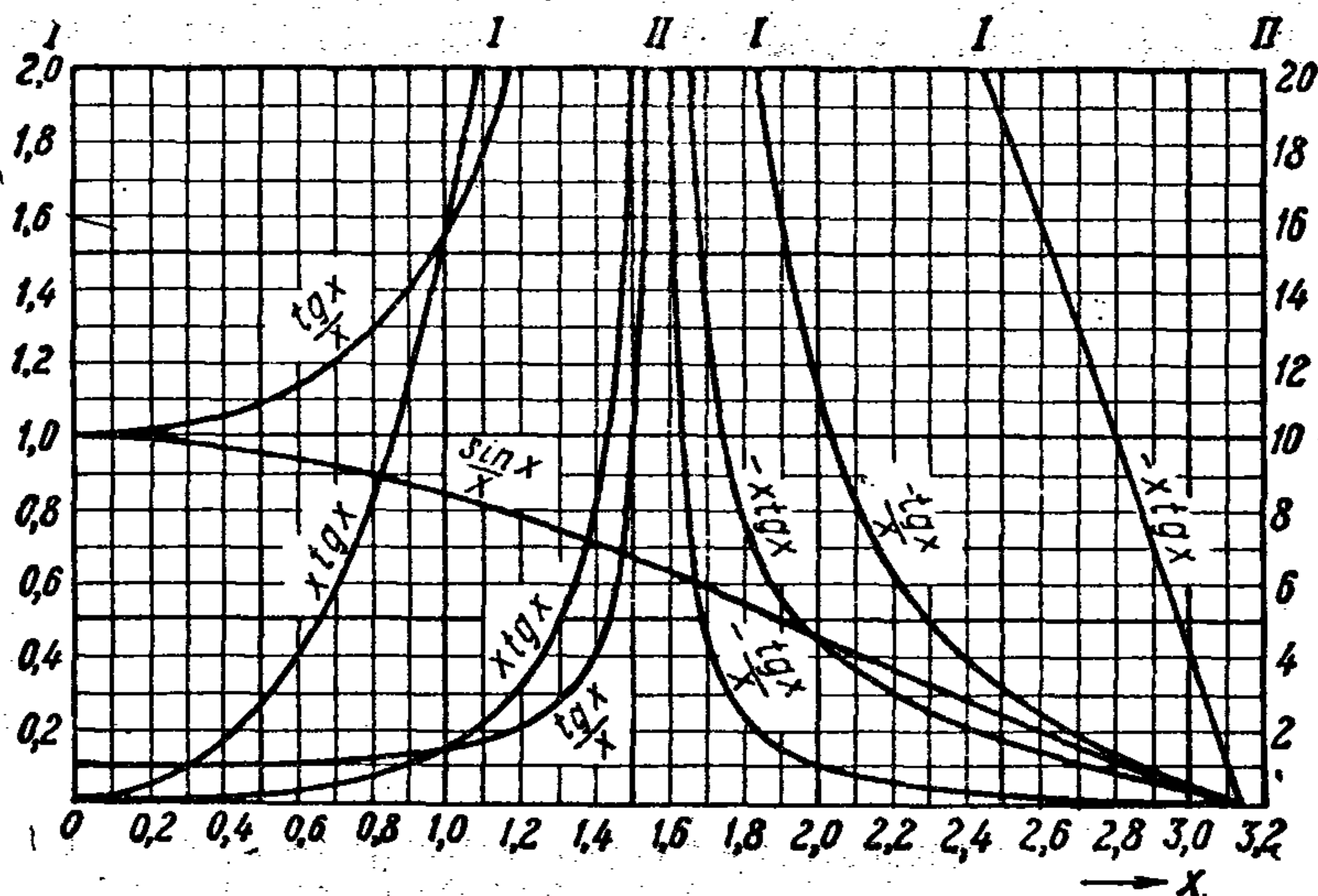


Рис. 4. Функции $x \operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ и $\frac{\sin x}{x}$.

[Рис. 5, 6 дают представление о корнях трансцендентных уравнений $x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x = u$ и $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x = v$, а таблица 7 — об экстремальных точках функции $\frac{\sin x}{x}$.]

2. Элементарные трансцендентные уравнения

а) $\operatorname{tg} x = x$ или $\operatorname{tg} \xi = \frac{1}{x}$, где $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \xi = a - \xi$.

Решение: $x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5} - \frac{146}{105a^7} - \dots$

б) $\operatorname{tg} x = \frac{2x}{2-x^2}$: $x_1 = 0$, $x_2 = 119,26 \cdot \frac{\pi}{180}$, $x_3 = 340,35 \cdot \frac{\pi}{180}$, ...

в) $\operatorname{tg} x = \frac{x^3 - 9x}{4x^2 - 9}$: $x_1 = 0$, $x_2 = 3,3422$, ...

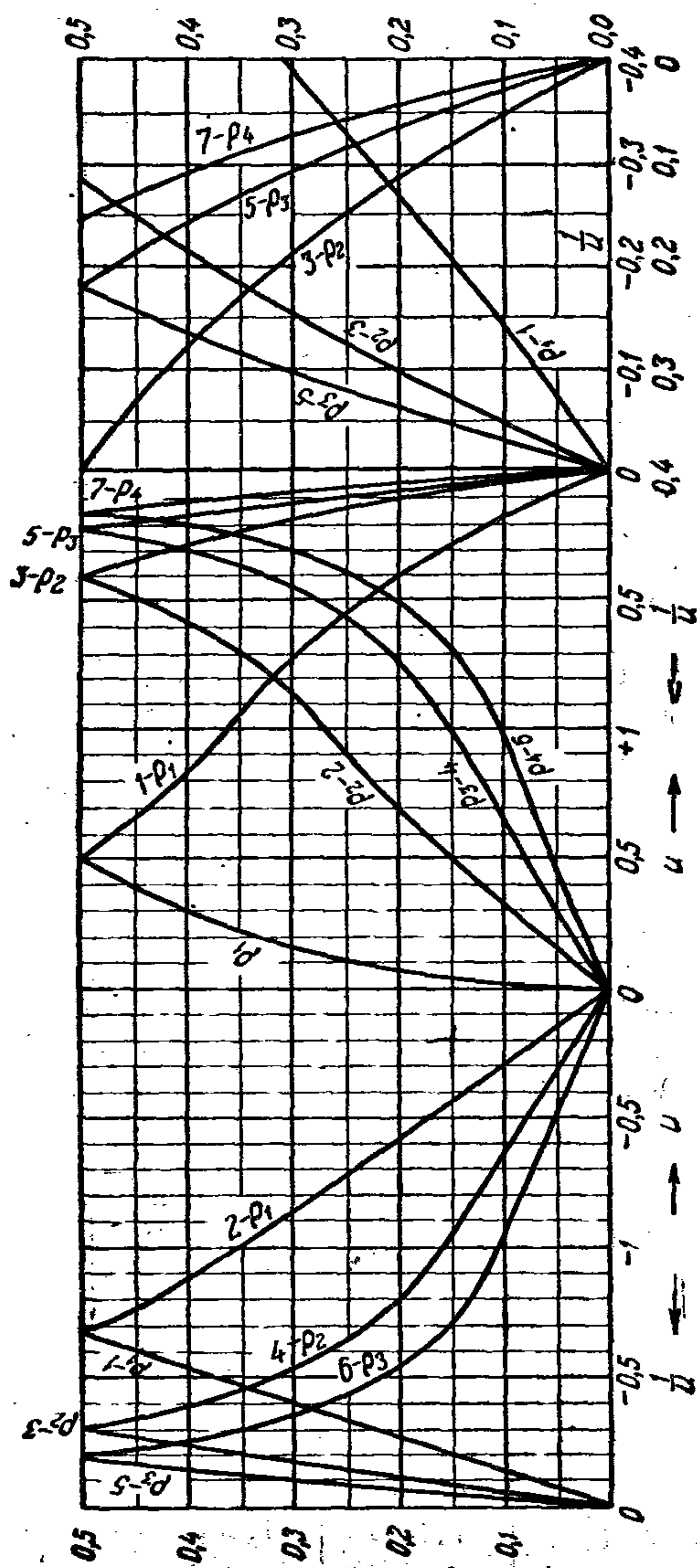


Рис. 5. Корни Q_n уравнения $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ как функции u .

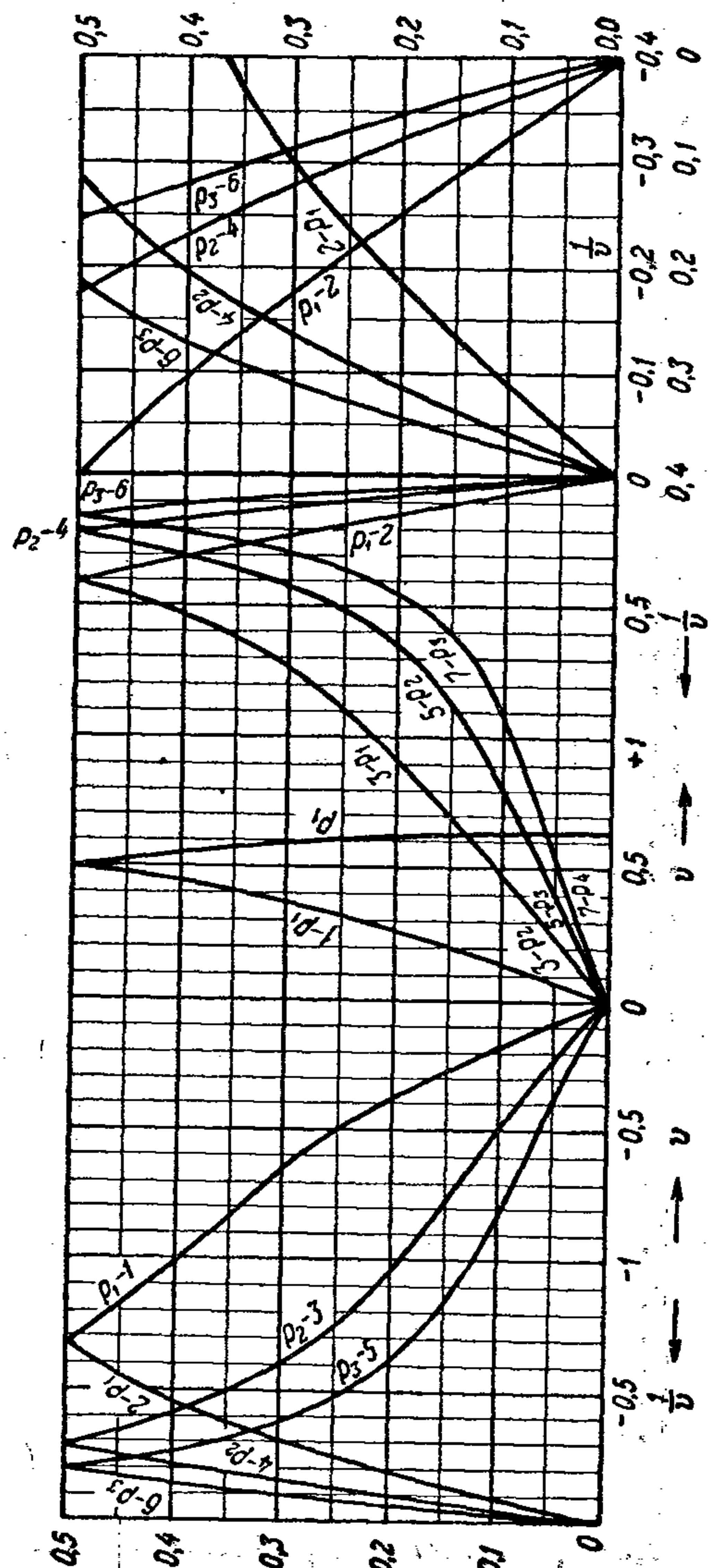


Рис. 6. Корни Q_n уравнения $x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = v$ как функции v .

Таблица 5. Функции $x \operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ и $\frac{\sin x}{x}$

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
0,00	0	1	1	0,53	0,3105	1,1055	0,9538
0,01	0,0 ³ 10000	1,0000	1,0000	0,54	0,3237	1,1101	0,9521
0,02	0,0 ³ 4001	1,0001	0,9999	0,55	0,3372	1,1147	0,9503
0,03	0,0 ³ 9003	1,0003	0,9998	0,56	0,3511	1,1196	0,9485
0,04	0,0 ² 16009	1,0005	0,9997	0,57	0,3654	1,1245	0,9467
0,05	0,0 ² 2502	1,0008	0,9996	0,58	0,3800	1,1296	0,9449
0,06	0,0 ² 3604	1,0012	0,9994	0,59	0,3950	1,1348	0,9430
0,07	0,0 ² 4908	1,0016	0,9992	0,60	0,4105	1,1402	0,9411
0,08	0,0 ² 6414	1,0021	0,9989	0,61	0,4263	1,1458	0,9391
0,09	0,0 ² 8122	1,0027	0,9987	0,62	0,4426	1,1515	0,9372
0,10	0,010033	1,0033	0,9983	0,63	0,4593	1,1573	0,9352
0,11	0,012149	1,0041	0,9980	0,64	0,4765	1,1633	0,9331
0,12	0,014470	1,0048	0,9976	0,65	0,4941	1,1695	0,9311
0,13	0,016996	1,0057	0,9972	0,66	0,5122	1,1759	0,9290
0,14	0,01973	1,0066	0,9967	0,67	0,5308	1,1825	0,9268
0,15	0,02267	1,0076	0,9953	0,68	0,5499	1,1892	0,9247
0,16	0,02582	1,0086	0,9957	0,69	0,5695	1,1961	0,9225
0,17	0,02918	1,0097	0,9952	0,70	0,5896	1,2033	0,9203
0,18	0,03275	1,0109	0,9946	0,71	0,6103	1,2106	0,9181
0,19	0,03654	1,0122	0,9940	0,72	0,6315	1,2181	0,9158
0,20	0,04054	1,0136	0,9933	0,73	0,6533	1,2259	0,9135
0,21	0,04476	1,0150	0,9927	0,74	0,6757	1,2339	0,9112
0,22	0,04920	1,0165	0,9920	0,75	0,6987	1,2421	0,9089
0,23	0,05385	1,0180	0,9912	0,76	0,7223	1,2506	0,9065
0,24	0,05873	1,0197	0,9904	0,77	0,7466	1,2593	0,9041
0,25	0,06384	1,0214	0,9896	0,78	0,7716	1,2683	0,9016
0,26	0,06917	1,0232	0,9888	0,79	0,7973	1,2775	0,8992
0,27	0,07473	1,0250	0,9879	0,80	0,8237	1,2870	0,8967
0,28	0,08051	1,0270	0,9870	0,81	0,8509	1,2969	0,8942
0,29	0,08654	1,0290	0,9860	0,82	0,8788	1,3070	0,8916
0,30	0,09280	1,0311	0,9851	0,83	0,9075	1,3174	0,8891
0,31	0,09930	1,0333	0,9841	0,84	0,9371	1,3281	0,8865
0,32	0,10604	1,0356	0,9830	0,85	0,9676	1,3392	0,8839
0,33	0,11303	1,0380	0,9819	0,86	0,9989	1,3506	0,8812
0,34	0,12027	1,0404	0,9808	0,87	1,0312	1,3624	0,8785
0,35	0,12776	1,0429	0,9797	0,88	1,0645	1,3746	0,8758
0,36	0,13550	1,0456	0,9785	0,89	1,0988	1,3872	0,8731
0,37	0,14351	1,0483	0,9773	0,90	1,1341	1,4002	0,8704
0,38	0,15178	1,0511	0,9761	0,91	1,1706	1,4136	0,8676
0,39	0,16031	1,0540	0,9748	0,92	1,2082	1,4275	0,8648
0,40	0,16912	1,0570	0,9735	0,93	1,2470	1,4418	0,8620
0,41	0,1782	1,0601	0,9722	0,94	1,2871	1,4566	0,8591
0,42	0,1876	1,0633	0,9709	0,95	1,3285	1,4720	0,8562
0,43	0,1972	1,0666	0,9695	0,96	1,3712	1,4879	0,8533
0,44	0,2071	1,0700	0,9680	0,97	1,4154	1,5043	0,8504
0,45	0,2174	1,0735	0,9666	0,98	1,4611	1,5214	0,8474
0,46	0,2279	1,0771	0,9651	0,99	1,5084	1,5391	0,8445
0,47	0,2387	1,0808	0,9636	1,00	1,5574	1,5574	0,8415
0,48	0,2499	1,0846	0,9620	1,01	1,6081	1,5764	0,8384
0,49	0,2614	1,0885	0,9605	1,02	1,6607	1,5962	0,8354
0,50	0,2732	1,0926	0,9589	1,03	1,7152	1,6167	0,8323
0,51	0,2853	1,0968	0,9572	1,04	1,7718	1,6381	0,8292
0,52	0,2977	1,1011	0,9555	1,05	1,8305	1,6603	0,8261

Продолжение табл. 5

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
1,06	1,891	1,6834	0,8230	$\frac{\pi}{2}$	∞	∞	0,6366
1,07	1,955	1,7075	0,8198				
1,08	2,021	1,7326	0,8166	1,58	-171,67	-68,77	0,6329
1,09	2,090	1,7588	0,8134	1,59	-82,79	-32,75	0,6288
1,10	2,161	1,7861	0,8102	1,60	-54,77	-21,40	0,6247
1,11	2,236	1,8147	0,8069	1,61	-41,05	-15,835	0,6206
1,12	2,314	1,845	0,8037	1,62	-32,90	-12,535	0,6165
1,13	2,395	1,876	0,8004	1,63	-27,50	-10,350	0,6124
1,14	2,481	1,909	0,7970	1,64	-23,66	-8,797	0,6083
1,15	2,570	1,943	0,7937	1,65	-20,79	-7,636	0,6042
1,16	2,663	1,979	0,7903	1,66	-18,56	-6,735	0,6000
1,17	2,761	2,017	0,7870	1,67	-16,779	-6,016	0,5959
1,18	2,864	2,057	0,7836	1,68	-15,323	-5,429	0,5917
1,19	2,973	2,099	0,7801	1,69	-14,110	-4,940	0,5875
1,20	3,087	2,143	0,7767	1,70	-13,084	-4,527	0,5833
1,21	3,207	2,190	0,7732	1,71	-12,205	-4,174	0,5791
1,22	3,334	2,240	0,7698	1,72	-11,442	-3,868	0,5749
1,23	3,468	2,293	0,7663	1,73	-10,775	-3,600	0,5707
1,24	3,611	2,348	0,7627	1,74	-10,185	-3,354	0,5665
1,25	3,762	2,408	0,7592	1,75	-9,661	-3,155	0,5623
1,26	3,923	2,471	0,7556	1,76	-9,191	-2,967	0,5580
1,27	4,094	2,538	0,7520	1,77	-8,768	-2,799	0,5538
1,28	4,277	2,610	0,7484	1,78	-8,384	-2,646	0,5495
1,29	4,473	2,688	0,7448	1,79	-8,035	-2,508	0,5453
1,30	4,683	2,771	0,7412	1,80	-7,715	-2,381	0,5410
1,31	4,909	2,860	0,7375	1,81	-7,422	-2,265	0,5368
1,32	5,152	2,957	0,7339	1,82	-7,151	-2,159	0,5325
1,33	5,416	3,062	0,7302	1,83	-6,901	-2,061	0,5282
1,34	5,703	3,176	0,7265	1,84	-6,669	-1,970	0,5239
1,35	6,015	3,300	0,7228	1,85	-6,453	-1,885	0,5196
1,36	6,356	3,436	0,7190	1,86	-6,251	-1,807	0,5153
1,37	6,731	3,586	0,7153	1,87	-6,062	-1,7336	0,5110
1,38	7,145	3,752	0,7115	1,88	-5,885	-1,6651	0,5067
1,39	7,604	3,936	0,7077	1,89	-5,719	-1,6009	0,5024
1,40	8,117	4,141	0,7039	1,90	-5,561	-1,5406	0,4981
1,41	8,693	4,373	0,7001	1,91	-5,413	-1,4838	0,4937
1,42	9,345	4,635	0,6962	1,92	-5,273	-1,4304	0,4894
1,43	10,089	4,934	0,6924	1,93	-5,140	-1,3799	0,4851
1,44	10,947	5,279	0,6885	1,94	-5,014	-1,3321	0,4807
1,45	11,945	5,681	0,6846	1,95	-4,893	-1,2869	0,4764
1,46	13,123	6,157	0,6807	1,96	-4,779	-1,2440	0,4720
1,47	14,534	6,726	0,6768	1,97	-4,670	-1,2033	0,4677
1,48	16,255	7,421	0,6729	1,98	-4,566	-1,1646	0,4634
1,49	18,40	8,288	0,6690	1,99	-4,466	-1,1277	0,4590
1,50	21,15	9,401	0,6650	2,00	-4,370	-1,0925	0,4546
1,51	24,81	10,880	0,6610	2,01	-4,278	-1,0590	0,4503
1,52	29,90	12,940	0,6570	2,02	-4,190	-1,0269	0,4459
1,53	37,48	16,012	0,6531	2,03	-4,106	-0,9963	0,4416
1,54	49,99	21,08	0,6490	2,04	-4,024	-0,9669	0,4372
1,55	74,52	31,02	0,6450	2,05	-3,945	-0,9388	0,4329
1,56	144,49	59,37	0,6410	2,06	-3,870	-0,9118	0,4285
1,57	1971,55	799,85	0,6369	2,07	-3,796	-0,8860	0,4241

Продолжение табл. 5

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
2,08	— 3,726	— 0,8611	0,4198	2,62	— 1,5057	— 0,2193	0,1902
2,09	— 3,657	— 0,8372	0,4154	2,63	— 1,4766	— 0,2135	0,1861
				2,64	— 1,4477	— 0,2077	0,1821
2,10	— 3,591	— 0,8142	0,4111	2,65	— 1,4189	— 0,2021	0,17812
2,11	— 3,526	— 0,7921	0,4067	2,66	— 1,3902	— 0,1965	0,17413
2,12	— 3,464	— 0,7707	0,4023	2,67	— 1,3616	— 0,1910	0,17015
2,13	— 3,403	— 0,7502	0,3980	2,68	— 1,3331	— 0,1856	0,16618
2,14	— 3,345	— 0,7303	0,3936	2,69	— 1,3047	— 0,1803	0,16223
2,15	— 3,287	— 0,7112	0,3893	2,70	— 1,2764	— 0,17508	0,15829
2,16	— 3,232	— 0,6926	0,3849	2,71	— 1,2481	— 0,16994	0,15436
2,17	— 3,177	— 0,6747	0,3805	2,72	— 1,2199	— 0,16488	0,15045
2,18	— 3,124	— 0,6574	0,3762	2,73	— 1,1917	— 0,15990	0,14655
2,19	— 3,073	— 0,6407	0,3718	2,74	— 1,1636	— 0,15499	0,14266
2,20	— 3,022	— 0,6245	0,3675	2,75	— 1,1355	— 0,15015	0,13879
2,21	— 2,973	— 0,6088	0,3632	2,76	— 1,1075	— 0,14538	0,13493
2,22	— 2,925	— 0,5935	0,3588	2,77	— 1,0795	— 0,14069	0,13108
2,23	— 2,878	— 0,5787	0,3545	2,78	— 1,0515	— 0,13605	0,12725
2,24	— 2,832	— 0,5644	0,3501	2,79	— 1,0235	— 0,13148	0,12344
2,25	— 2,787	— 0,5505	0,3458	2,80	— 0,9955	— 0,12697	0,11964
2,26	— 2,743	— 0,5370	0,3415	2,81	— 0,9675	— 0,12253	0,11585
2,27	— 2,699	— 0,5239	0,3372	2,82	— 0,9395	— 0,11814	0,11208
2,28	— 2,657	— 0,5111	0,3328	2,83	— 0,9115	— 0,11381	0,10833
2,29	— 2,615	— 0,4987	0,3285	2,84	— 0,8835	— 0,10954	0,10459
2,30	— 2,574	— 0,4866	0,3242	2,85	— 0,8554	— 0,10532	0,10087
2,31	— 2,534	— 0,4749	0,3199	2,86	— 0,8273	— 0,10115	0,09716
2,32	— 2,494	— 0,4634	0,3156	2,87	— 0,7992	— 0,09703	0,09347
2,33	— 2,455	— 0,4523	0,3113	2,88	— 0,7711	— 0,09296	0,08980
2,34	— 2,417	— 0,4414	0,3070	2,89	— 0,7428	— 0,08894	0,08614
2,35	— 2,379	— 0,4308	0,3028	2,90	— 0,7146	— 0,08497	0,08250
2,36	— 2,342	— 0,4205	0,2985	2,91	— 0,6862	— 0,08104	0,07888
2,37	— 2,305	— 0,4104	0,2942	2,92	— 0,6579	— 0,07715	0,07527
2,38	— 2,269	— 0,4006	0,2899	2,93	— 0,6294	— 0,07331	0,07168
2,39	— 2,234	— 0,3910	0,2857	2,94	— 0,6008	— 0,06951	0,06811
2,40	— 2,198	— 0,3817	0,2814	2,95	— 0,5722	— 0,06575	0,06455
2,41	— 2,164	— 0,3725	0,2772	2,96	— 0,5435	— 0,06203	0,06101
2,42	— 2,129	— 0,3636	0,2730	2,97	— 0,5147	— 0,05835	0,05749
2,43	— 2,095	— 0,3549	0,2687	2,98	— 0,4858	— 0,05470	0,05399
2,44	— 2,062	— 0,3463	0,2645	2,99	— 0,4568	— 0,05109	0,05051
2,45	— 2,029	— 0,3380	0,2603	3,00	— 0,4276	— 0,04752	0,04704
2,46	— 1,996	— 0,3298	0,2561	3,01	— 0,3984	— 0,04397	0,04359
2,47	— 1,963	— 0,3218	0,2519	3,02	— 0,3690	— 0,04046	0,04016
2,48	— 1,931	— 0,3140	0,2477	3,03	— 0,3395	— 0,03698	0,03675
2,49	— 1,899	— 0,3063	0,2436	3,04	— 0,3099	— 0,03353	0,03336
2,50	— 1,868	— 0,2988	0,2394	3,05	— 0,2801	— 0,03011	0,02999
2,51	— 1,836	— 0,2915	0,2352	3,06	— 0,2502	— 0,02672	0,02663
2,52	— 1,8051	— 0,2843	0,2311	3,07	— 0,2202	— 0,02336	0,02330
2,53	— 1,7743	— 0,2772	0,2269	3,08	— 0,1899	— 0,02002	0,01998
2,54	— 1,7437	— 0,2703	0,2228	3,09	— 0,15956	— 0,016711	0,016689
2,55	— 1,7133	— 0,2635	0,2187	3,10	— 0,12901	— 0,013425	0,013413
2,56	— 1,6831	— 0,2568	0,2146	3,11	— 0,09829	— 0,010162	0,010157
2,57	— 1,6531	— 0,2503	0,2105	3,12	— 0,06738	— 0,006922	0,006920
2,58	— 1,6233	— 0,2439	0,2064	3,13	— 0,03629	— 0,003704	0,003704
2,59	— 1,5936	— 0,2376	0,2023	3,14	— 0,0 ² 5001	— 0,0 ³ 5072	0,0 ³ 5072
2,60	— 1,5642	— 0,2314	0,1983	π	0	0	0
2,61	— 1,5348	— 0,2253	0,1942				

Таблица 6. Функции $x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ и $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$

x	$x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$	$x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$	x	$x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$	$x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$	x	$x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$	$x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$
0,0	0,000000	0,6366	3,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$	6,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$
0,1	0,015838	0,6314	3,1	— 19,573	— 0,4910	6,1	+ 0,9861	+ 38,51
0,2	0,06498	0,6155	3,2	— 9,849	— 1,0397	6,2	2,0145	19,082
0,3	0,15286	0,5888	3,3	— 6,477	— 1,6814	6,3	3,210	12,364
0,4	0,2906	0,5506	3,4	— 4,680	— 2,470	6,4	4,650	8,809
0,5	0,5000	0,5000	3,5	— 3,500	— 3,500	6,5	6,500	6,500
0,6	0,8258	0,4359	3,6	— 2,616	— 4,955	6,6	9,084	4,795
0,7	1,3738	0,3567	3,7	— 1,8852	— 7,262	6,7	13,149	3,414
0,8	2,462	0,2599	3,8	— 1,2347	— 11,695	6,8	20,93	2,209
0,9	5,682	0,14255	3,9	— 0,6177	— 24,62	6,9	43,56	1,0928
1,0	$\pm \infty$	$\pm 0,00000$	4,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$	7,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$
1,1	— 6,945	— 0,17422	4,1	+ 0,6494	+ 25,89	7,1	— 44,83	— 1,1245
1,2	— 3,693	— 0,3899	4,2	1,3647	12,926	7,2	— 22,159	— 2,3394
1,3	— 2,551	— 0,6624	4,3	2,191	8,439	7,3	— 14,327	— 3,720
1,4	— 1,9269	— 1,0172	4,4	3,197	6,056	7,4	— 10,185	— 5,376
1,5	— 1,5000	— 1,5000	4,5	4,500	4,500	7,5	— 7,500	— 7,500
1,6	— 1,1625	— 2,202	4,6	6,331	3,342	7,6	— 5,522	— 10,461
1,7	— 0,8662	— 3,336	4,7	9,224	2,395	7,7	— 3,923	— 15,112
1,8	— 0,5849	— 5,540	4,8	14,773	1,5596	7,8	— 2,5344	— 24,006
1,9	— 0,3009	— 11,996	4,9	30,94	0,7761	7,9	— 1,2512	— 49,879
2,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$	5,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$	8,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$
2,1	0,3326	+ 13,259	5,1	— 32,20	— 0,8078	8,1	+ 1,2839	+ 51,14
2,2	0,7148	6,771	5,2	— 16,004	— 1,6896	8,2	2,6643	25,237
2,3	1,1719	4,514	5,3	— 10,402	— 2,700	8,3	4,229	16,290
2,4	1,7437	3,303	5,4	— 7,432	— 3,923	8,4	6,103	11,562
2,5	2,5000	2,500	5,5	— 5,500	— 5,500	8,5	8,500	8,500
2,6	3,579	1,8890	5,6	— 4,069	— 7,708	8,6	11,837	6,248
2,7	5,299	1,3757	5,7	— 2,904	— 11,187	8,7	17,075	4,433
2,8	8,617	0,9038	5,8	— 1,8845	— 17,851	8,8	27,084	2,8593
2,9	18,310	0,4593	5,9	— 0,9345	— 37,25	8,9	56,19	1,4096
3,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$	6,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$	9,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$

Таблица 7. Экстремумы функции $\frac{\sin x}{x}$

n	x_n	$\max \min \left(\frac{\sin x}{x} \right)$	n	x_n	$\max \min \left(\frac{\sin x}{x} \right)$
1	0	1	9	26,6661	+ 0,0375
2	4,4934	— 0,2172	10	29,8116	— 0,0335
3	7,7253	+ 0,1284	11	32,9564	+ 0,0303
4	10,9041	— 0,0913	12	36,1006	— 0,0277
5	14,0662	+ 0,0709	13	39,2444	+ 0,0255
6	17,2208	— 0,0580	14	42,3879	— 0,0236
7	20,3713	+ 0,0490	15	45,5311	+ 0,0220
8	23,5195	— 0,0425	16	48,6741	— 0,0205
			17	51,8170	+ 0,0193

III. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Определения

$$\operatorname{sh} x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v}}{(2v)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right), \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x};$$

$$\operatorname{Arsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots (|x| < 1), \quad \operatorname{Arch} x = \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots (|x| < 1).$$

Графики функций см. на рис. 7.

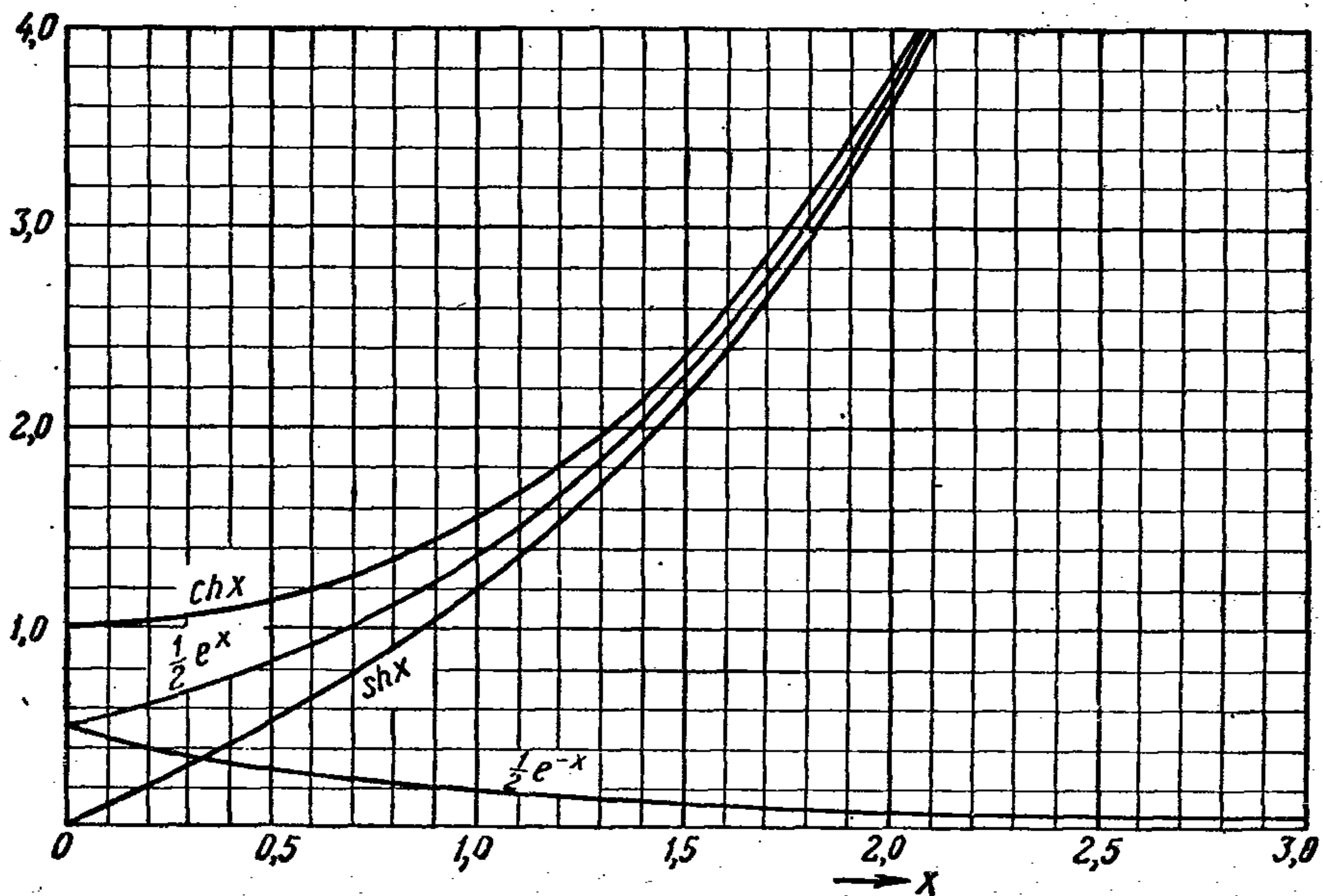


Рис. 7. Показательная функция, гиперболические синус и косинус.

2. Частные значения

$$\operatorname{sh} 0 = 0, \quad \operatorname{ch} 0 = 1, \quad \operatorname{th} 0 = 0, \quad \operatorname{sh} \infty = \infty, \quad \operatorname{ch} \infty = \infty, \quad \operatorname{th} \infty = 1.$$

Другие значения приведены ниже в таблице 8.

3. Основные соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(-x) &= -\operatorname{sh} x, & \operatorname{ch}(-x) &= \operatorname{ch} x, & \operatorname{th}(-x) &= -\operatorname{th} x, \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, & (\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n &= \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx. \end{aligned}$$

4. Представление одной функции через другие

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}, \quad \operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}, \quad \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = \frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x};$$

$$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch} \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$\operatorname{Arch} x = \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{x+1}{2}} = 2 \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{x-1}{2}},$$

$$\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{Arsh} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arch} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arth} \frac{2x}{1+x^2}.$$

5. Формулы сложения

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y};$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}, \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y};$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y), \quad 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y),$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y), \quad 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \operatorname{sh}(x+y) - \operatorname{sh}(x-y);$$

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh}(x \sqrt{1+y^2} \pm y \sqrt{1+x^2}),$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy};$$

$$\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch}(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}),$$

$$A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x = \sqrt{A^2 - B^2} \operatorname{ch} \left(x + \operatorname{Arth} \frac{B}{A} \right) = \sqrt{B^2 - A^2} \operatorname{sh} \left(x + \operatorname{Arth} \frac{A}{B} \right).$$

6. Функции кратных аргументов

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{sh} 3x = 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x (4 \operatorname{ch}^2 x - 1),$$

$$\operatorname{sh}(n+1)x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} nx - \operatorname{sh}(n-1)x,$$

$$\operatorname{sh} nx = n \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x + \binom{n}{3} \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^{n-3} x + \binom{n}{5} \operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch}^{n-5} x + \dots;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x (4 \operatorname{sh}^2 x + 1),$$

$$\operatorname{ch}(n+1)x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} nx - \operatorname{ch}(n-1)x,$$

$$\operatorname{ch} nx = \operatorname{ch}^n x + \binom{n}{2} \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^{n-2} x + \binom{n}{4} \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^{n-4} x + \dots;$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{th} 3x = \frac{\operatorname{th}^3 x + 3 \operatorname{th} x}{3 \operatorname{th}^2 x + 1}, \quad 2 \operatorname{cth} 2x = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x,$$

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}.$$

7. Степени

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{sh}^2 x &= \operatorname{ch} 2x - 1, & 4 \operatorname{sh}^3 x &= \operatorname{sh} 3x - 3 \operatorname{sh} x, & 8 \operatorname{sh}^4 x &= \operatorname{ch} 4x - 4 \operatorname{ch} 2x + 3, \\
16 \operatorname{sh}^5 x &= \operatorname{sh} 5x - 5 \operatorname{sh} 3x + 10 \operatorname{sh} x, \\
32 \operatorname{sh}^6 x &= \operatorname{ch} 6x - 6 \operatorname{ch} 4x + 15 \operatorname{ch} 2x - 10, \\
64 \operatorname{sh}^7 x &= \operatorname{sh} 7x - 7 \operatorname{sh} 5x + 21 \operatorname{sh} 3x - 35 \operatorname{sh} x, \\
128 \operatorname{sh}^8 x &= \operatorname{ch} 8x - 8 \operatorname{ch} 6x + 28 \operatorname{ch} 4x - 56 \operatorname{ch} 2x + 35; \\
2 \operatorname{ch}^2 x &= \operatorname{ch} 2x + 1, & 4 \operatorname{ch}^3 x &= \operatorname{ch} 3x + 3 \operatorname{ch} x, & 8 \operatorname{ch}^4 x &= \operatorname{ch} 4x + 4 \operatorname{ch} 2x + 3, \\
16 \operatorname{ch}^5 x &= \operatorname{ch} 5x + 5 \operatorname{ch} 3x + 10 \operatorname{ch} x, \\
32 \operatorname{ch}^6 x &= \operatorname{ch} 6x + 6 \operatorname{ch} 4x + 15 \operatorname{ch} 2x + 10, \\
64 \operatorname{ch}^7 x &= \operatorname{ch} 7x + 7 \operatorname{ch} 5x + 21 \operatorname{ch} 3x + 35 \operatorname{ch} x, \\
128 \operatorname{ch}^8 x &= \operatorname{ch} 8x + 8 \operatorname{ch} 6x + 28 \operatorname{ch} 4x + 56 \operatorname{ch} 2x + 35.
\end{aligned}$$

8. Связь с показательными функциями и логарифмами

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \\
\operatorname{th} x &= 1 - \frac{e^{-x}}{\operatorname{ch} x}, & \operatorname{cth} x &= 1 + \frac{e^{-x}}{\operatorname{sh} x}; \\
e^x &= \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{2} + \operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2} - \operatorname{sh} \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th} \frac{x}{2}}, & e^{-x} &= \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{2} - \operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2} + \operatorname{sh} \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th} \frac{x}{2}};
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x),$$

$$\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \operatorname{Arth} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1};$$

$$\ln x = \operatorname{Arsh} \frac{x^2 - 1}{2x} = \operatorname{Arch} \frac{x^2 + 1}{2x} = \operatorname{Arth} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

9. Формулы дифференцирования и интегрирования

$$d \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x dx, \quad d \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x dx, \quad d \operatorname{th} x = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$d \operatorname{Arsh} x = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad d \operatorname{Arch} x = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$d \operatorname{Arth} x = \frac{dx}{1 - x^2} \quad (|x| < 1), \quad d \operatorname{Arcth} x = \frac{-dx}{x^2 - 1} \quad (|x| > 1).$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x, \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x, \quad \int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{th} x} = \ln \operatorname{sh} x, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \arcsin \operatorname{th} x = \operatorname{amph} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Arsh} x, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{Arch} x, \quad \int \frac{dx}{x^2 - 1} = -\operatorname{Arcth} x \quad (x > 1),$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{Arth} x \quad (x < 1), \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^2}} = -\operatorname{Arsh} \frac{1}{x}, \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{1 - x^2}} = -\operatorname{Arch} \frac{1}{x},$$

$$\int \operatorname{sh}^n x dx = \frac{\operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x}{n} - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sh}^{n-2} x dx,$$

$$\int \operatorname{ch}^n x dx = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{ch}^{n-2} x dx,$$

$$\int \operatorname{th}^n x dx = -\frac{\operatorname{th}^{n-1} x}{n-1} + \int \operatorname{th}^{n-2} x dx \quad (n \geq 2),$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{(n-1) \operatorname{sh}^{n-1} x} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{n-2} x} \quad (n \geq 2),$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{\operatorname{sh} x}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x} \quad (n \geq 2),$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{th}^n x} = -\frac{1}{(n-1) \operatorname{th}^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{th}^{n-2} x} \quad (n \geq 2);$$

$$\int \operatorname{Arsh} x \, dx = x \operatorname{Arsh} x - \sqrt{x^2 + 1},$$

$$\int \operatorname{Arch} x \, dx = x \operatorname{Arch} x - \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\int \operatorname{Arth} x \, dx = x \operatorname{Arth} x + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2).$$

10. Представления при малых значениях аргументов

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} \approx 1 + \frac{x^2}{6} \approx \sqrt[3]{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \frac{\operatorname{th} x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3} \approx \sqrt[3]{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\operatorname{ch} x + \cos y \approx 2, \quad \operatorname{sh} x + \sin y \approx x + y, \quad \frac{\operatorname{sh} x}{x} - \frac{\sin y}{y} \approx \frac{x^2 + y^2}{6},$$

$$\operatorname{ch} x - \cos y \approx \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad \operatorname{sh} x - \sin y \approx \frac{x^3}{3};$$

$$\frac{\operatorname{Arsh} x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6}, \quad \frac{\operatorname{Arth} x}{x} \approx 1 + \frac{x^2}{3}, \quad \operatorname{Arch} x \approx \sqrt{2(x-1)},$$

$$\operatorname{Arch}(1+x) = \sqrt{2x} - \frac{x}{6} \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{3x^2}{80} \sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{5x^3}{448} \sqrt{\frac{x}{2}} + \dots$$

11. Асимптотика при больших значениях аргументов

$$\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{1}{2} e^x, \quad \operatorname{th} x \approx 1 - 2e^{-2x}; \quad \lg(2 \operatorname{sh} x) \approx \lg(2 \operatorname{ch} x) \approx x \lg e;$$

$$\operatorname{Arsh} x \approx \ln(2x) + \frac{1}{(2x)^2}, \quad \operatorname{Arch} x \approx \ln(2x) - \frac{1}{(2x)^2}, \quad \operatorname{Arth}(1-x) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{2}{x} - \frac{x}{4}.$$

12. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан)

Гудерманиан определяется равенством (рис. 8, таблица 8)

$$\gamma = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2 \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2} \equiv \operatorname{amph} x \equiv \operatorname{gd} x.$$

$$x = \int_0^\gamma \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \ln 10 \cdot \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} + 45^\circ \right);$$

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{tg} \gamma, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos \gamma}, \quad \operatorname{th} x = \sin \gamma, \quad e^x = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{th} \frac{x}{2};$$

$$\frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{1}{\operatorname{ch} x} + \frac{1}{6 \operatorname{ch}^3 x} + \dots, \quad \frac{\gamma}{2} = \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{5} \operatorname{th}^5 \frac{x}{2} - \dots,$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \frac{\gamma}{2} + \dots,$$

$$\gamma = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} - \frac{61x^7}{5040} + \dots, \quad x = \gamma + \frac{\gamma^3}{6} + \frac{\gamma^5}{24} + \frac{61\gamma^7}{5040} + \dots \quad \left(\gamma < \frac{\pi}{2} \right);$$

$$d \operatorname{amph} x = d \operatorname{gd} x = \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$$

Если $\gamma = \operatorname{amph} x$, то $ix = \operatorname{amph} i\gamma$. Если положить
 $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $x = x_1 + ix_2$,
то получим

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\operatorname{sh} x_1}{\cos x_2}, \quad \operatorname{th} x_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\operatorname{ch} \gamma_2}, \quad \operatorname{th} \gamma_2 = \frac{\sin x_2}{\operatorname{ch} x_1}, \quad \operatorname{tg} x_2 = \frac{\operatorname{sh} \gamma_2}{\cos \gamma_1}.$$

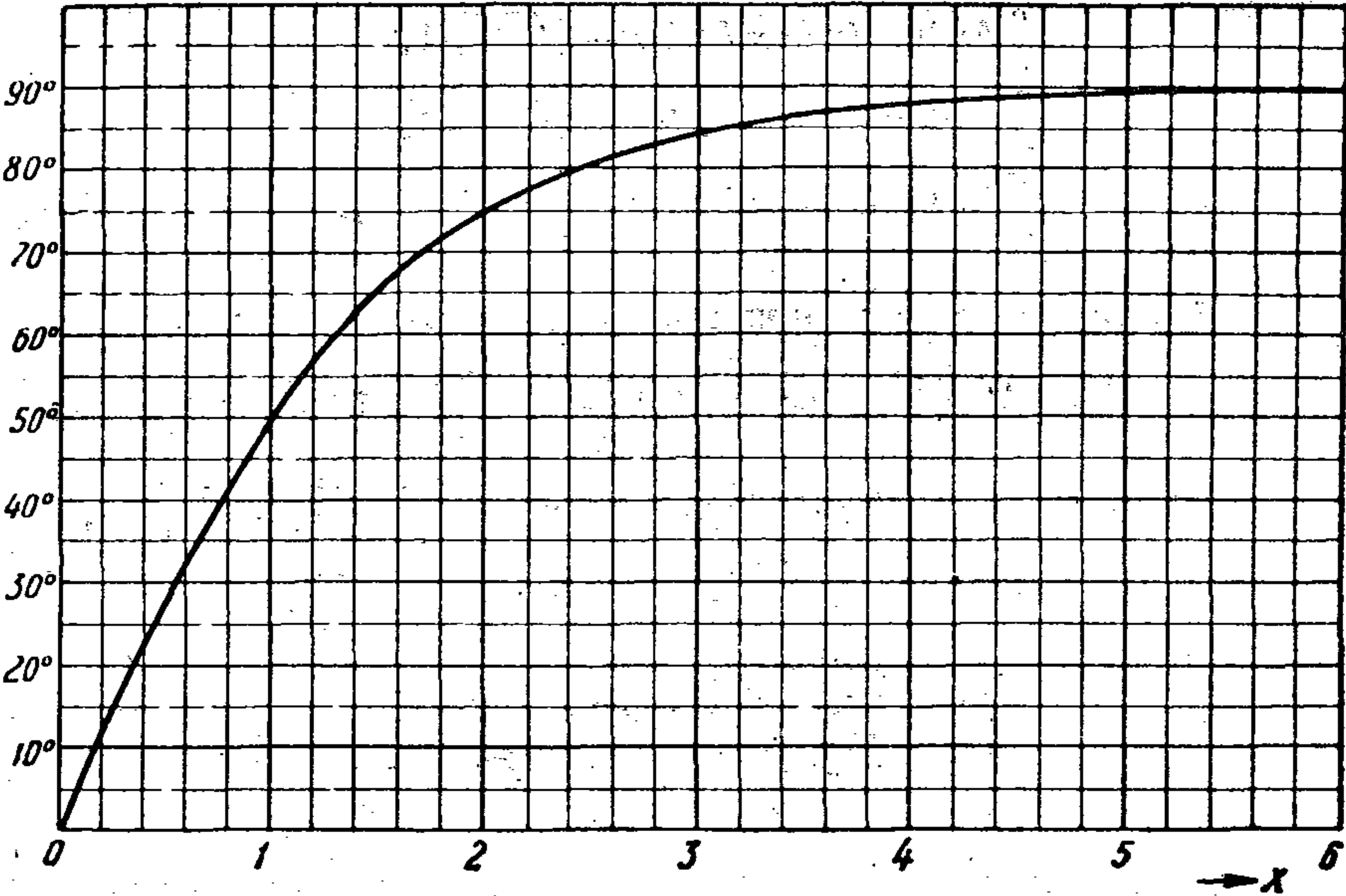


Рис. 8. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан) $\operatorname{amph} x = \operatorname{gd} x$.

Таблица 8. Показательные и гиперболические функции

x	$e^{\frac{\pi}{2} x}$	$e^{-\frac{\pi}{2} x}$	$\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x$	$\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x$	$\operatorname{th} \frac{\pi}{2} x$	$\operatorname{cth} \frac{\pi}{2} x$	$\frac{2}{\pi} \operatorname{amph} \frac{\pi}{2} x$
0,0	1,0000	1,0000	0,00000	1,0000	0,00000	∞	0,00000
0,1	1,1701	0,8546	0,15773	1,0124	0,15580	6,418	0,09959
0,2	1,3691	0,7304	0,3194	1,0498	0,3042	3,287	19679
0,3	1,6020	0,6242	0,4889	1,1131	0,4392	2,2763	2895
0,4	1,8745	0,5335	0,6705	1,2040	0,5569	1,7957	3760
0,5	2,1933	0,4559	0,8687	1,3246	0,6558	1,5249	4553
0,6	2,5663	0,3897	1,0883	1,4780	0,7364	1,3580	5269
0,7	3,003	0,3330	1,3349	1,6679	0,8003	1,2495	5907
0,8	3,514	0,2846	1,6145	1,8991	501	1,1763	6470
0,9	4,111	4324	1,9340	2,1772	883	1,1258	6898
1,0	4,811	0788	2,3013	2,5092	0,9172	1,0903	7390
1,1	5,629	0,17766	2,726	2,903	388	652	7761
1,2	6,586	5184	3,217	3,369	549	472	0,8081
1,3	7,706	2976	3,788	3,918	669	343	357
1,4	9,017	1090	4,453	4,564	757	249	594
1,5	10,551	0,09478	5,228	5,323	822	181	797
1,6	12,345	8100	6,132	6,213	870	132	971
1,7	14,445	6923	7,188	7,257	905	1,0096	0,9120
1,8	16,902	5916	8,421	8,481	930	70	248
1,9	19,777	5056	9,863	9,914	949	51	357
2,0	23,141	4321	11,549	11,592	963	37	450

13. Некоторые трансцендентные уравнения

а) $x \operatorname{th} x = 1$ или $\operatorname{cth} x = x$: $x = 1,199\,678 \dots$

б) а) $\operatorname{th} x = -\operatorname{ctg} x$, или $\cos(x\sqrt{2i}) = c\sqrt{i}$ (c —вещественное), или $\operatorname{tg} \xi = e^{-2x}$, где $x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi - \xi$, или $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = -1$, или *) $\operatorname{gd} 2x = (2n-1)\pi \pm 2x$, $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$x_0 = 0,93755, \quad x_1 = 2,3470, \quad x_2 = 5,4978, \dots$$

б) $\operatorname{th} x = -\operatorname{tg} x$, или $\sin(x\sqrt{2i}) = s\sqrt{-i}$ (s —действительное), или $\operatorname{tg} \xi = e^{-2x}$, где $x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi + \xi$, или $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = +1$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2,3650, \quad x_2 = 5,4978, \dots$$

с) $\operatorname{th} x = \operatorname{tg} x$, или $\sin(x\sqrt{2i}) = s\sqrt{i}$ (s —действительное), или $\operatorname{tg} \xi = e^{-2x}$, где $x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi - \xi$, или $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = +1$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 3,9266, \quad x_2 = 7,0686, \dots$$

д) $\operatorname{th} x = \operatorname{ctg} x$ или $\cos(x\sqrt{2i}) = c\sqrt{-i}$ (c —действительное), или $\operatorname{tg} \xi = e^{-2x}$, где $x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi + \xi$, или $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = -1$:

$$x_0 = 0,9375, \quad x_1 = 3,9274, \quad x_2 = 7,0686, \dots$$

е) Общее для этих четырех случаев уравнение:

$$\cos 2x \operatorname{ch} 2x = \pm 1;$$

его решения:

$$x_{n+1} = \left(n + 1 \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + (-1)^n \xi_n,$$

где

$$\xi_n = \frac{1}{a} \pm (-1)^n \frac{2}{a^2} + \frac{17}{3a^3} \pm (-1)^n \frac{56}{3a^4} + \dots, \quad a = e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}.$$

[Для вычисления величин $\left(n \pm \frac{1}{4}\right)\pi$ и $\frac{1}{a} = e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}$ может быть использована таблица 9.]

Таблица 9. Некоторые вспомогательные величины

n	$\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi$	$\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$	$\frac{1}{a}$
0	—	0,785 398	0,207 880
1	2,356 195	3,926 991	0,898 329 (—2)
2	5,497 787	7,068 584	0,388 203 (—3)
3	8,639 380	10,210 176	0,167 758 (—4)
4	11,780 973	13,351 769	0,724 947 (—6)

*) Исправления внесены по книге Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 196, стр. 46. — Прим. ред.

IV. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

$$z = x + iy = re^{i\varphi}$$

1. Синус, косинус

$$\sin z = se^{i\sigma} = u + iv \quad (\text{рис. 9, 10, 11; таблица 10}),$$

$$\cos z = ce^{i\gamma} = u_1 + iv_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right);$$

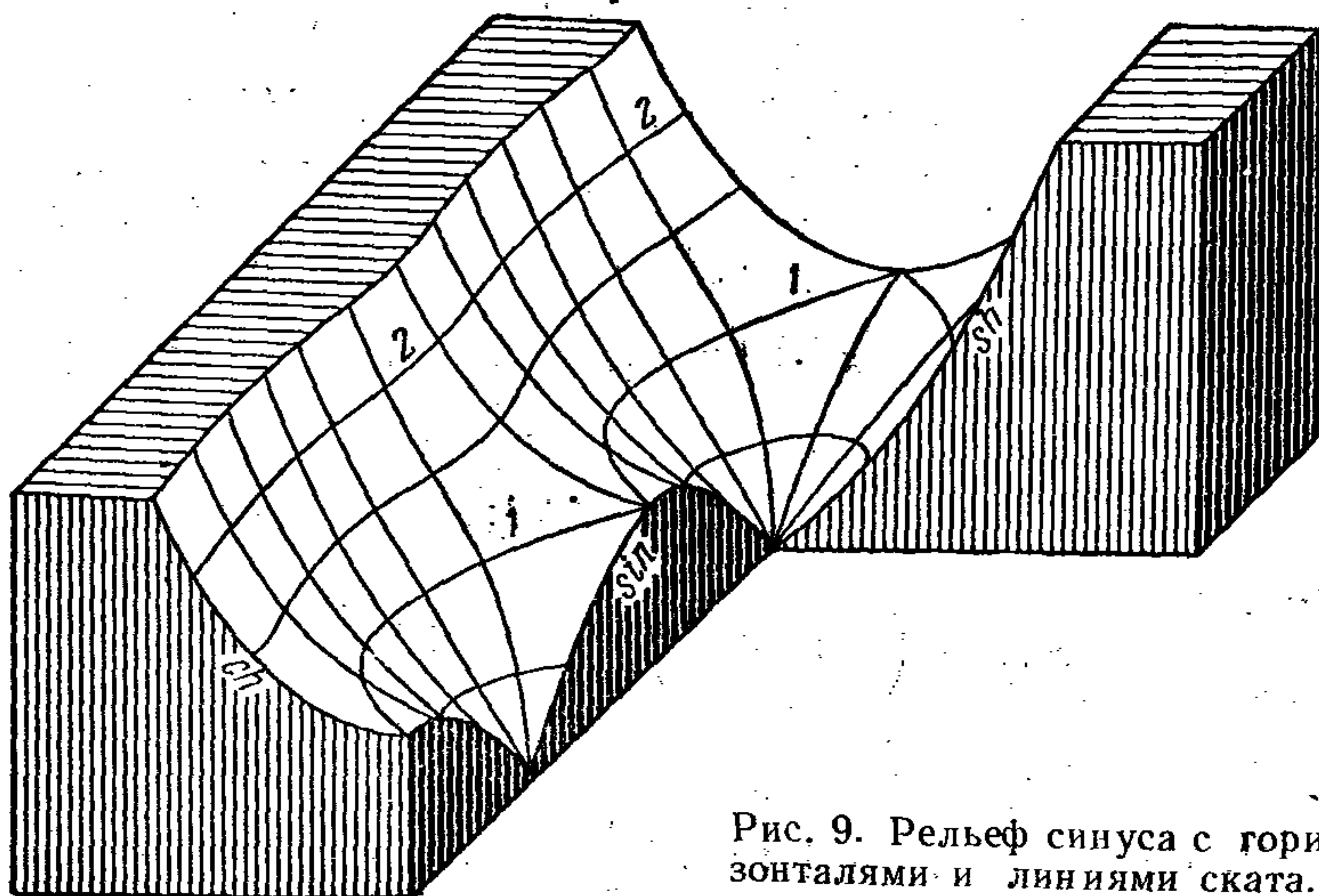


Рис. 9. Рельеф синуса с горизонталями и линиями ската.

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y, \quad u_1 = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v_1 = -\sin x \operatorname{sh} y;$$

$$s^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \quad c^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \quad 2s^2 = \operatorname{ch} 2y - \cos 2x, \quad 2c^2 = \operatorname{ch} 2y + \cos 2x,$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{ctg} x \operatorname{th} y, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} x \operatorname{th} y.$$

Для $r \ll 1$ имеем:

$$s = r - \frac{r^3}{6} \cos 2\varphi + \frac{r^5}{144} \left(1 + \frac{1}{5} \cos 4\varphi\right) - \dots, \quad \sigma = \varphi - \frac{r^2}{6} \sin 2\varphi - \frac{r^4}{180} \sin 4\varphi - \dots,$$

$$c = 1 - \frac{r^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{r^4}{16} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 4\varphi\right) - \dots, \quad \gamma = -\frac{r^2}{2} \sin 2\varphi - \frac{r^4}{12} \sin 4\varphi - \dots;$$

для $y \gg 1$

$$s = 0,5e^y - 0,5e^{-y} \cos 2x + 0,125e^{-3y} (1 - \cos 4x) - \dots,$$

$$\sigma = \pi/2 - x - e^{-2y} \sin 2x - 0,5e^{-4y} \sin 4x - \dots,$$

$$c = 0,5e^y + 0,5e^{-y} \cos 2x + 0,125e^{-3y} (1 - \cos 4x) + \dots,$$

$$\gamma = -x + e^{-2y} \sin 2x - 0,5e^{-4y} \sin 4x + \dots$$

Между s , σ , c и γ существуют соотношения

$$s^2 \cos 2\sigma + c^2 \cos 2\gamma = 1, \quad \operatorname{ctg} 2\sigma + \operatorname{ctg} (-2\gamma) = \frac{1}{s^2 \sin 2\sigma} = \frac{1}{c^2 \sin (-2\gamma)},$$

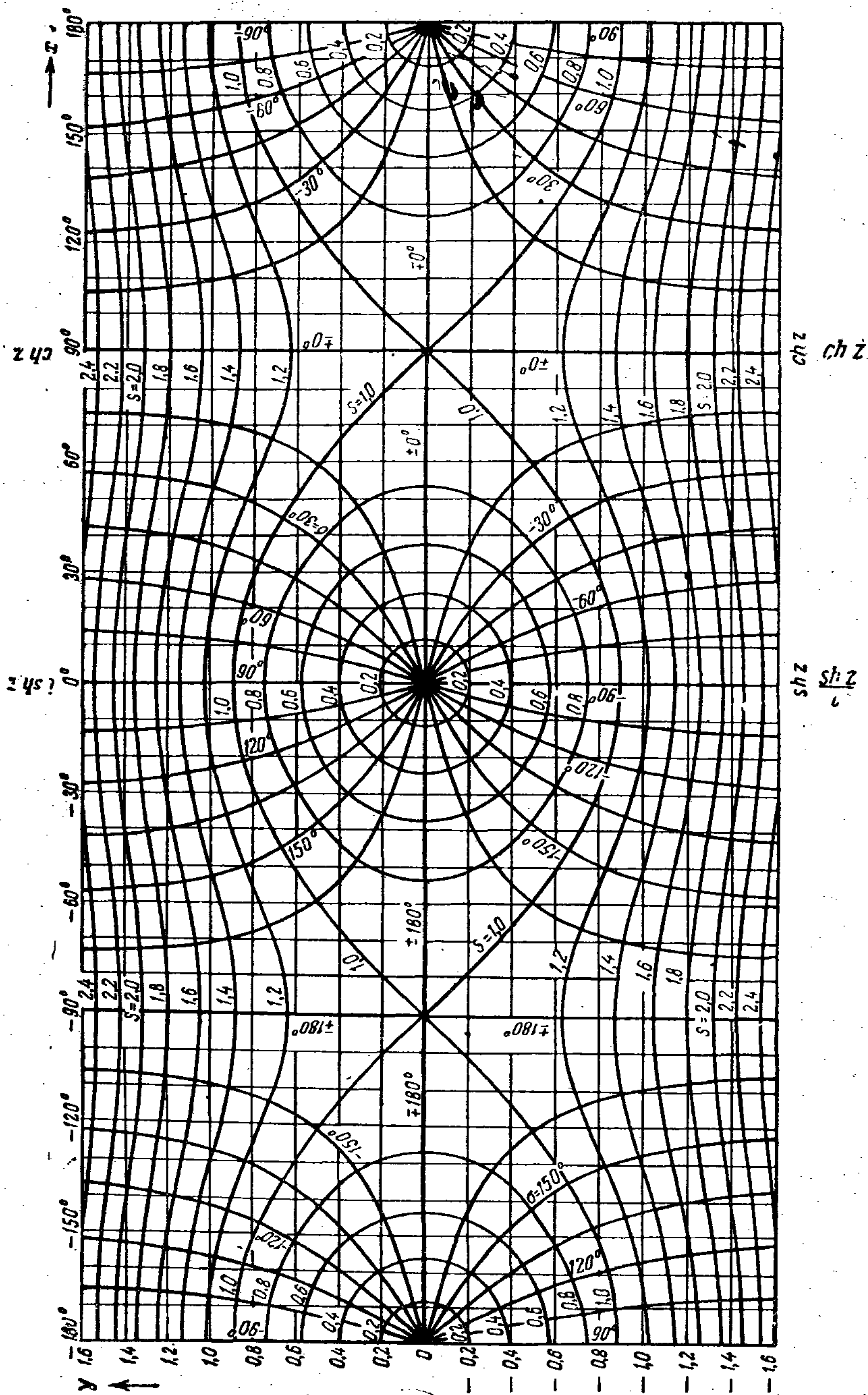


Рис. 10. Функция $\sin(x + iy) = se^i$. Карта горизонталей рельефа синуса. Если рассматривать карту с различных сторон, то получим функции $\sin z$, $\cos z$, $ch z$, $\pm i sh z$ в зависимости от выбора начала координат.

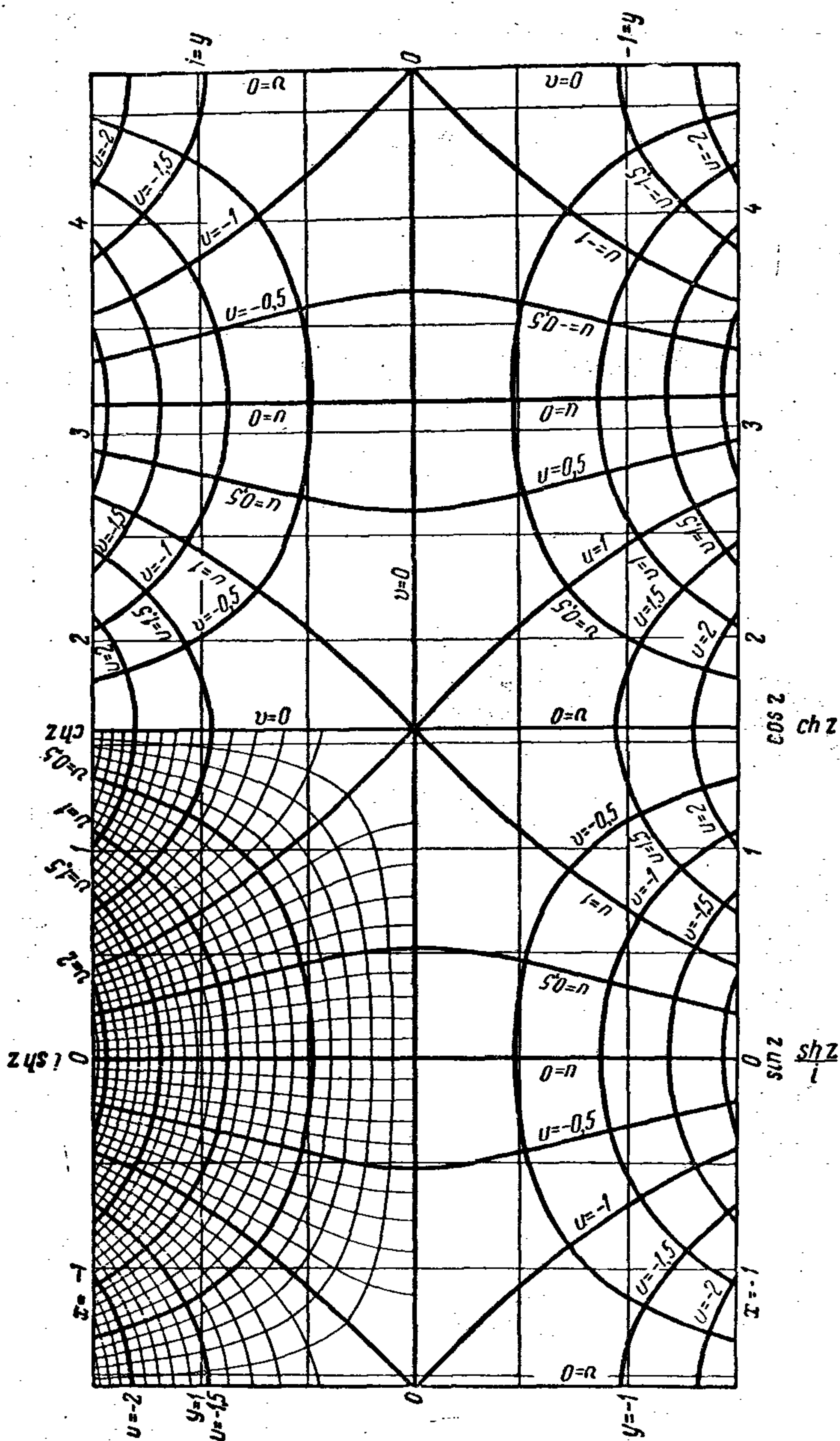


Рис. 11. Функция $\sin z = u + iv$. Кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в плоскости $z = x + iy$. Карта дает представление также о функциях $\cos z$, $\text{ch } z$, $\pm i \text{sh } z$.

Таблица 10. Функция $\sin(x + iy) = se^{i\sigma}$
 x в радианах

s	$\sigma=0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,2014	0,1941	0,1732	0,1405	0,0987	0,0508	0,0000
0,4	0,4115	0,3941	0,3457	0,2748	0,1901	0,0967	0,0000
0,6	0,6435	0,6059	0,5136	0,3957	0,2673	0,1345	0,0000
0,8	0,9273	0,8311	0,6656	0,4959	0,3286	0,1637	0,0000
1,0	1,5708	1,0371	0,7854	0,5719	0,3747	0,1857	0,0000
1,2	1,5708	1,1585	0,8667	0,6261	0,4084	0,2019	0,0000
1,4	1,5708	1,2149	0,9182	0,6640	0,4329	0,2139	0,0000
1,6	1,5708	1,2439	0,9511	0,6906	0,4509	0,2228	0,0000
1,8	1,5708	1,2608	0,9730	0,7097	0,4643	0,2297	0,0000
2,0	1,5708	1,2717	0,9881	0,7237	0,4745	0,2349	0,0000
2,2	1,5708	1,2792	0,9991	0,7342	0,4823	0,2390	0,0000

x в градусах

s	$\sigma=0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	11,54	11,12	9,92	8,05	5,65	2,91	0,00
0,4	23,58	22,58	19,81	15,75	10,89	5,54	0,00
0,6	36,87	34,71	29,43	22,67	15,31	7,70	0,00
0,8	53,13	47,62	38,14	28,41	18,83	9,38	0,00
1,0	90,00	59,42	45,00	32,76	21,47	10,64	0,00
1,2	90,00	66,37	49,66	35,87	23,40	11,57	0,00
1,4	90,00	69,61	52,61	38,05	24,80	12,25	0,00
1,6	90,00	71,27	54,49	39,57	25,84	12,77	0,00
1,8	90,00	72,24	55,75	40,66	26,60	13,16	0,00
2,0	90,00	72,86	56,62	41,46	27,18	13,46	0,00
2,2	90,00	73,29	57,24	42,07	27,63	13,70	0,00

y

s	$\sigma=0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,0000	0,0527	0,1013	0,1423	0,1732	0,1923	0,1987
0,4	0,0000	0,1119	0,2110	0,2898	0,3458	0,3790	0,3900
0,6	0,0000	0,1878	0,3380	0,4450	0,5156	0,5558	0,5688
0,8	0,0000	0,3026	0,4884	0,6055	0,6787	0,7195	0,7327
1,0	0,0000	0,4890	0,6585	0,7643	0,8314	0,8692	0,8814
1,2	0,6224	0,7130	0,8287	0,9143	0,9719	1,0051	1,0160
1,4	0,8670	0,9093	0,9853	1,0520	1,1000	1,1285	1,1380
1,6	1,0462	1,0721	1,1248	1,1767	1,2165	1,2408	1,2490
1,8	1,1929	1,2099	1,2485	1,2896	1,3226	1,3434	1,3504
2,0	1,3170	1,3293	1,3588	1,3920	1,4197	1,4375	1,4436
2,2	1,4254	1,4349	1,4583	1,4855	1,5090	1,5244	1,5297

2. Арксинус

$$\cos 2x = c^2 - s^2,$$

$$\operatorname{ch} 2y = c^2 + s^2,$$

$$2 \cos^2 x = c^2 + (1 + s)(1 - s), \quad 2 \operatorname{sh}^2 y = c^2 + (s + 1)(s - 1),$$

где

$$c^2 = \sqrt{1 - 2s^2 \cos 2\sigma + s^4}, \quad s^2 = \sqrt{1 - 2c^2 \cos 2\gamma + c^4},$$

$$c^2 = \sqrt{(s^2 - 1)^2 + (2s \sin \sigma)^2}, \quad s^2 = \sqrt{(c^2 - 1)^2 + (2c \sin \gamma)^2}.$$

При $s \ll 1$ имеем:

$$x = s \cos \sigma + \frac{s^3}{6} \cos 3\sigma + \frac{3s^5}{40} \cos 5\sigma + \frac{5s^7}{112} \cos 7\sigma + \dots,$$

$$y = s \sin \sigma + \frac{s^3}{6} \sin 3\sigma + \frac{3s^5}{40} \sin 5\sigma + \frac{5s^7}{112} \sin 7\sigma + \dots,$$

а при $s \gg 1$

$$x = \frac{\pi}{2} - \sigma - \frac{\sin 2\sigma}{(2s)^2} - \frac{3 \sin 4\sigma}{2 (2s)^4} - \frac{10 \sin 6\sigma}{3 (2s)^6} - \frac{35 \sin 8\sigma}{4 (2s)^8} - \dots,$$

$$y = \ln 2s - \frac{\cos 2\sigma}{(2s)^2} - \frac{3 \cos 4\sigma}{2 (2s)^4} - \frac{10 \cos 6\sigma}{3 (2s)^6} - \frac{35 \cos 8\sigma}{4 (2s)^8} - \dots$$

Если $|s-1| \ll 1$ и $\sigma \ll 0,5$, то сначала подсчитывается

$$\frac{c^2}{2} = \sqrt{\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 (s-1)^2 + (s \sin \sigma)^2} \approx \sqrt{(s-1)^2 + \sin^2 \sigma},$$

и тогда

$$\cos x = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1+s}{2}(1-s)} \approx \sqrt{\frac{c^2}{2} + 1-s},$$

$$\operatorname{sh} y = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{s+1}{2}(s-1)} \approx \sqrt{\frac{c^2}{2} + s-1}.$$

3. Тангенс

$\operatorname{tg} z = te^{i\tau} = U + iV$ (рис. 12, 13, 14; таблица 11), $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{t} e^{-i\tau} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$,

$$U = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y},$$

$$V = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y},$$

$$t^2 = \frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x},$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2x}.$$

Для $x = 45^\circ$ получим $t = 1$,
 $\tau = \operatorname{amph} 2y$,

$$U = \cos \tau = \frac{1}{\operatorname{ch} 2y},$$

$$V = \sin \tau = \operatorname{th} 2y,$$

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{sh} 2y.$$

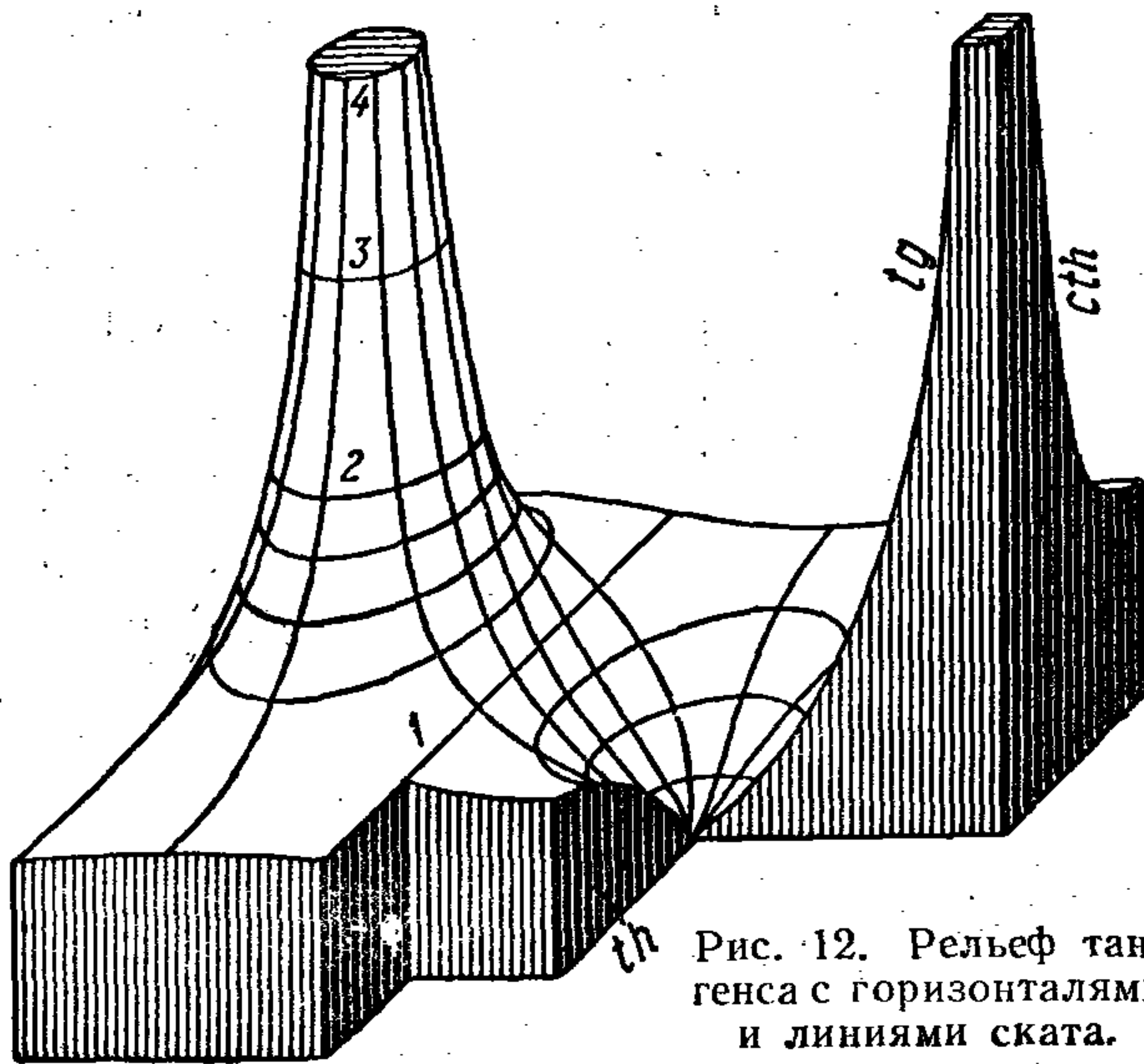


Рис. 12. Рельеф тангенса с горизонталями и линиями ската.

Если $r \ll 1$, то имеем:

$$t = r + \frac{r^3}{3} \cos 2\varrho + \frac{r^5}{36} \left(1 + \frac{19}{4} \cos 4\varrho\right) + \dots,$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{r} - \frac{r}{3} \cos 2\varrho + \frac{r^3}{36} \left(1 - \frac{9}{5} \cos 4\varrho\right) - \dots, \quad \tau = \varrho + \frac{r^2}{3} \sin 2\varrho + \frac{7r^4}{90} \sin 4\varrho + \dots$$

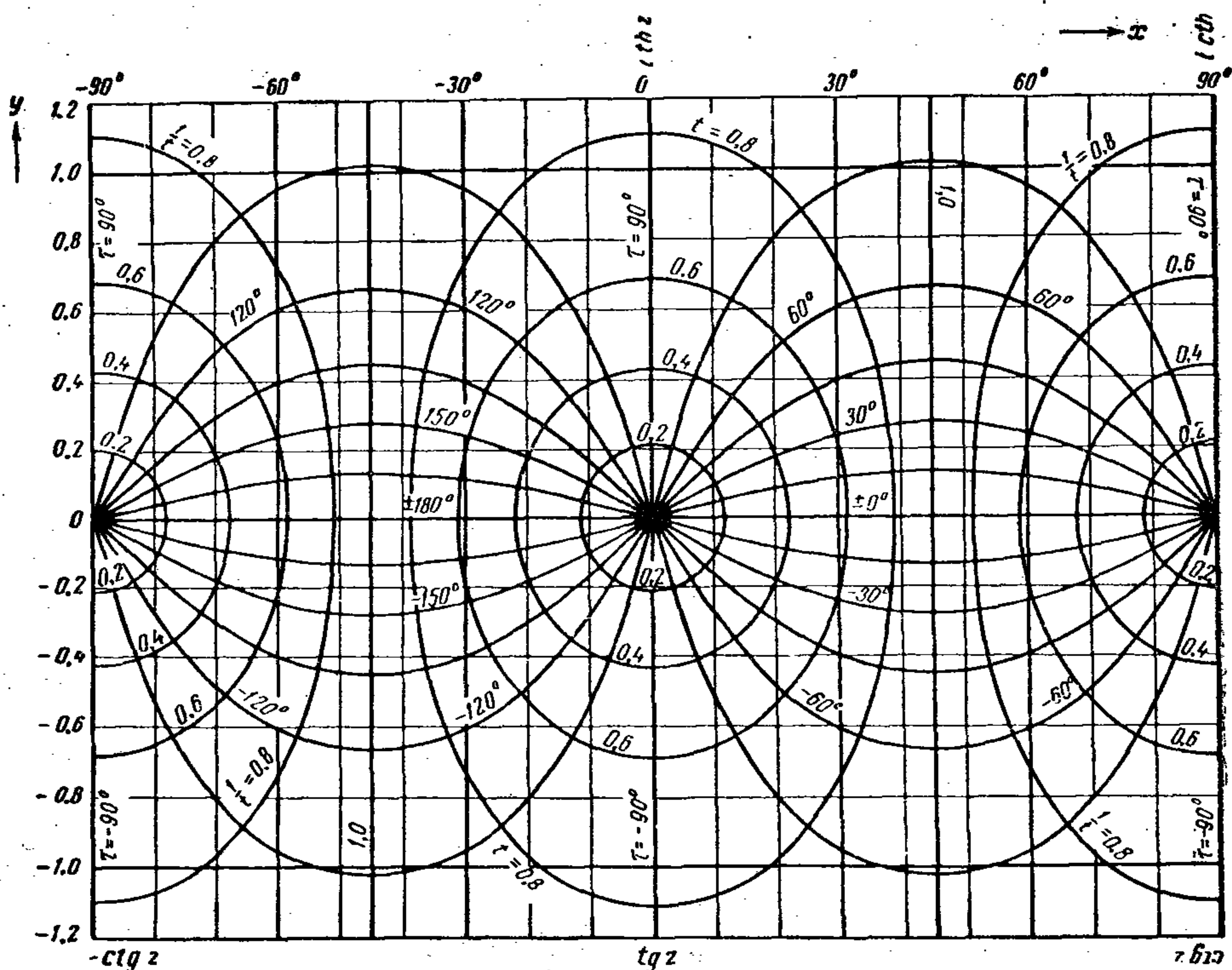


Рис. 13. Функция $\operatorname{tg}(x+iy) = te^{i\tau}$. Карта горизонталей рельефа тангенса. Если рассматривать карту с различных сторон, то получим функции $\operatorname{tg} z$, $-\operatorname{ctg} z$, $i \operatorname{th} z$, $i \operatorname{cth} z$, $\operatorname{ctg} z$ в зависимости от выбора начала координат.

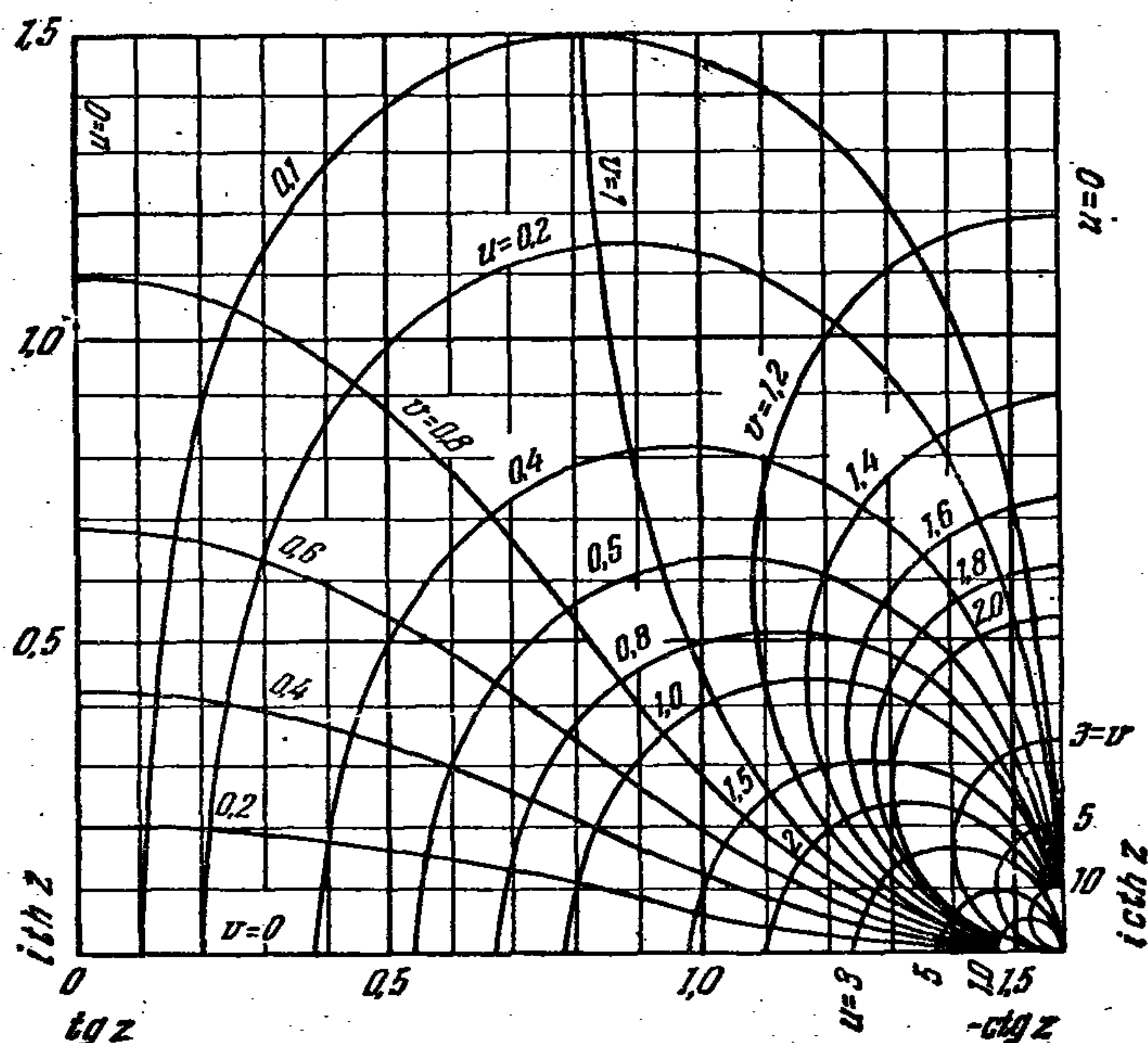


Рис. 14. Функция $\operatorname{tg} z = u + iv$. Кривые $u = \operatorname{const}$ и $v = \operatorname{const}$ в плоскости $z = x + iy$. Карта дает представление также о функциях $-\operatorname{ctg} z$, $i \operatorname{th} z$, $i \operatorname{cth} z$.

Если $y \gg 1$, то имеем:

$$U = 2e^{-2y} \sin 2x - 2e^{-4y} \sin 4x + \dots,$$
$$V = 1 - 2e^{-2y} \cos 2x + 2e^{-4y} \cos 4x - \dots,$$
$$t = 1 - 2e^{-2y} \cos 2x + e^{-4y} (1 + \cos 4x) - \dots,$$
$$\operatorname{ctg} \tau = 2e^{-2y} \sin 2x (1 + e^{-4y} + \dots);$$

затем при $p = \frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}$

$$t = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} = 1 - p + \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{2} + \frac{3p^4}{8} - \dots$$

и при $q = \frac{\sin 2x}{\operatorname{sh} 2y} = \operatorname{ctg} \tau$

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} q = \frac{\pi}{2} - q + \frac{q^3}{3} - \frac{q^5}{5} + \dots$$

Таблица 11. Функция $\operatorname{tg}(x + iy) = te^{i\tau}$
 y

t	$\tau=0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,0000	0,0499	0,0974	0,1395	0,1732	0,1951	0,2027
0,4	0,0000	0,0902	0,1798	0,2665	0,3444	0,4019	0,4237
0,6	0,0000	0,1162	0,2368	0,3657	0,5030	0,6322	0,6931
0,8	0,0000	0,1290	0,2666	0,4239	0,6190	0,8794	1,0987
1,0	0,0000	0,1324	0,2747	0,4407	0,6585	1,0137	∞

x в радианах

t	$\tau=0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,1974	0,1913	0,1732	0,1433	0,1027	0,0537	0,0000
0,4	0,3805	0,3719	0,3448	0,2963	0,2222	0,1208	0,0000
0,6	0,5404	0,5332	0,5094	0,4623	0,3766	0,2259	0,0000
0,8	0,6747	0,6710	0,6583	0,6314	0,5740	0,4276	0,0000
1,0	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	x

x в градусах

t	$\tau=0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	11,31	10,96	9,92	8,21	5,88	3,08	0,00
0,4	21,80	21,31	19,76	16,98	12,73	6,92	0,00
0,6	30,96	30,55	29,19	26,49	21,58	12,94	0,00
0,8	38,66	38,44	37,72	36,17	32,89	24,50	0,00
1,0	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	x

$1/y$

t	$\tau=75^\circ$	80°	85°	90°	t	$\tau=75^\circ$	80°	85°	90°
0,80	1,1371	1,0225	0,9409	0,9102	0,96	0,9922	0,8300	0,6595	0,5139
0,82	1,1087	0,9879	0,8991	0,8644	0,98	0,9878	0,8232	0,6441	0,4352
0,84	1,0830	0,9557	0,8584	0,8189	0,990	0,9867	0,8215	0,6401	0,3778
0,86	1,0603	0,9262	0,8191	0,7732	0,999	0,9864	0,8209	0,6387	0,2631
0,88	1,0405	0,8997	0,7814	0,7269	$1-10^{-6}$	0,9864	0,8209	0,6387	0,1378
0,90	1,0238	0,8765	0,7455	0,6792	$1-10^{-9}$	0,9864	0,8209	0,6387	0,0934
0,92	1,0102	0,8569	0,7124	0,6293	1,00	0,9864	0,8209	0,6387	0,0000
0,94	0,9996	0,8413	0,6831	0,5754					

Продолжение табл. 11
x в градусах

x в радианах					x в градусах				
t	τ=75°	80°	85°	90°	t	τ=75°	80°	85°	90°
0,80	0,4276	0,3986	0,1848	0,0000	0,80	24,50	18,83	10,59	0,00
0,82	0,4567	0,3578	0,2057	0,0000	0,82	26,17	20,50	11,79	0,00
0,84	0,4871	0,3904	0,2308	0,0000	0,84	27,95	22,37	13,22	0,00
0,86	0,5208	0,4269	0,2612	0,0000	0,86	29,84	24,46	14,96	0,00
0,88	0,5555	0,4475	0,2986	0,0000	0,88	31,83	26,78	17,11	0,00
0,90	0,5 18	0,5123	0,3451	0,0000	0,90	33,91	29,35	19,77	0,00
0,92	0,6294	0,5613	0,4035	0,0000	0,92	36,06	32,16	23,12	0,00
0,94	0,6680	0,6141	0,4766	0,0000	0,94	38,27	35,19	27,30	0,00
0,96	0,7072	0,6699	0,5663	0,0000	0,96	40,52	38,38	32,45	0,00
0,98	0,7464	0,7275	0,6715	0,0000	0,98	42,77	41,68	38,47	0,00
0,990	0,7660	0,7565	0,7280	0,0000	0,990	43,89	43,34	41,71	0,00
0,999	0,7835	0,7825	0,7797	0,0000	0,999	44,89	44,83	44,67	0,00
1—10 ⁻⁶	0,7854	0,7854	0,7854	0,0000	1—10 ⁻⁶	45,00	45,00	45,00	0,00
1—10 ⁻⁹	0,7854	0,7854	0,7854	0,0000	1—10 ⁻⁹	45,00	45,00	45,00	0,00
1,00	0,7854	0,7854	0,7854	x	1,00	45,00	45,00	45,00	x

4. Арктангенс

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cos \tau}{\frac{1}{t} - t} = \frac{2U}{1 - U^2 - V^2} = -\frac{\cos \tau}{\operatorname{sh} \vartheta}, \quad \operatorname{th} 2y = \frac{2 \sin \tau}{\frac{1}{t} + t} = \frac{2V}{1 + U^2 + V^2} = \frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \vartheta},$$

где $\vartheta = \ln t$; следовательно, $\ln \operatorname{tg} z = \vartheta + i\tau$.

Положив

$$N^2 = \operatorname{sh}^2 \vartheta + \cos^2 \tau = \operatorname{ch}^2 \vartheta - \sin^2 \tau, \quad 2N^2 = \operatorname{ch} 2\vartheta + \cos 2\tau,$$

получим:

$$\begin{aligned} N \sin 2x &= \cos \tau, & N \cos 2x &= -\operatorname{sh} \vartheta, \\ N \operatorname{sh} 2y &= \sin \tau, & N \operatorname{ch} 2y &= \operatorname{ch} \vartheta. \end{aligned}$$

Для $t=1$ и $-90^\circ < \tau < 90^\circ$ получим:

$$x = 45^\circ, \quad \operatorname{th} y = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}.$$

Для $\tau = 90^\circ$ имеем соответственно:

$$\begin{aligned} t < 1, & \quad t = 1, & \quad t > 1 \\ x = 0, & \quad x \text{ произвольно}, & \quad x = \pm 90^\circ, \\ y = \operatorname{Arth} t, & \quad y = \infty, & \quad y = \operatorname{Arcth} t. \end{aligned}$$

Если $t \ll 1$, то

$$x = t \cos \tau - \frac{t^3}{3} \cos 3\tau + \frac{t^5}{5} \cos 5\tau - \dots, \quad y = t \sin \tau - \frac{t^3}{3} \sin 3\tau + \frac{t^5}{5} \sin 5\tau - \dots,$$

а при $t \gg 1$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos \tau}{t} + \frac{\cos 3\tau}{3t^3} - \frac{\cos 5\tau}{5t^5} + \dots, \quad y = \frac{\sin \tau}{t} - \frac{\sin 3\tau}{3t^3} + \frac{\sin 5\tau}{5t^5} - \dots$$

Пусть t стремится к 1 и τ стремится к прямому углу; положим:

$$-\operatorname{sh} \vartheta = T = \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1-\frac{1-t}{2}}{\frac{1}{1-t}-1}, \quad T^2 + \cos^2 \tau = N^2.$$

Тогда имеем:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\cos \tau}{T} = \frac{\cos \tau}{1-t} - \frac{\cos \tau}{2} - \frac{1-t}{4} \frac{\cos \tau}{1-\frac{1-t}{2}}, \quad \operatorname{sh} 2y = \frac{\sin \tau}{N},$$

$$\operatorname{ch} 4y = \frac{2+T^2-\cos^2 \tau}{N^2}, \quad y \approx \frac{1}{4} \ln \frac{4}{N^2} + \frac{T^2-\cos^2 \tau}{8} - \frac{3T^4+3\cos^4 \tau-2T^2\cos^2 \tau}{64}.$$

5. Переход от одной функции к другой

	$\sin z =$	$\cos z =$	$i \operatorname{sh} z =$	$\operatorname{ch} z =$
$= \sin$	$\pi - z$	$\frac{\pi}{2} \pm z$	$\frac{iz}{\pi - iz}$	$\frac{\pi}{2} \pm iz$
$= \cos$	$\pm \left(z - \frac{\pi}{2} \right)$	$-z$	$\pm \left(iz - \frac{\pi}{2} \right)$	$\pm iz$
$= i \operatorname{sh}$	$\frac{-iz}{i(z \pm \pi)}$	$i \left(\pm z - \frac{\pi}{2} \right)$	$i\pi - z$	$\pm z - i \frac{\pi}{2}$
$= \operatorname{ch}$	$\pm i \left(z - \frac{\pi}{2} \right)$	$\pm iz$	$\pm \left(z + i \frac{\pi}{2} \right)$	$-z$

	$\operatorname{tg} z =$	$\operatorname{ctg} z =$	$i \operatorname{th} z =$	$i \operatorname{cth} z =$
$= \operatorname{tg}$	z	$-z \pm \frac{\pi}{2}$	iz	$iz \pm \frac{\pi}{2}$
$= \operatorname{ctg}$	$-z \pm \frac{\pi}{2}$	z	$-iz \pm \frac{\pi}{2}$	$-iz$
$= i \operatorname{th}$	$-iz$	$i \left(z \pm \frac{\pi}{2} \right)$	z	$z \pm i \frac{\pi}{2}$
$= i \operatorname{cth}$	$i \left(-z \pm \frac{\pi}{2} \right)$	iz	$z \pm i \frac{\pi}{2}$	z

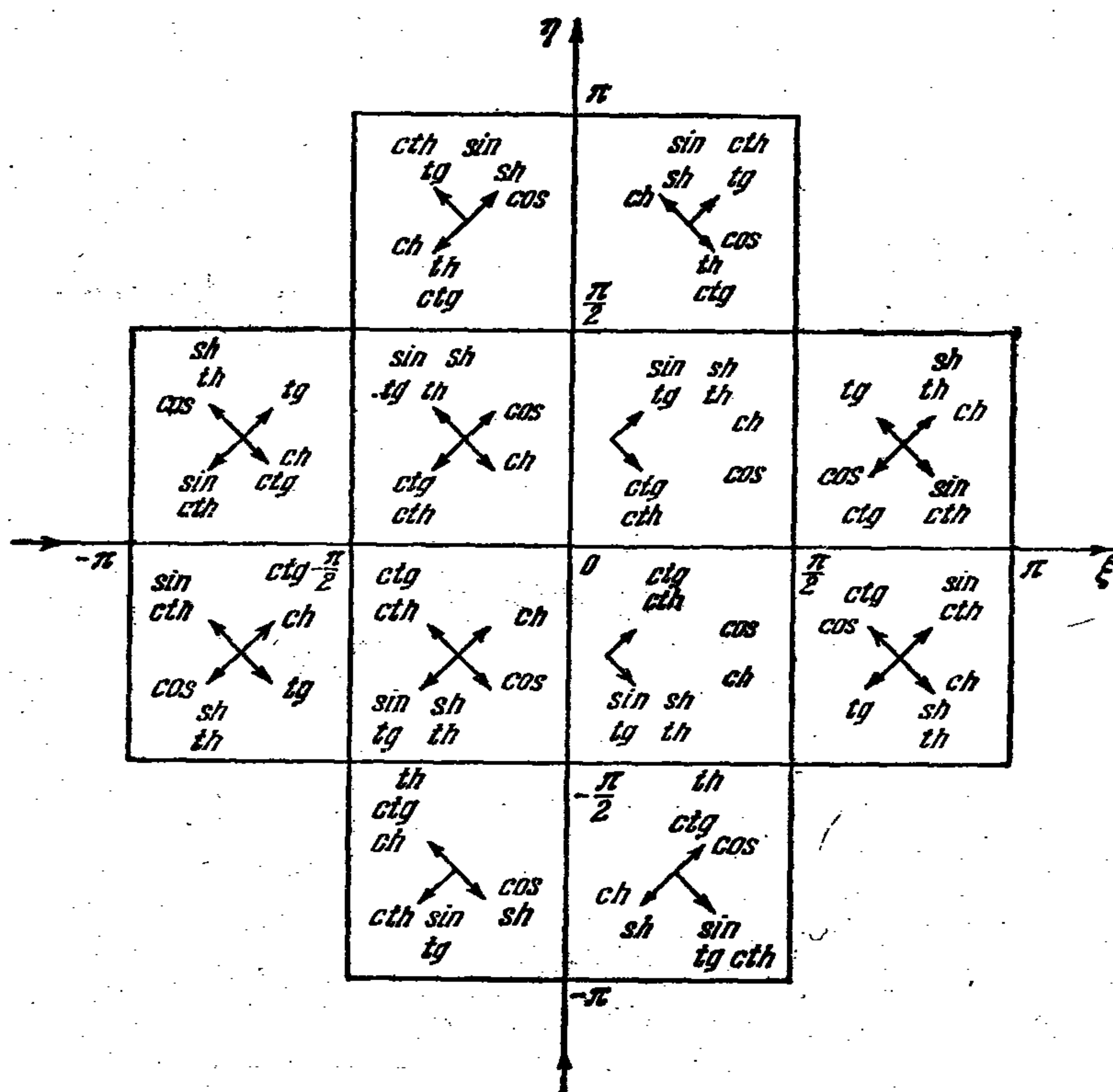
	$\arcsin z =$	$\arccos z =$ $i \operatorname{Arch} z =$	$i \operatorname{Arsh} z =$
$= \arcsin$	z	$\sqrt{1 - z^2}$	iz
$= \arccos$ $= i \operatorname{Arch}$	$\sqrt{1 - z^2}$	z	$\sqrt{1 + z^2}$
$= i \operatorname{Arsh}$	$-iz$	$-\sqrt{z^2 - 1}$	z

	$\operatorname{arctg} z =$	$i \operatorname{arctg} z =$	$i \operatorname{Arth} z =$	$i \operatorname{Arcth} z =$
$= \operatorname{arctg}$	z	$\frac{1}{z}$	iz	$\frac{i}{z}$
$= \operatorname{arctg}$	$\frac{1}{z}$	z	$\frac{1}{iz}$	$-iz$
$= i \operatorname{Arth}$	$-iz$	$\frac{1}{iz}$	z	$\frac{1}{z}$
$= i \operatorname{Arcth}$	$\frac{i}{z}$	iz	$\frac{1}{z}$	z

6. Знак действительной и мнимой части функции

Аргумент	sin	th	cth	ctg	tg	sh	ch	cos	Объяснение
┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	Изменение знака у мнимой части
└	└	└	└	└	└	└	└	└	Изменение знака у действительной части
$90^\circ - x$		Р	Р	Р	Р				Переход к углу, дополнительному до прямого
$180^\circ - x$	┌	┌	┌	└	└	└	└	└	Переход к углу, дополнительному до двух прямых

Символ Р означает, что модуль функции переходит в обратную величину. Поворот горизонтальной стороны прямого угла $\perp$ означает перемену знака



Гис. 15. Знаки действительной и мнимой частей тригонометрических и гиперболических функций от $\xi + i\eta$.

у действительной части; поворот вертикальной стороны означает перемену знака мнимой части.

В схеме, изображенной на рис. 15, символ $\nearrow$ обозначает первую четверть, $\nwarrow$ — вторую, $\swarrow$ — третью и $\searrow$ — четвертую. [Эта схема позволяет сразу определять, в каком квадранте комплексной плоскости значений лежат точки, соответствующие $\sin \zeta$, $\cos \zeta$ и т. д., $\zeta = \xi + i\eta$, т. е. находить знаки действительной и мнимой частей этих функций.]

Пример. Для аргумента $\zeta = \xi + i\eta$, где ξ заключено между 0 и $\frac{\pi}{2}$, а η — между $\frac{\pi}{2}$ и π , имеем схему в правом верхнем квадрате на рис. 15, из которой следует: значения $\sin \zeta$, $\operatorname{tg} \zeta$ и $\operatorname{cth} \zeta$ лежат в первой четверти (т. е. их действительные и мнимые части положительны), $\operatorname{sh} \zeta$ и $\operatorname{ch} \zeta$ — во второй (действительные части отрицательны, а мнимые положительны), $\cos \zeta$, $\operatorname{ctg} \zeta$ и $\operatorname{th} \zeta$ — в четвертой (действительные части положительны, а мнимые отрицательны).

7. Приведение к положительным острым углам

(Прежде всего надо найти приближенные значения по рис. 10 или 13.)

[Помещенные ниже схемы позволяют решать для функций синус и тангенс следующие основные задачи:

- а) Дан комплексный аргумент; определяется функция.
 б) Дана функция; определяется комплексный аргумент.]

а)

$se^{i\varphi} = \sin$ $x' + iy$		sh $y + ix'$	sh $-y + ix'$
x'	φ	φ	φ
$-(180^\circ - x)$	$-(180^\circ - \sigma)$	$-(90^\circ + \sigma)$	$-(90^\circ - \sigma)$
$-x$	$180^\circ - \sigma$	$-(90^\circ - \sigma)$	$-(90^\circ + \sigma)$
x	σ	$90^\circ - \sigma$	$90^\circ + \sigma$
$180^\circ - x$	$-\sigma$	$90^\circ + \sigma$	$90^\circ - \sigma$
$se^{i\varphi} = \sin$ $x' - iy$		sh $y - ix'$	sh $-y - ix'$

$$\sin(x + iy) = se^{\sigma},$$

$$0 < \frac{x}{\sigma} < 90^\circ,$$

$$0 < \frac{y}{s} < \infty.$$

(См. таблицу 10)

а)

$se^{i\varphi} = \cos(x' + iy)$ $= \operatorname{ch}(-y + ix')$	
x'	φ
$-(90^\circ + x)$	$180^\circ - \sigma$
$-(90^\circ - x)$	σ
$90^\circ - x$	$-\sigma$
$90^\circ + x$	$-(180^\circ - \sigma)$
$se^{i\varphi} = \cos(x' - iy)$ $= \operatorname{ch}(y + ix')$	

б)

	sh
$se^{i\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)}$	$y + ix$ $-y + i(\pi - x)$
$se^{i\left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right)}$	$-y + ix$ $y + i(\pi - x)$

б)

	$\sin$	$\cos$	ch
$se^{i\sigma}$	$x + iy$ $(\pi - x) - iy$	$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - iy$ $-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + iy$	$y + i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $-y - i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$se^{i(\pi - \sigma)}$	$-x + iy$ $-(\pi - x) - iy$	$\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - iy$ $-\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + iy$	$y + i\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ $-y - i\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

a)

$t^{-n}e^{i\varphi} = \operatorname{ctg} \frac{x' - iy}{y - ix'}$			$\operatorname{ctg} \frac{y - ix'}{y + ix'}$	$\operatorname{cth} \frac{-y - ix'}{-y + ix'}$
$t^n e^{i\varphi} = \operatorname{tg} \frac{x' + iy}{y + ix'}$			$\operatorname{th} \frac{y + ix'}{y - ix'}$	$\operatorname{th} \frac{-y + ix'}{-y - ix'}$
x'	n	φ	φ	φ
$\frac{90^\circ + x}{-(90^\circ - x)}$	-1	$\left. \begin{array}{c} \\ \end{array} \right\} 180^\circ - \tau$	$-(90^\circ - \tau)$	$-(90^\circ + \tau)$
$\frac{180^\circ - x}{-x}$	$+1$			
$\frac{x}{-(180^\circ - x)}$	$+1$	$\left. \begin{array}{c} \\ \end{array} \right\} \tau$	$90^\circ - \tau$	$90^\circ + \tau$
$\frac{90^\circ - x}{-(90^\circ + x)}$	-1			
$t^{-n}e^{-i\varphi} = \operatorname{ctg} \frac{x' + iy}{y + ix'}$			$\operatorname{cth} \frac{y + ix'}{y - ix'}$	$\operatorname{cth} \frac{-y + ix'}{-y - ix'}$
$t^n e^{-i\varphi} = \operatorname{tg} \frac{x' - iy}{y - ix'}$			$\operatorname{th} \frac{y - ix'}{y + ix'}$	$\operatorname{th} \frac{-y - ix'}{-y + ix'}$

$$\operatorname{tg}(x + iy) = te^{ix},$$

$$0 < x < 45^\circ,$$

$$0 < y < \infty,$$

$$0 < t < 1,$$

$$0 < \tau < 90^\circ$$

(См. таблицу 11)

b)

	tg	ctg		th	cth
$te^{i\tau}$	$x + iy$	$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - iy$	$te^{i\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)}$	$y + ix$	$y - i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$te^{i(\pi - \tau)}$	$-x + iy$	$-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - iy$	$te^{i\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)}$	$-y + ix$	$-y - i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\frac{1}{t}e^{i\tau}$	$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + iy$	$x - iy$	$\frac{1}{t}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)}$	$y +$ $+i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $-y +$	$y - ix$
$\frac{1}{t}e^{i(\pi - \tau)}$	$-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + iy$	$-x + iy$	$\frac{1}{t}e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)}$	$+i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$-y - ix$

8. Поведение функций в комплексной плоскости

[Схемы, приведенные на рис. 16 и 17, описывают поведение тригонометрических функций комплексного аргумента при его постоянной мнимой части и гиперболических функций—при постоянной действительной части аргумента.]

Рис. 16. Поведение тригонометрических функций от $x - \frac{\pi}{2} + iy$ в четырех квадрантах или октантах при постоянном y .

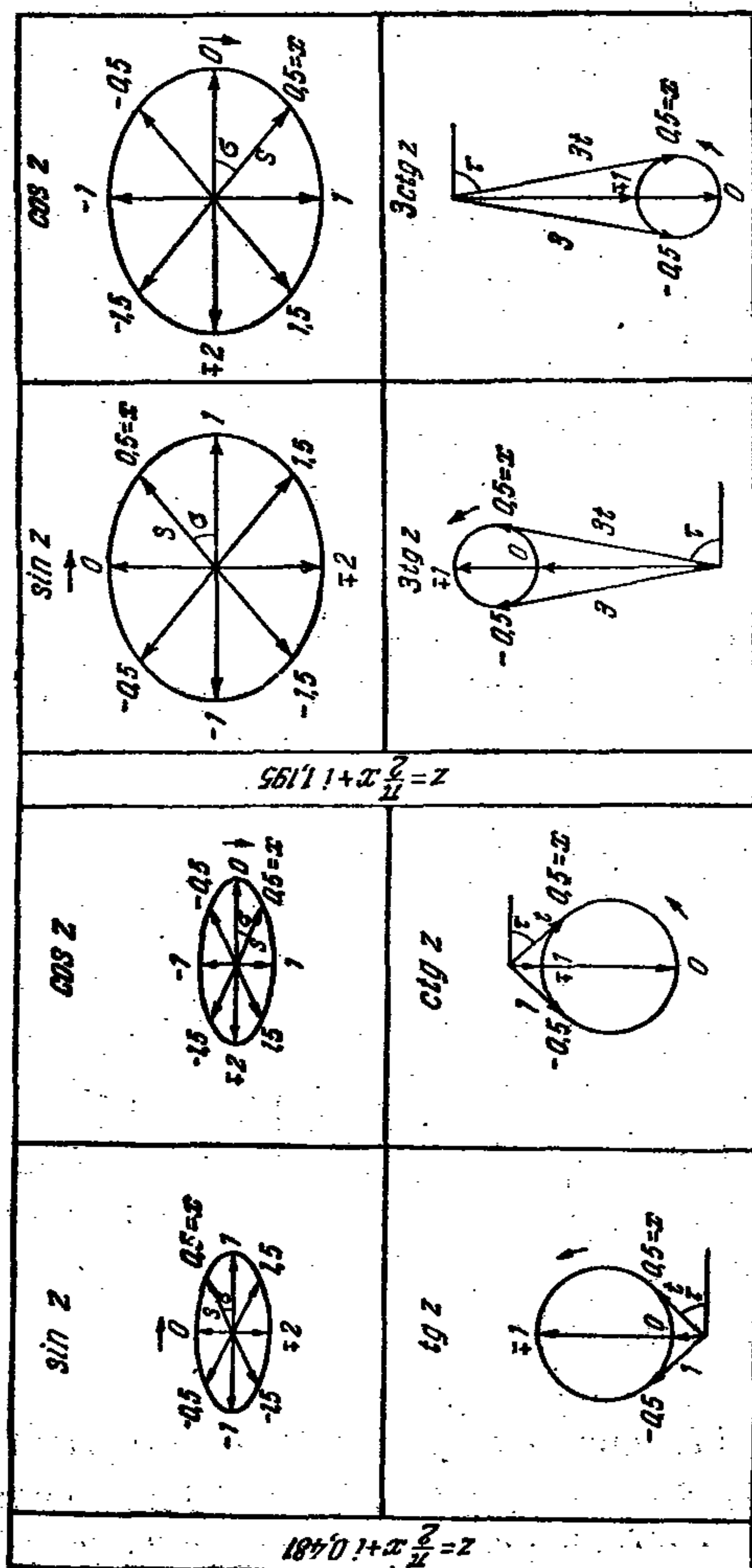
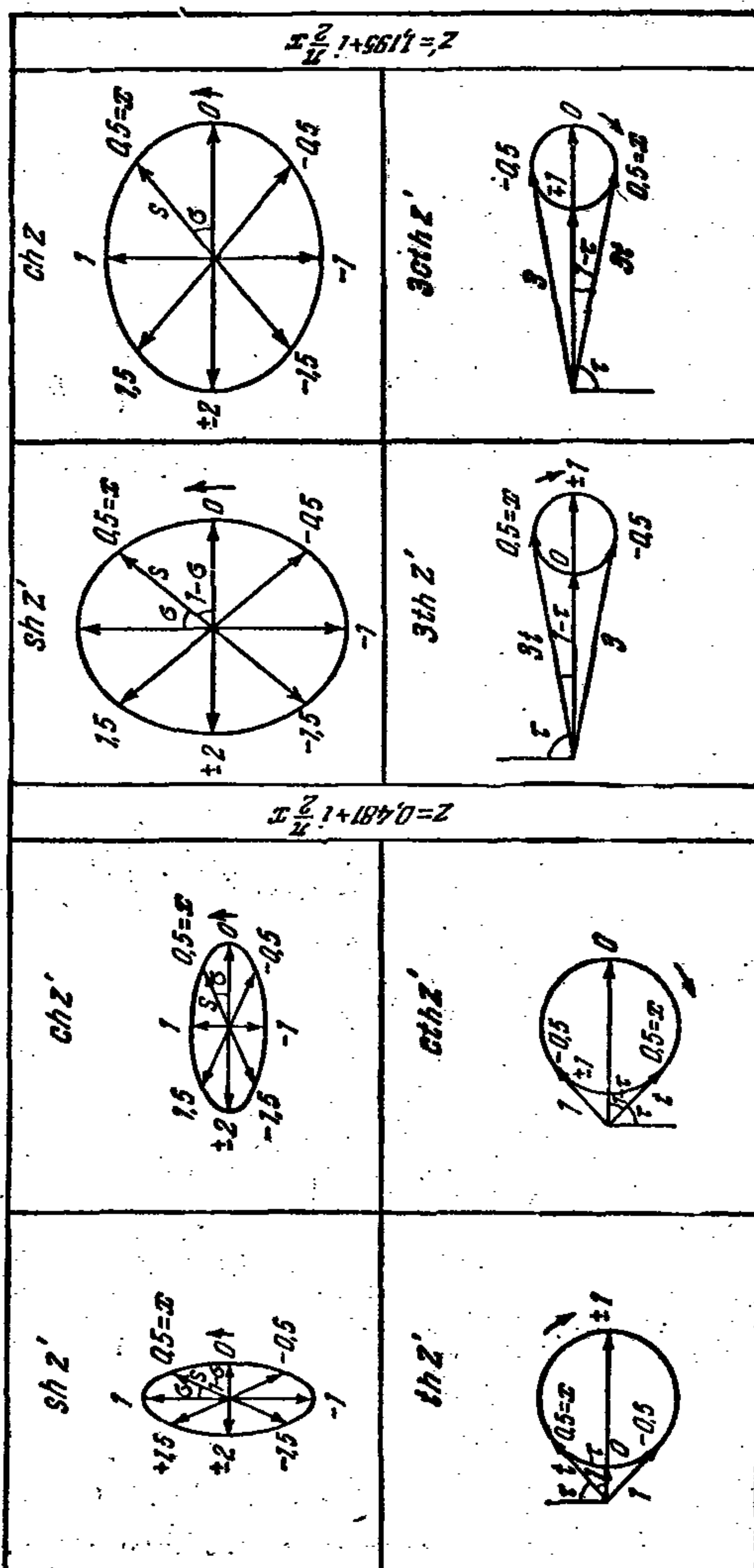


Рис. 17. Поведение гиперболических функций от $y + ix - \frac{\pi}{2}$ в четырех квадрантах или октантах при постоянном y .



V. ГАММА-ФУНКЦИИ

Определения и обозначения

Гамма-функция $\Gamma(z)$ определяется как решение функционального уравнения

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z), \quad \text{где } \Gamma(1) = 1.$$

Она является мероморфной функцией от $z = x + iy$ с простыми полюсами в точках $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Из всех аналитических решений этого уравнения она выделяется тем, что для действительных положительных значений

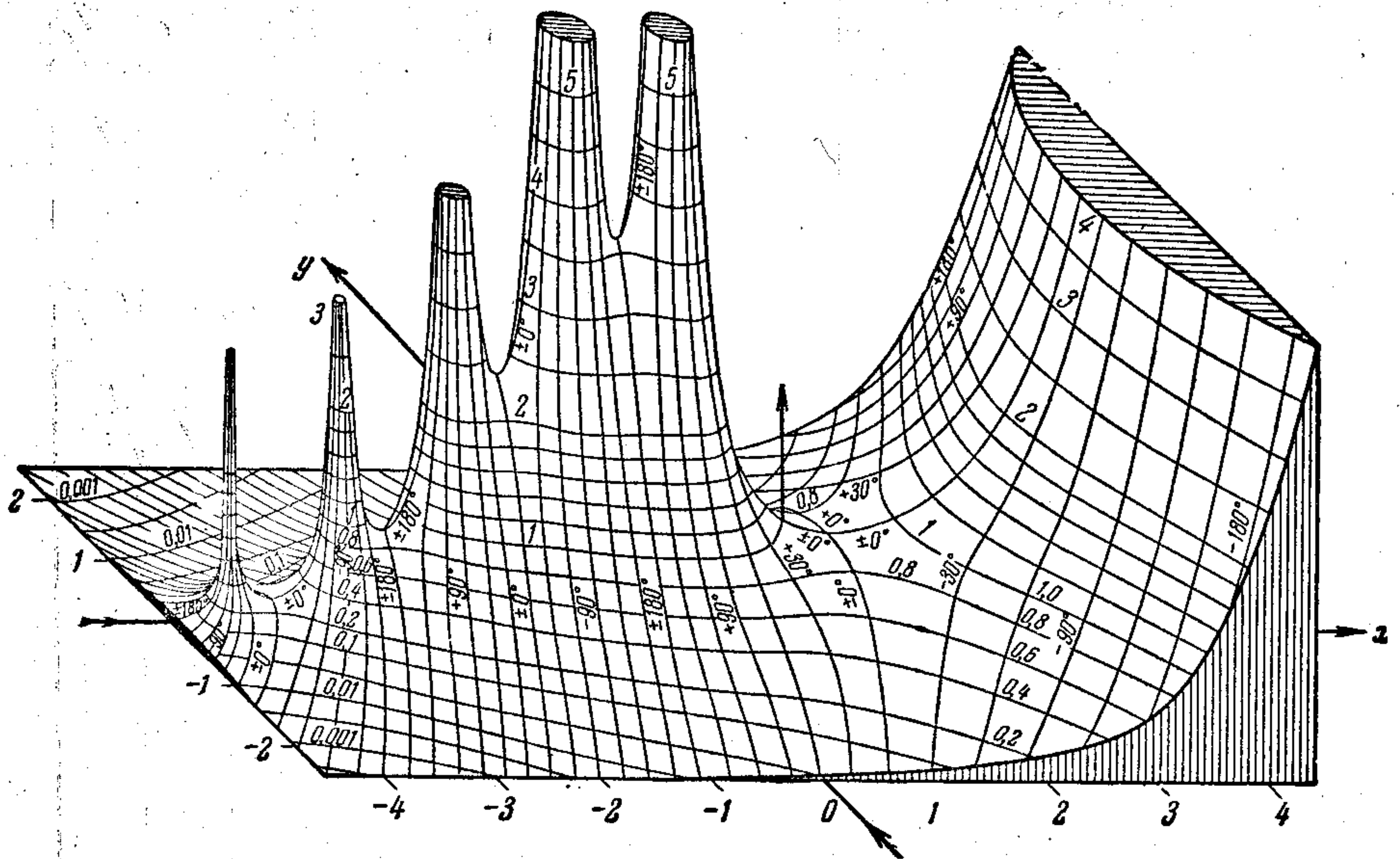


Рис. 18. Рельеф гамма-функции $\Gamma(z)$.

аргумента $z = x$ она положительна, действительна и удовлетворяет неравенству

$$(\Gamma'(x))^2 < \Gamma(x) \Gamma''(x),$$

которое выражает ее логарифмическую выпуклость (рис. 18—22, таблицы 12, 14). Логарифмическая производная от $\Gamma(z)$ обозначается через

$$\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Для этих функций употребляют также другие обозначения:

$$\Gamma(z+1) = \Pi(z) = z!, \quad \psi(z+1) = \Psi(z) = \frac{d \ln \Pi(z)}{dz} = \frac{d \ln z!}{dz}.$$

Определение неполных гамма-функций $\Gamma(\alpha, z)$, $\gamma(\alpha, z)$ дано в С.

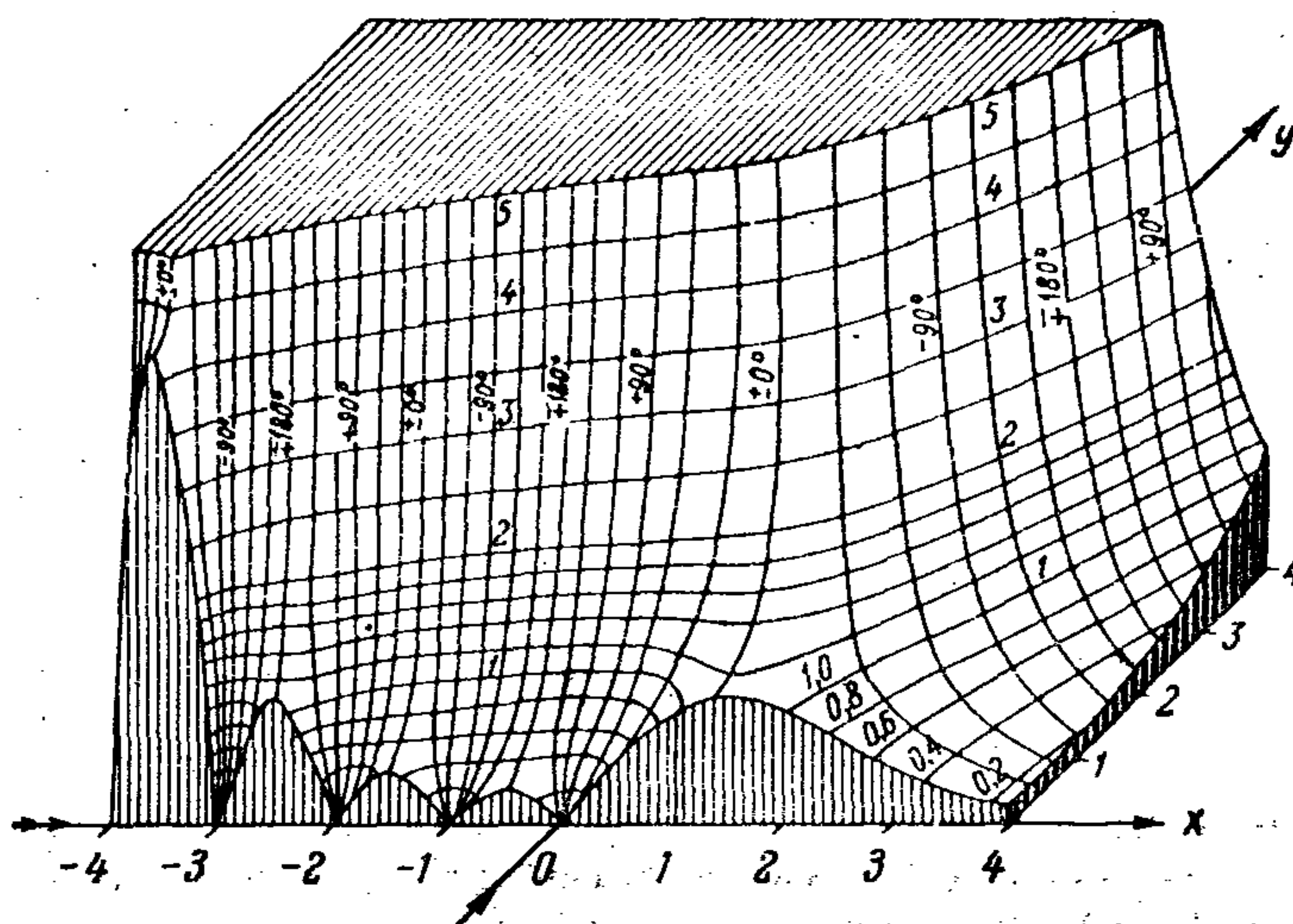


Рис. 19. Рельеф обратных значений гамма-функции $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

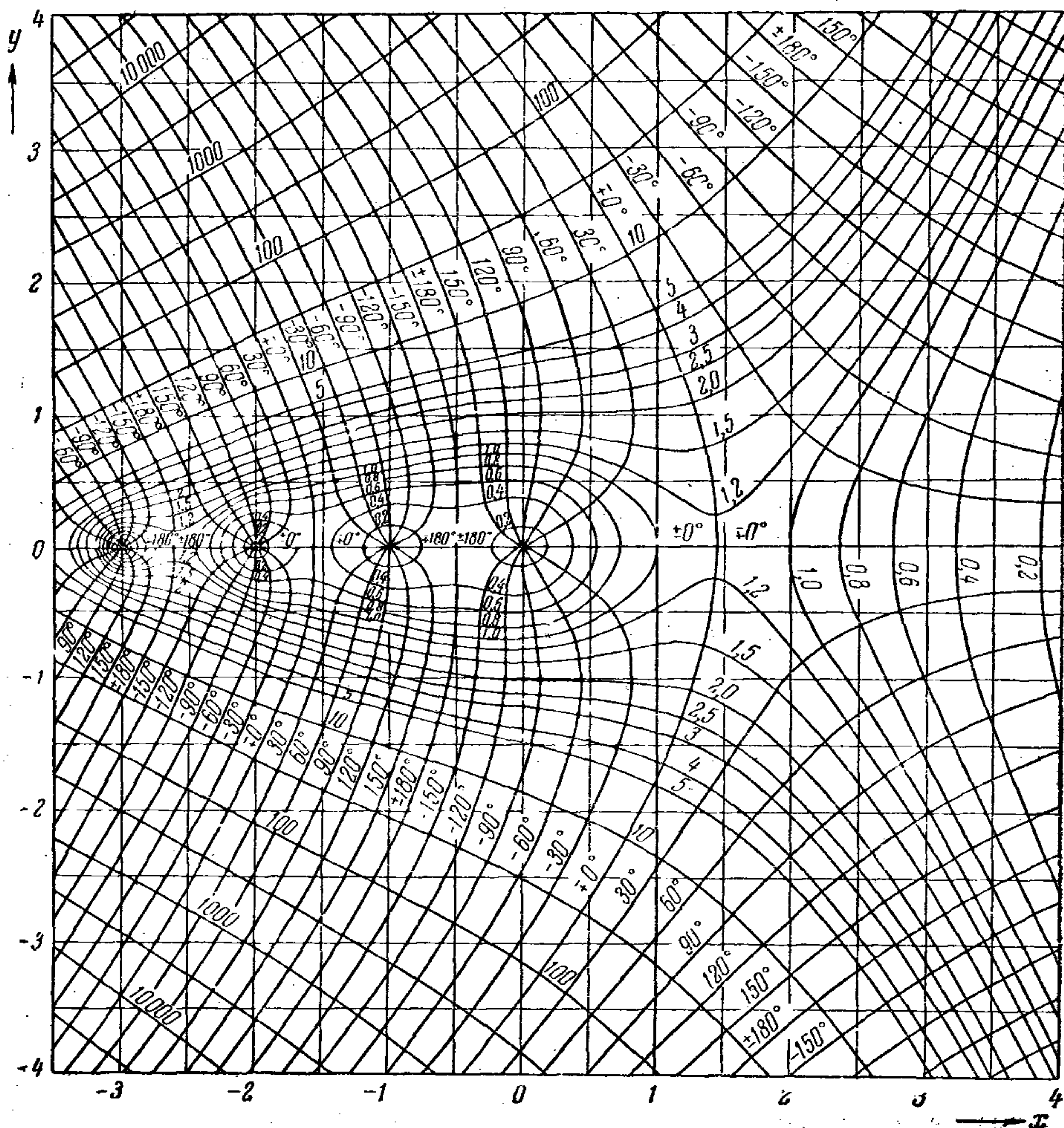
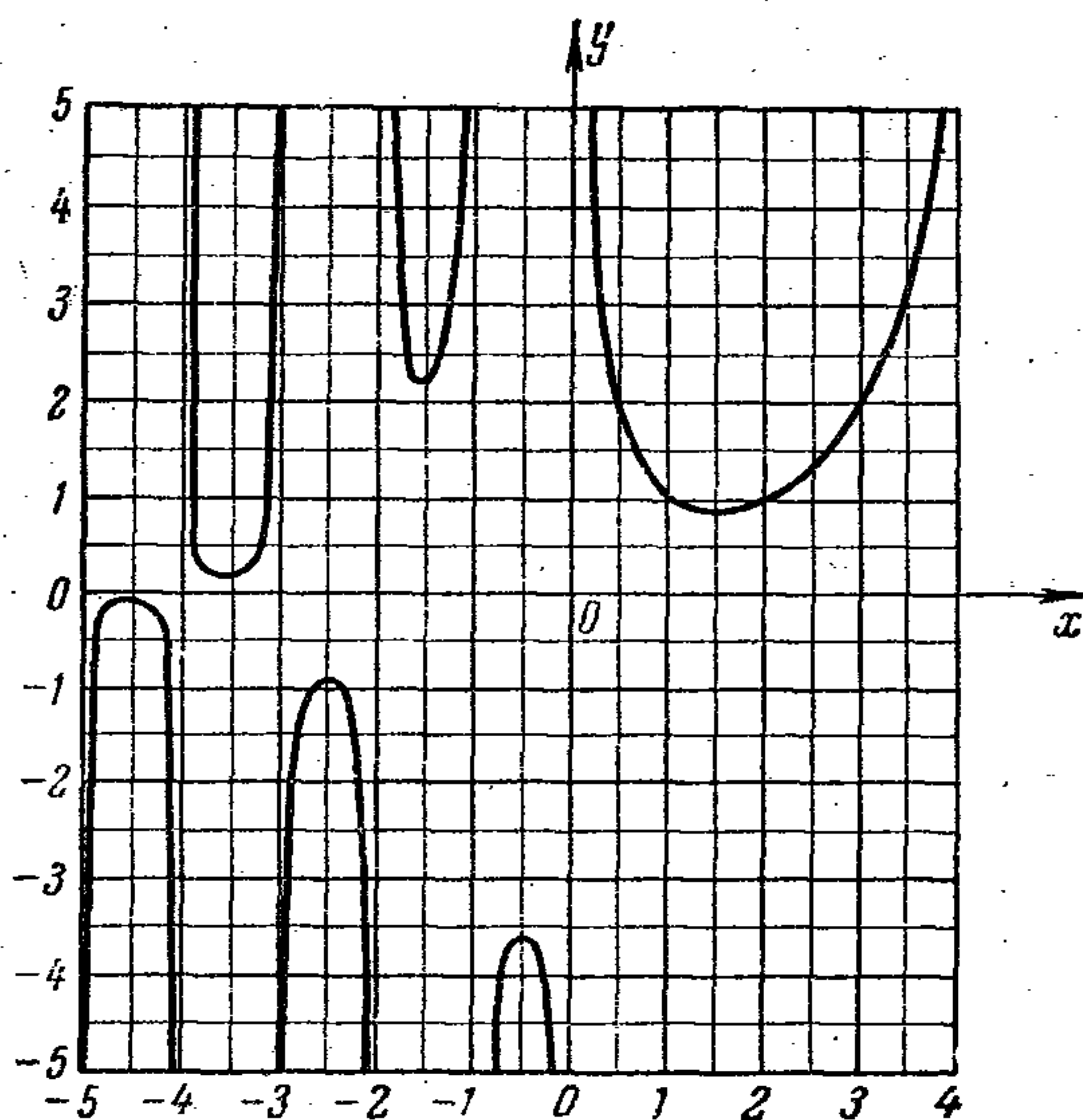
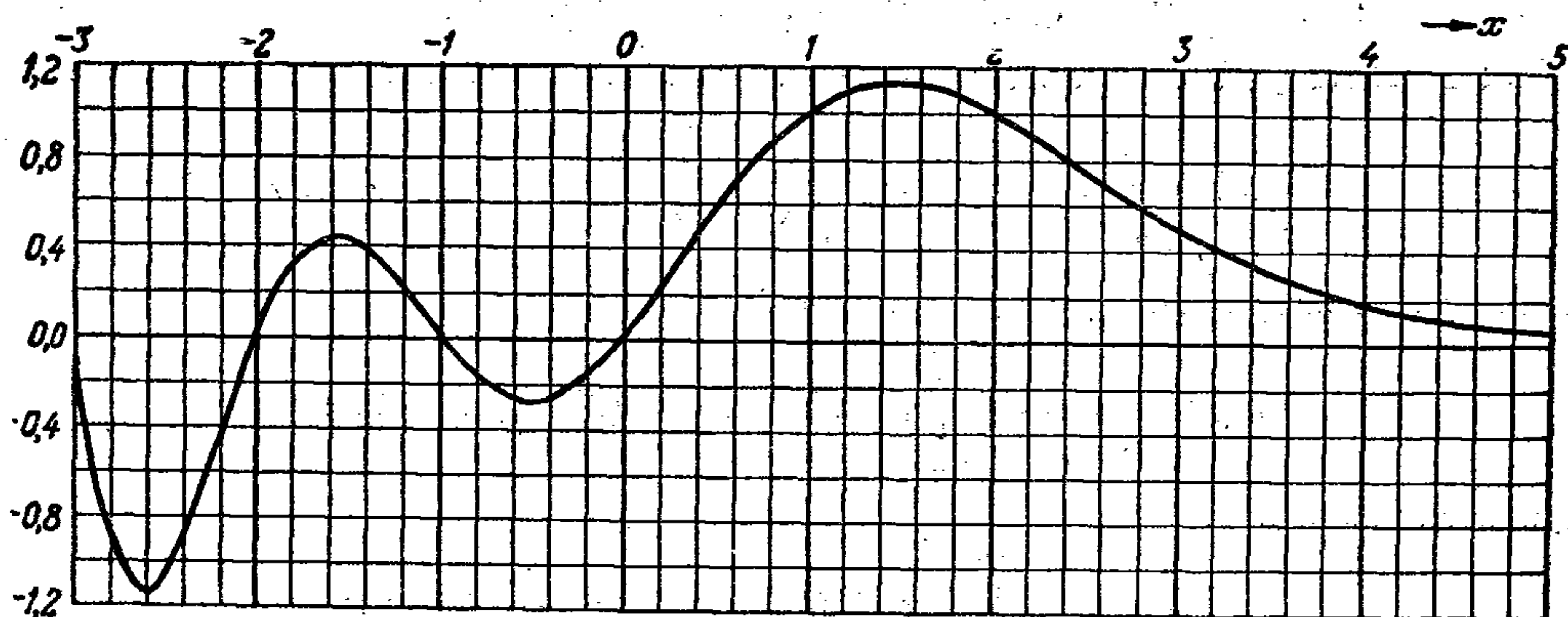


Рис. 20. Карта горизонталей рельефа обратных значений гамма-функции $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

Рис. 21. Гамма-функция $\Gamma(x)$.Рис. 22. Обратные значения гамма-функции $\frac{1}{\Gamma(x)}$.

А. ГАММА-ФУНКЦИЯ $\Gamma(z)$

1. Представления

1.1. Произведения и ряды. Для $z \neq 0, -1, -2, \dots$ имеем:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)},$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{z} e^{-Cz} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1}$$

(C — постоянная Эйлера). Пусть $z = x + iy$ и

$$1 + \frac{iy}{x+n} = r_n e^{i\varphi_n} \quad (r_n > 0; n = 0, 1, 2, \dots),$$

тогда $\Gamma(z) = h e^{i\omega}$, где

$$h = \Gamma(x) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_n}, \quad \omega = y\psi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{tg} \varphi_n - \varphi_n).$$

При $|z| \ll 1$ имеем:

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{\frac{\pi z}{\sin \pi z}} \frac{1-z}{1+z} e^{\Lambda}, \quad \text{где } \Lambda = C_1 z - C_2 z^2 - C_3 z^3 - \dots;$$

$$C_1 = 0,422\,784\,335, \quad C_2 = 0,007\,385\,551, \quad C_3 = 0,000\,223\,155, \\ C_4 = 0,067\,352\,301, \quad C_5 = 0,001\,192\,754, \quad C_{11} = 0,000\,044\,926.$$

Если в этом случае положить $z = x + iy = r e^{i\varphi}$ ($r \ll 1$), то получим:

$$\Gamma(z+1) = h e^{i\omega},$$

где

$$h^2 = \frac{\pi^2 (x^2 + y^2)}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y} \frac{(1-x)^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} e^{4\Lambda_1},$$

$$2\omega = \varphi - \sigma - \tau - \chi + 2\Lambda_2, \quad \Lambda_1 + i\Lambda_2 = C_1 z - C_2 z^2 - C_3 z^3 - \dots,$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{tg} x}, \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{y}{1-x}, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{y}{1+x}.$$

1.2. Интегралы. При $\operatorname{Re} z > 0$ имеет место представление

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{z-1} dt \quad (\arg t = 0)$$

(интеграл Эйлера 2-го рода); при $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_{+\infty}^{+0} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (0 < \arg t \leq 2\pi),$$

при всех значениях z

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+0} e^t t^{-z} dt \quad (-\pi \leq \arg t \leq \pi)$$

(контурный интеграл Ганкеля).

1.3. Асимптотика. Если $|z| \gg 1$ при условии, что $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то

$$\ln \Gamma(z) \approx \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} \frac{1}{z^{2n-1}}$$

(B_{2n} — числа Бернулли). Для действительного $z = x > 0$ ошибка, получающаяся при обрывании ряда, меньше первого отброшенного члена и имеет знак этого

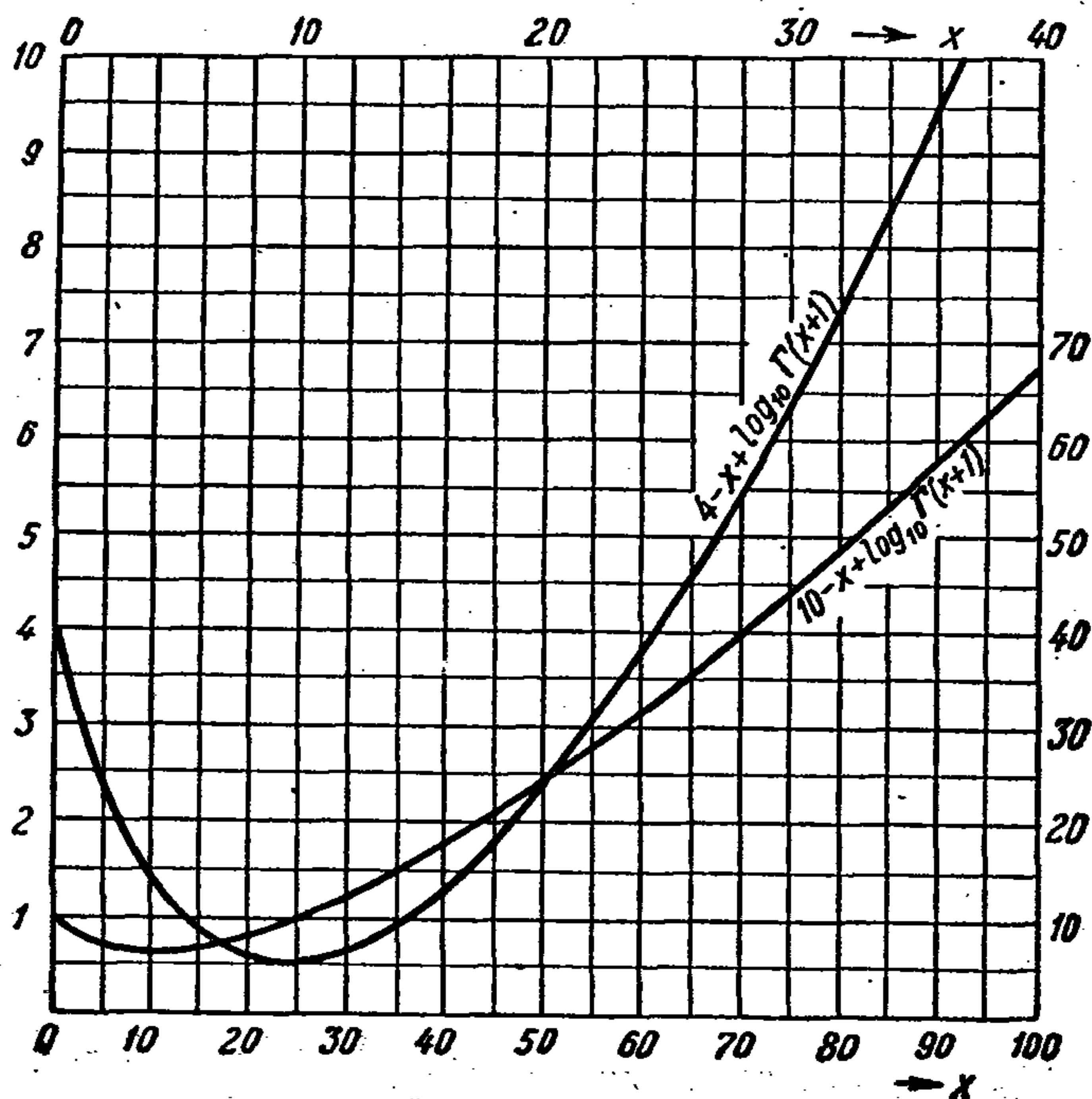


Рис. 23. Функция $\Gamma(x)$ для больших x .

члена (рис. 23). Отсюда следует формула Стирлинга:

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-z} z^z H(z),$$

$$H(z) \approx 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51\,840z^3} - \frac{571}{2\,488\,320z^4} - \dots$$

Имеет место представление

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \frac{e^{-z}}{z} [z(z+1)]^{\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{12}} e^{\lambda},$$

$$\lambda \approx \frac{1}{180} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+1)^2} \right) - \frac{1}{840} \left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{(z+1)^4} \right) + \dots$$

Для чисто мнимого $z = iy$, $y \gg 1$ имеем $\Gamma(iy) = he^{i\omega}$, где

$$h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{y}} e^{-\frac{\pi}{2}y},$$

$$\omega \approx -\frac{\pi}{4} + y(\ln y - 1) - \frac{1}{12y} - \frac{1}{360y^3} - \frac{1}{1260y^5} - \frac{1}{1680y^7} - \frac{1}{1188y^9} - \dots$$

2. Частные значения

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \quad (n = 3, 4, \dots).$$

Точка $-n$ — простой полюс, вычет в этом полюсе равен $\frac{(-1)^n}{n!}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1,772\,453\,850\dots, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2,678\,938\,535 = 1:0,373\,282\,174,$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1,354\,117\,939 = 1:0,738\,488\,112,$$

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = 0,892\,979\,512 = 1:1,119\,846\,522,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) = 0,902\,745\,293 = 1:1,107\,732\,167,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3,625\,609\,908 = 1:0,275\,815\,663,$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1,225\,416\,702 = 1:0,816\,048\,939,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = 0,906\,402\,477 = 1:1,103\,262\,651,$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = 0,919\,062\,527 = 1:1,088\,065\,252.$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n},$$

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\min_{x>0} \Gamma(x) = \Gamma(1,46163\dots) = 0,88\,560\dots$$

3. Функциональные уравнения

3.1. Рекуррентные формулы:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z),$$

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\dots(z+n-1)\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z-1) = \frac{1}{z-1} \Gamma(z), \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-1)(z-2)\dots(z-n)}.$$

3.2. Формулы дополнения:

$$\Gamma(z) \Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin \pi z},$$

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z},$$

$$\Gamma(1+z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}.$$

Если положить ($n = 1, 2, \dots$)

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_n(z) = -z^2(1-z^2)(4-z^2)\dots[(n-1)^2-z^2],$$

$$Q_0(z) = 1,$$

$$Q_n(z) = \left(\frac{1}{4} - z^2\right) \left(1 \cdot 2 + \frac{1}{4} - z^2\right) \dots \left[(n-1) \cdot n + \frac{1}{4} - z^2\right],$$

то справедливы равенства ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}\Gamma(n+z)\Gamma(n-z) &= \frac{-\pi P_n(z)}{z \sin \pi z}, \\ \Gamma(-n+z)\Gamma(-n-z) &= \frac{\pi z}{P_{n+1}(z) \sin \pi z}, \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-z\right) &= \frac{\pi Q_n(z)}{\cos \pi z}, \\ \Gamma\left(-n+\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}-z\right) &= \frac{\pi}{Q_n(z) \cos \pi z}.\end{aligned}$$

Для чисто мнимого $z=iy$ выражения в правых частях этих равенств будут действительными и означают квадрат модуля каждого из двух комплексно-сопряженных множителей, стоящих в левых частях.

3.3. Формула умножения:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{(2\pi)^{n-1}} n \frac{\Gamma(nz)}{n^{nz}}.$$

В частности, при $n=2$ получаем формулу удвоения:

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

4. Некоторые интегральные формулы

При условии $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$ имеет место равенство

$$\int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (\arg t = 0).$$

Интеграл, стоящий слева (интеграл Эйлера 1-го рода) называется бэ́та-функцией $B(z, w)$; приведенная формула позволяет находить значения бэ́та-функции через значения гамма-функции.

Далее, справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^w} dt &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(w-z)}{\Gamma(w)} \quad \left(\begin{array}{l} \operatorname{Re} w > \operatorname{Re} z > 0, \\ \arg t = 0 \end{array} \right), \\ \int_0^{+\infty} e^{-wt^n} t^{z-1} dt &= \frac{\Gamma\left(\frac{z}{n}\right)}{nw^{z/n}} \quad \left(\begin{array}{l} \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Re} z > 0; \\ \arg t = 0, n = 1, 2, \dots \end{array} \right), \\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[n]{1-t^m}} &= \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)} \quad (m=1, 2, \dots, n=2, 3, \dots), \\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^m}} &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)} = \sqrt[4]{\pi} \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)} \quad (m=1, 2, \dots),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \varphi d\varphi &= \frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)} \\ &\quad (\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \beta > -1).\end{aligned}$$

В. ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ $\psi(z)$ ГАММА-ФУНКЦИИ

[Логарифмическая производная от $\Gamma(z)$ обозначается через $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ (рис. 24, таблица 13).]

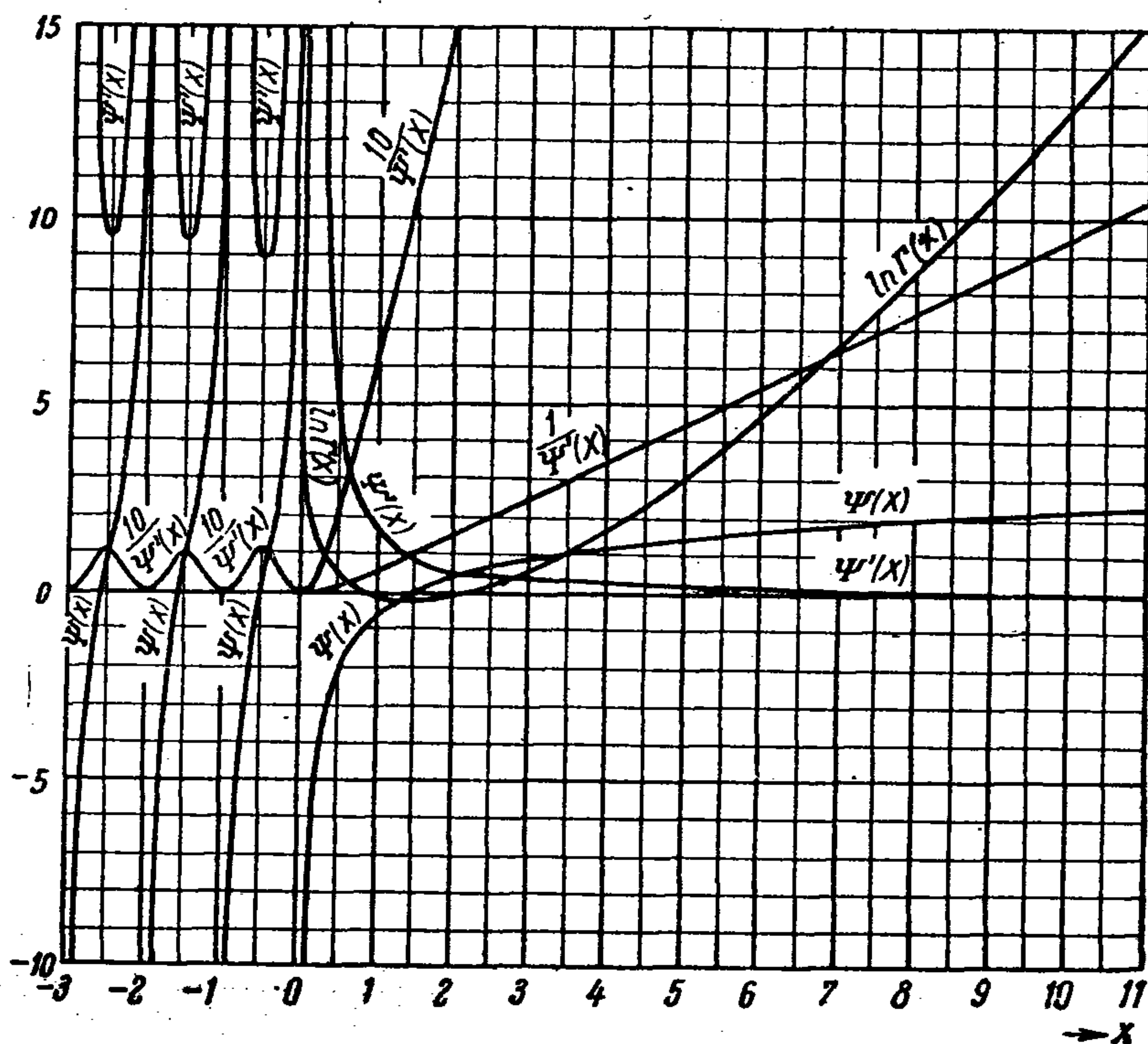


Рис. 24. Логарифм гамма-функции и его производные.

1. Представления

1.1. Ряды. Для $z \neq 0, -1, -2, \dots$ имеем:

$$\psi(z) = -C + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{z+k} \right) \quad (C \text{ — постоянная Эйлера})$$

и

$$\psi(z) = \ln z - \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z+k} - \ln \left(1 + \frac{1}{z+k} \right) \right].$$

1.2. Интегралы. При $\operatorname{Re} z > 0$

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right] dt = \int_0^1 \left[\frac{-1}{\ln t} - \frac{t^{z-1}}{1-t} \right] dt \quad (\arg t = 0),$$

$$\psi(z) = -C + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t} dt \quad (\arg t = 0).$$

1.3. Асимптотика. Если $|z| \gg 1$ при условии, что $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то

$$\psi(z) \approx \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n \cdot z^{2n}} = \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \dots,$$

$$\psi(z) \approx \frac{1}{2} \ln z(z+1) - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n-1} \left\{ \frac{1}{z^{2n-1}} - \frac{1}{(z+1)^{2n-1}} \right\}.$$

2. Частные значения

$$\psi(1) = -C, \quad \psi(n) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \quad (n=2, 3, \dots).$$

Точка $-n$ — простой полюс, вычет в этом полюсе равен -1 ;

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -C - 2 \ln 2 = -\ln 4\gamma = -1,9635100260\dots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2} \pm n\right) = -\ln 4\gamma + 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

(C — постоянная Эйлера, $\gamma = e^C$).

3. Функциональные уравнения

3.1. Рекуррентные формулы:

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}, \quad \psi(z+n) = \psi(z) + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n-1},$$

$$\psi(z-1) = \psi(z) - \frac{1}{z-1}, \quad \psi(z-n) = \psi(z) - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} - \dots - \frac{1}{z-n}.$$

3.2. Формулы дополнения:

$$\psi(z) - \psi(-z) = -\pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{z}, \quad \psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \operatorname{ctg} \pi z,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2} + z\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - z\right) = \pi \operatorname{tg} \pi z, \quad \psi(1+z) - \psi(1-z) = \frac{1}{z} - \pi \operatorname{ctg} \pi z,$$

$$\psi\left(-n + \frac{3}{4}\right) = \psi\left(n + \frac{1}{4}\right) + \pi, \quad \psi\left(-n + \frac{1}{4}\right) = \psi\left(n + \frac{3}{4}\right) - \pi \quad (n=1, 2, \dots).$$

3.3. Формула умножения:

$$\psi(nz) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi\left(z + \frac{k}{n}\right) + \ln n \quad (n=2, 3, \dots).$$

4. Производная $\psi'(z)$

[В силу отмеченной выше логарифмической выпуклости гамма функции, производная $\psi'(z)$ всюду неотрицательна (рис. 24, таблица 13).]

4.1. Представление. Для $z \neq 0, -1, -2, \dots$ имеем:

$$\psi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}.$$

Таблица 12.
Гамма-функция $\Gamma(x) = (x-1)!$

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,0000	2,00	+ 1,	3,00	2,000	4,00	6,000
02	0,9888	02	+ 43	02	2,037	02	6,153
04	0,9784	04	45	04	2,076	04	6,311
06	0,9687	06	46,5	06	2,115	06	6,473
08	0,9597	08	48	08	2,156	08	6,640
			50		21		66,5
1,10	0,9514	2,10	+ 51,5	3,10	2,198	4,10	6,813
12	0,9436	12	53,5	12	2,240	12	6,990
14	0,9364	14	55,5	14	2,284	14	7,173
16	0,9298	16	57	16	2,330	16	7,362
18	0,9237	18	59	18	2,376	18	7,556
					24		100,5
1,20	0,9182	2,20	+ 61	3,20	2,424	4,20	7,757
22	0,9131	22	63	22	2,473	22	7,963
24	0,9085	24	64,5	24	2,524	24	8,176
26	0,9044	26	67	26	2,575	26	8,396
28	0,9007	28	69	28	2,629	28	8,622
					27		116,5
1,30	0,8975	2,30	+ 71	3,30	2,683	4,30	8,855
32	0,8946	32	73,5	32	2,740	32	9,096
34	0,8922	34	75,5	34	2,798	34	9,344
36	0,8902	36	77,5	36	2,857	36	9,600
38	0,8885	38	80	38	2,918	38	9,864
					31,5		136
1,40	0,8873	2,40	+ 82	3,40	2,981	4,40	10,136
42	0,8864	42	85	42	3,046	42	10,417
44	0,8858	44	87	44	3,112	44	10,707
46	0,8856	46	89,5	46	3,181	46	11,005
48	0,8857	48	92	48	3,251	48	11,314
					36		159
1,50	0,8862	2,50	+ 95	3,50	3,323	4,50	11,632
52	0,8870	52	97,5	52	3,398	52	11,960
54	0,8882	54	100	54	3,474	54	12,299
56	0,8896	56	103	56	3,553	56	12,648
58	0,8914	58	106	58	3,634	58	13,009
					41,5		186
1,60	0,8935	2,60	+ 109	3,60	3,717	4,60	13,381
62	0,8959	62	112	62	3,803	62	13,766
64	0,8986	64	115	64	3,891	64	14,162
66	0,9017	66	118	66	3,981	66	14,572
68	0,9050	68	121,5	68	4,075	68	14,995
					48		218
1,70	0,9086	2,70	+ 124,5	3,70	4,171	4,70	15,431
72	0,9126	72	128,5	72	4,269	72	15,882
74	0,9168	74	131,5	74	4,371	74	16,348
76	0,9214	76	135,5	76	4,476	76	16,829
78	0,9262	78	139	78	4,583	78	17,325
					55,5		256,5!
1,80	0,9314	2,80	+ 143	3,80	4,694	4,80	17,84
82	0,9368	82	146,5	82	4,808	82	18,37
84	0,9426	84	151	84	4,926	84	18,91
86	0,9487	86	154,5	86	5,047	86	19,48
88	0,9551	88	159,5	88	5,171	88	20,06
					64		30,5
1,90	0,9618	2,90	+ 163	3,90	5,299	4,90	20,67
92	0,9688	92	168	92	5,431	92	21,29
94	0,9761	94	172,5	94	5,567	94	21,94
96	0,9837	96	177,5	96	5,707	96	22,60
98	0,9917	98	182	98	5,851	98	23,29
					74,5		35,5
2,00	1,0000	3,00	+ 2,	4,00	6,000	5,00	24,00

Таблица 13.
Функции $\psi(x)$ и $\psi'(x)$

x	$\psi(x)$	$\psi'(x)$
1,00	- 0,	+ 1,
02	5772	6449
04	5448	5981
06	5133	5537
08	4826	5115
	4528	4715
	162	234!
	157,5	221!
	153,5	211!
	149	200!
	145	191!
1,10	4238	4333
12	3955	3970
14	3679	3623
16	3410	3292
18	3147	2976
	141,5	181,5
	138	173,5
	134,5	165,5
	131,5	158
	128,5	151
1,20	2890	2674
22	2640	2385
24	2395	2107
26	2155	1842
28	1921	1587
	125	144,5
	122,5	139
	120	132,5
	117	127,5
	114,5	122
1,30	1692	1343
32	1467	1108
34	1248	882
36	1032	664
38	821	455
	112,5	117,5
	109,5	113
	108	109
	105,5	104,5
	103,5	100,5
1,40	614	254
42	411	59
44	211	9872
46	16	9691
48	*0176	9517
	101,5	97,5
	100	93,5
	97,5	90,5
	96	87
	94,5	84,5
1,50	0365	9348
52	0550	9185
54	0732	9027
56	0911	8875
58	1087	8727
	92,5	81,5
	91	79
	89,5	76
	88	74
	86,5	71,5
1,60	1260	8584
62	1431	8446
64	1598	8312
66	1763	8181
68	1926	8055
	85,5	69
	83,5	67
	82,5	65,5
	81,5	63
	79,5	61,5
1,70	2085	7932
72	2243	7813
74	2398	7698
76	2551	7585
78	2701	7476
	79	59,5
	77,5	57,5
	76,5	56,5
	75	54,5
	74,5	53
1,80	2850	7370
82	2996	7266
84	3141	7166
86	3283	7068
88	3423	6973
	73	52
	72,5	50
	71	49
	70	47,5
	69,5	46,5
1,90	3562	6880
92	3699	6789
94	3833	6701
96	3967	6615
98	4098	6531
	68,5	45,5
	67	44
	67	43
	65,5	42
	65	41
2,00	4228	6449
	+ 0,	+ 0,

Таблица 14. Величины, обратные к гамма-функции:

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \frac{1}{x!} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{1}{(-x)!}$$

x	$1/\Gamma(1+x)$	$1/\Gamma(1-x)$	x	$1/\Gamma(1+x)$	$1/\Gamma(1-x)$	x	$1/\Gamma(1+x)$	$1/\Gamma(1-x)$
0,00	+ 1, 0000	+ 1, 00000	1,00	+ 1, 00000	- 0, 00000	2,00	+ 0, 50000	+ 0, 00000
02	+ 56,5 0113	- 52 *98819	02	- 427,5! *99145	+ 46 01976	02	- 459 49082	+ 34 02016
04	53,5 0220	52 97587	04	436! 98273	49 03903	04	454,5 48173	28 04060
06	51,5 0323	52 96302	06	445! 97383	52 05778	06	449,5 47274	22 06125
08	48,5 0420	52 94965	08	452,5 96478	56 07597	08	445 46384	15 08205
	45,5	51		460	59		440	8
0,10	+ 43,5 0511	- 51 93578	1,10	- 467,5 95558	+ 62 09358	2,10	- 435 45504	+ 1 10294
12	40,5 0598	50 92140	12	473,5 94623	65 11057	12	430 44634	6 12384
14	38 0679	50 90652	14	480,5 93676	67 12691	14	425 43774	13 14468
16	35,5 0755	49 89114	16	486 92715	70 14258	16	420 42924	20 16540
18	32,5 0826	48 87528	18	491,5 91743	73 15755	18	414,5 42084	28 18591
0,20	+ 30,5 0891	- 47 85894	1,20	- 496,5 90760	+ 76 17179	2,20	- 409,5 41255	- 35 20614
22	27,5 0952	46 84213	22	501 89767	78 18527	22	404,5 40436	43 22603
24	25 1007	45 82485	24	505 88765	81 19797	24	398,5 39627	51 24548
26	22,5 1057	44 80713	26	509,5 87755	83 20985	26	394 38830	59 26442
28	20 1102	43 78897	28	512,5 86736	85 22091	28	388 38042	67 28277
0,30	+ 18 1142	- 42 77038	1,30	- 516 85711	+ 88 23111	2,30	- 383 37266	- 75 30045
32	15 1178	40 75138	32	518,5 84679	90 24044	32	377,5 36500	83 31738
34	13 1208	39 73198	34	521 83642	92 24887	34	372,5 35745	91 33349
36	10 1234	37 71219	36	523 82600	93 25639	36	367 35000	99 34869
38	8,5 1254	36 69202	38	525 81554	95 26297	38	361,5 34266	107 36290
0,40	+ 5,5 1271	- 34 67150	1,40	- 526 80504	+ 96 26860	2,40	- 356 33543	- 114 37604
42	3,5 1282	32 65065	42	527,5 79452	98 27327	42	350,5 32831	122 38805
44	+ 1,5 1289	30 62947	44	528 78397	99 27697	44	345,5 32130	129 39883
46	- 1 1292	28 60799	46	529 77341	100 27967	46	340 31439	137 40832
48	3 1290	26 58622	48	529 76283	100 28139	48	334,5 30759	144 41645
0,50	- 5,5 1284	- 24 56419	1,50	- 528,5 75225	+ 101 28209	2,50	- 329 30090	- 150 42314
52	7 1273	22 54192	52	529 74168	101 28180	52	324 29432	157 42833
54	9 1259	20 51942	54	527,5 73110	101 28049	54	319 28784	163 43195
56	11,5 1241	18 49672	56	527,5 72055	101 27817	56	313 28146	169 43394
58	13 1218	15 47385	58	526 71000	101 27483	58	308,5 27520	174 43424
0,60	- 15 1192	- 13 45082	1,60	- 524,5 69948	+ 100 27049	2,60	- 303 26903	- 180 43279
62	17 1162	10 42767	62	523 68899	99 26515	62	297,5 26297	184 42955
64	18,5 1128	8 40441	64	521 67853	98 25882	64	292,5 25702	188 42447
66	20,5 1091	5 38107	66	519,5 66811	97 25151	66	287,5 25117	192 41750
68	22,5 1050	- 2 35769	68	517 65772	95 24323	68	282,5 24542	195 40862
0,70	- 23,5 1005	0 33427	1,70	- 514,5 64738	+ 93 23399	2,70	- 277,5 23977	- 198 39778
72	25,5 0958	+ 3 31086	72	512 63709	91 22382	72	272 23422	200 38497
74	27 0907	6 28748	74	509 62685	89 21274	74	267,5 22878	201 37016
76	28,5 0853	9 26417	76	506,5 61667	86 20077	76	262,5 22343	202 35335
78	29,5 0796	12 24094	78	503 60654	83 18793	78	257,5 21818	202 33452
0,80	- 31,5 0737	+ 15 21782	1,80	- 499,5 59648	+ 80 17426	2,80	- 252,5 21303	- 201 31367
82	32,5 0674	18 19486	82	496 58649	77 15979	82	248 20798	199 29081
84	34 0609	21 17208	84	493 57657	73 14455	84	243,5 20302	197 26597
86	35,5 0541	24 14951	86	488,5 56671	69 12858	86	238,5 19815	194 23915
88	36 0470	27 12717	88	485 55694	65 11191	88	234 19339	190 21040
0,90	- 38 0398	+ 30 10511	1,90	- 481 54724	+ 60 09460	2,90	- 229 18870	- 185 17974
92	38,5 0322	34 08336	92	476,5 53762	56 07669	92	225 18412	180 14724
94	40 0245	37 06194	94	472,5 52809	51 05822	94	220,5 17962	173 11295
96	40,5 0165	40 04088	96	468,5 51864	45 03925	96	215,5 17521	165 07692
98	42 0084	43 02023	98	463,5 50927	40 01982	98	211,5 17090	157 03925
1,00	+ 1, 0000	+ 0, 00000	2,00	+ 0, 50000	- 0, 00000	3,00	+ 0, 16667	- 148 00000

Если $|z| \gg 1$ при условии, что $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то

$$\psi'(z) \approx \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5} + \dots$$

4.2. Частные значения

$$\psi'(1) = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449340668 \dots, \quad \psi'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} = 4,9348022005 \dots,$$

Если $n = 1, 2, 3, \dots$, то

$$\begin{aligned} \psi'(n) &= \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \right), \\ \psi'\left(\frac{1}{2} \pm n\right) &= \frac{\pi^2}{2} \mp 4 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \psi'\left(n + \frac{1}{2}\right) &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi'\left(\frac{1}{2} - n\right) = \pi^2. \end{aligned}$$

4.3. Функциональные уравнения

$$\begin{aligned} \psi'(z+1) &= \psi'(z) - \frac{1}{z^2}, \\ \psi'(z) + \psi'(1-z) &= \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2, \quad \psi'\left(\frac{1}{2} + z\right) + \psi'\left(\frac{1}{2} - z\right) = \left(\frac{\pi}{\cos \pi z} \right)^2. \end{aligned}$$

С. НЕПОЛНЫЕ ГАММА-ФУНКЦИИ $\Gamma(a, z)$, $\gamma(a, z)$

Неполные гамма-функции определяются следующими равенствами:

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \gamma(a, z) = \Gamma(a) - \Gamma(a, z).$$

Путь интегрирования выбирается так, чтобы он не проходил через начало координат и чтобы вдоль него $\arg t$ изменялся непрерывно от $\arg t = \arg z$ в начале пути до $\lim_{t \rightarrow \infty} \arg t = \beta$, где $|\beta| < \frac{\pi}{2}$, в конце. Для $\operatorname{Re} a > 0$ имеем:

$$\gamma(a, z) = \int_0^z e^{-t} t^{a-1} dt,$$

где путь интегрирования может быть выбран произвольно (рис. 25).

Эти функции являются функциями двух комплексных переменных a, z . Если рассматривать их как функции z при подходящим образом фиксированных значениях a , то получаются многие специальные функции (интегральная показательная функция, интегральный логарифм, интегральные синус и косинус, интеграл ошибок и интегралы Френеля).

Употребляются и другие обозначения для этих функций. Иногда, например, $\gamma(a, z)$, $\Gamma(a, z)$ обозначаются соответственно через $P(a, z)$, $Q(a, z)$. По аналогии с обозначением $\Gamma(z) = (z-1)!$ часто пишут $\gamma(a, z) = (a-1, z)!$. В астрофизике и ядерной физике употребляют обозначение

$$E_n(z) = z^{n-1} \Gamma(1-n, z) = \int_1^{\infty} e^{-zt} t^{-n} dt.$$

При фиксированном a функции $\Gamma(a, z)$ и $\gamma(a, z)$ будут аналитическими функциями переменного z , причем для $\gamma(a, z)$ исключаются значения $a = 0, -1, -2, \dots$. Если a не является натуральным числом, то они многозначны с единственной конечной точкой ветвления $z = 0$ и не имеют других особенностей в конечных точках.

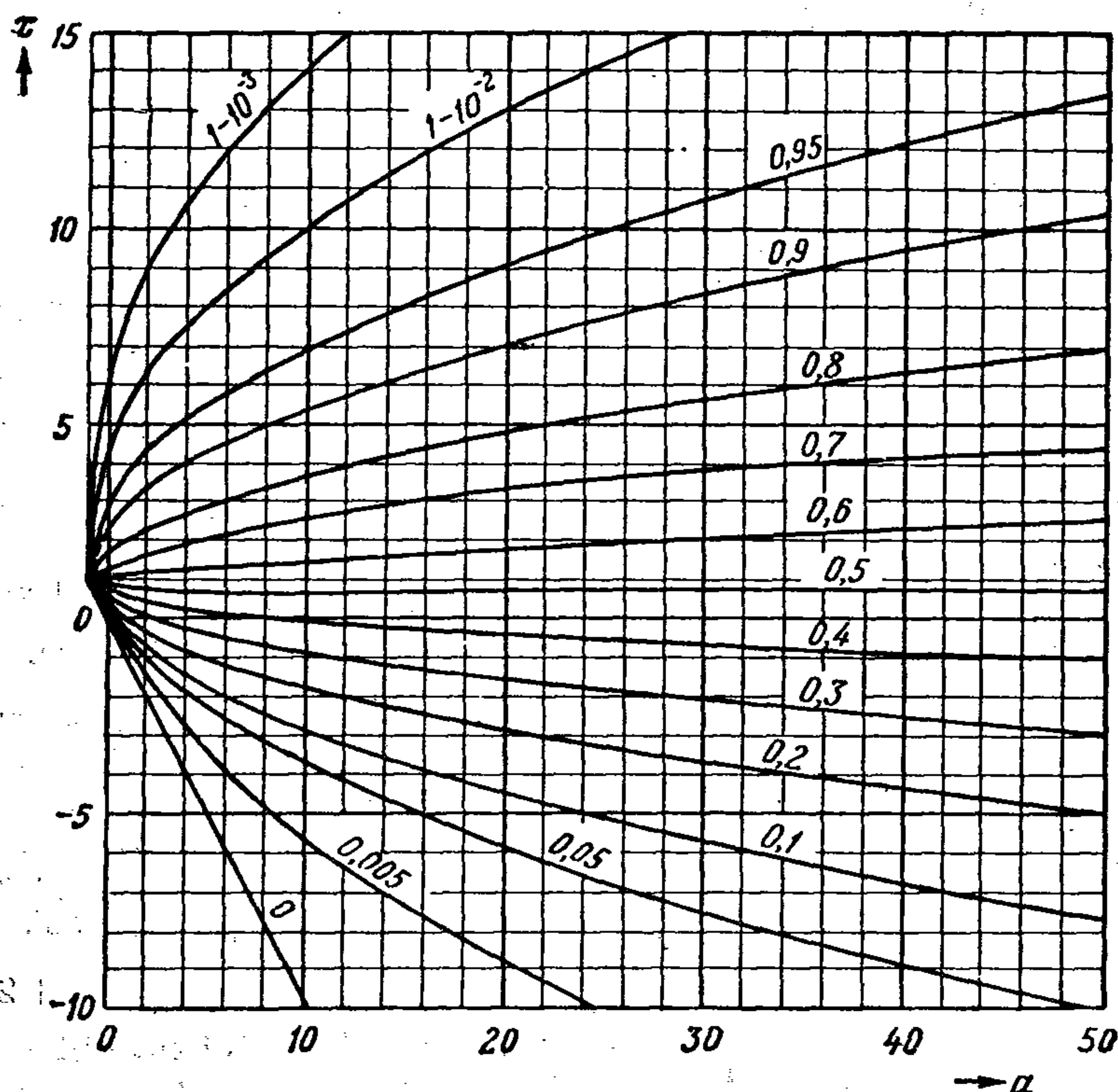


Рис. 25. Кривые $\frac{\gamma(a+1, a+x)}{\Gamma(a+1)} = \text{const}$ в плоскости a, x .

При $a \neq 0, -1, -2, \dots$ имеет место разложение в степенной ряд

$$z^{-a} \gamma(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n! (a+n)} = e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a(a+1)\dots(a+n)}.$$

В секторе $-\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) существует при $|z| \gg 1$ асимптотическое представление

$$\gamma(a, z) \approx \Gamma(a) - z^{a-1} e^{-z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-1)(a-2)\dots(a-n)}{z^n} \right].$$

По аргументу a справедливы следующие функциональные уравнения:

$$\gamma(a+1, z) = a\gamma(a, z) - z^a e^{-z}, \quad \Gamma(a+1, z) = a\Gamma(a, z) + z^a e^{-z}.$$

VI. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Интегральная показательная функция и интегральный логарифм

1.1. Интегральная показательная функция определяется как

$$\text{Ei}(z) = -\Gamma(0, ze^{-\pi i}) = -\int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

где путь интегрирования должен быть взят от z до ∞ так, чтобы вдоль него $\lim_{t \rightarrow \infty} \arg t = \beta$, $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$, и $\text{Re } t$ оставалась ограниченной справа. Функция

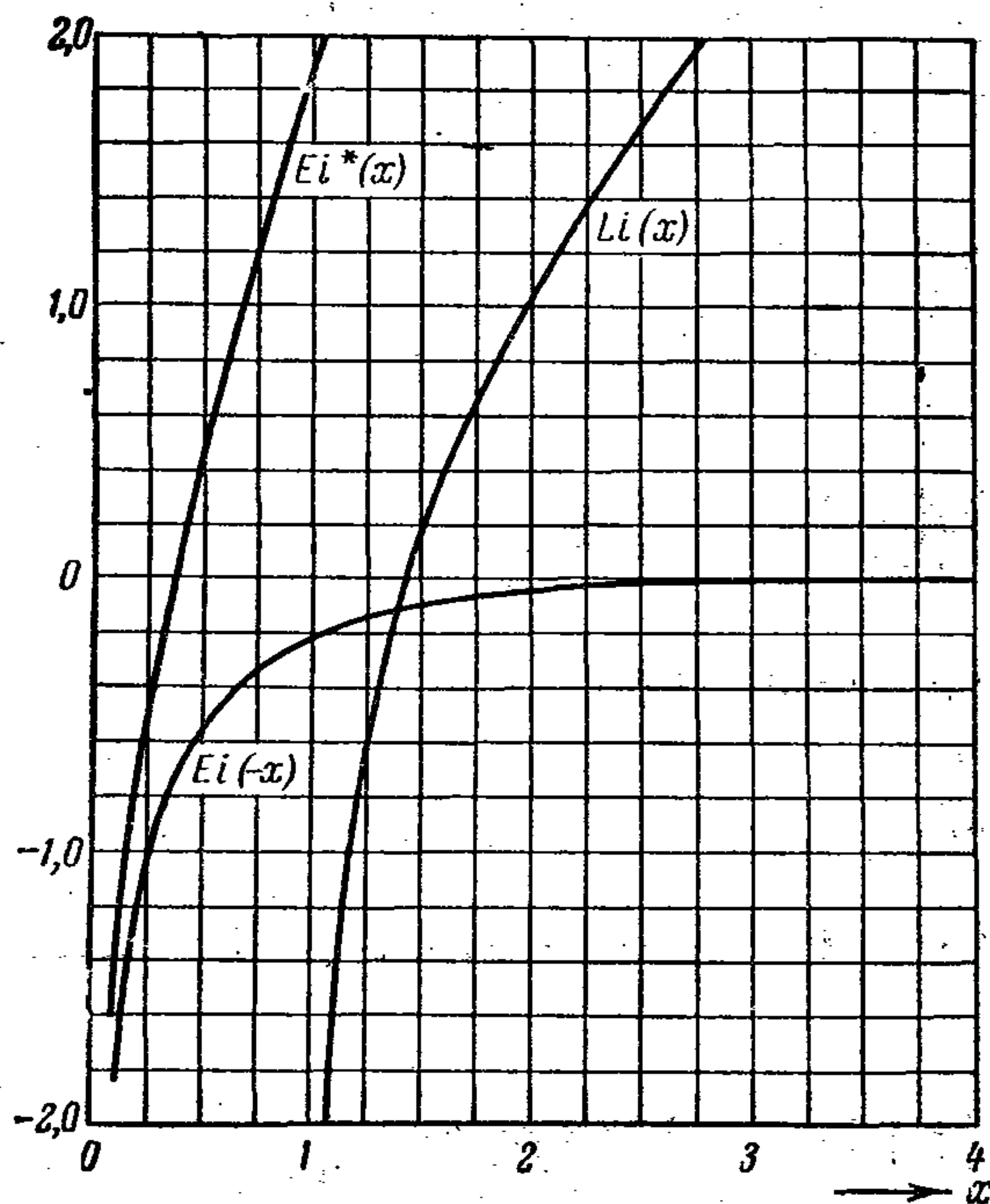


Рис. 26. Интегральная показательная функция и интегральный логарифм.

где x — действительная положительная величина (рис. 26, 27, таблица 15):

$$\text{Ei}(-x) = C + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot n!}.$$

$\text{Ei}(z)$ является бесконечнозначной функцией z с единственной конечной точкой ветвления $z=0$. Значение этой функции после m обходов вокруг точки ветвления определяется формулой

$$\text{Ei}(ze^{2m\pi i}) = \text{Ei}(z) + 2m\pi i$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

[т. е. циклическая постоянная функции $\text{Ei}(z)$ равна $2\pi i$]. Выполняющееся при $z \neq 0$ разложение в ряд

$$\text{Ei}(z) = C - \pi i + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot n!}$$

(C — постоянная Эйлера) указывает на логарифмическую особенность в начале координат. [Иногда употребляются обозначения

$$\text{Ei}^+(x) = \text{Ei}(x + i0),$$

$$\text{Ei}^-(x) = \text{Ei}(x - i0).]$$

Действительная ветвь функции $\text{Ei}(z)$ получается при $z = -x$,

Иногда рассматривается функция $Ei^*(z) = Ei(z) + \pi i$, которую обозначают также через $\overline{Ei}(z)$. Ее действительная ветвь получается при действительных положительных значениях аргумента $z = x$ (рис. 26, 27, таблица 15);

$$Ei^*(x) = C + \ln x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}.$$

Действительные ветви обеих этих функций допускают интегральные представления:

$$Ei(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^t}{t} dt,$$

$$Ei^*(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt,$$

где второй интеграл понимается как главное значение в смысле Коши:

$$\int_{-\infty}^x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^x \right].$$

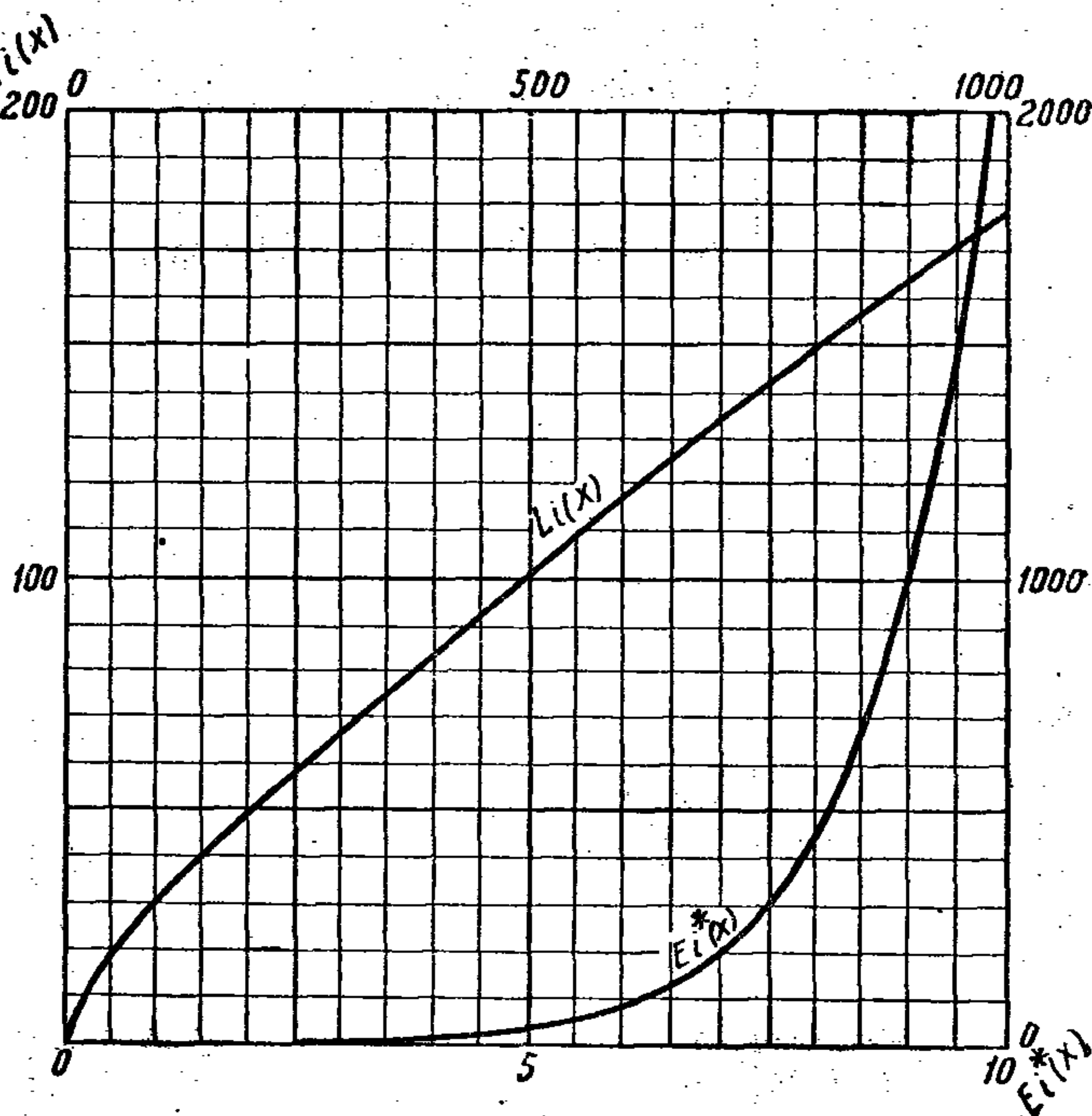


Рис. 27. Функции $Ei^*(x)$ и $Li(x)$.

При $x \gg 1$ получается следующая асимптотика:

$$Ei(-x) \approx \frac{e^{-x}}{-x} \left(1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots \right), \quad Ei^*(x) \approx \frac{e^x}{x} \left(1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \frac{3!}{x^3} + \dots \right).$$

При $x > 2$ справедлива приближенная формула:

$$Ei(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} \left\{ 0,9999965 - 0,9989710 \frac{1}{x} + 1,9487646 \frac{1}{x^2} - 4,9482092 \frac{1}{x^3} + \right. \\ \left. + 11,7850792 \frac{1}{x^4} - 20,4523840 \frac{1}{x^5} + 21,1491469 \frac{1}{x^6} - 9,5240410 \frac{1}{x^7} \pm 0,35 \cdot 10^{-5} \right\}.$$

[При малых x , как видно из разложений,

$$Ei^*(x) \approx Ei(-x) \approx \ln \gamma x$$

(γ — постоянная Эйлера).]

1.2. Интегральный логарифм определяется как

$$li(z) = \int_0^z \frac{dt}{\ln t}.$$

Он связан с $Ei(z)$ соотношениями

$$li(z) = Ei(\ln z), \quad Ei(z) = li(e^z).$$

В частности, для действительных положительных значений аргумента $z = x$ можно определить действительную функцию (рис. 26, 27):

$$Li(x) = \begin{cases} li(x) = Ei(\ln x) & \text{при } 0 < x < 1, \\ li(x) + \pi i = Ei^*(\ln x) & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Таблица 15. Интегральные показательные функции $Ei^*(x)$ и $-Ei(-x)$

x	$Ei^*(x)$	$-Ei(-x)$	x	$Ei^*(x)$	$-Ei(-x)$	x	$Ei^*(x)$	$-Ei(-x)$
0,00	$-\infty$	$+\infty$	0,50	+ 0,	+ 0,	1,0	+ 1,8951	+ 1
01	4,0179	4,0379	51	4542 + 328	5598 - 120	1	2,1674	25
02	3,3147	3,3547	52	5195 322	5478 116	2	2,4421	46
03	2,8991	2,9591	53	5517 319	5362 112	3	2,7214	65
04	2,6013	2,6813	54	5836 317	5250 110	4	3,0072	83
0,05	- 2,3679 - 387	+ 2,4679 + 387	0,55	6153 + 314	5140 106	1,5	+ 3,3013 + 100	10002 + 247
06	2,1753 272	2,2953 272	56	6467 311	5034 - 104	6	3,6053 116	08631 204
07	2,0108 201	2,1508 201	57	6778 309	4930 100	7	3,9210 133	07465 170
08	1,8669 154	2,0269 154	58	7087 307	4830 98	8	4,2499 149	06471 142
09	1,7387 122	1,9187 122	59	7394 305	4732 96	9	4,5937 167	05620 120
0,10	- 1,6228 - 99	+ 1,8229 + 99	0,60	7699 + 303	4636 92	2,0	+ 4,9542 + 185	04890 + 101
11	1,5170 82	1,7371 82	61	8002 300	4544 - 90	1	5,3332 204	04261 86
12	1,4193 69	1,6595 69	62	8302 299	4454 88	2	5,7326 224	03719 73
13	1,3287 58	1,5889 58	63	8601 297	4366 86	3	6,1544 245	03250 62
14	1,2438 50	1,5241 50	64	8898 296	4280 83	4	6,6007 268	02844 53
0,15	- 1,1641 - 44	+ 1,4645 + 44	0,65	9194 + 294	4197 82	2,5	+ 7,0738 + 292	02491 + 46
16	1,0887 38	1,4092 39	66	9488 292	4115 - 79	6	7,5761 318	02185 39
17	1,0172 34	1,3578 34	67	9780 291	4036 77	7	8,1103 347	01918 34
18	0,9491 30	1,3098 30	68	*0071 290	3959 76	8	8,6793 377	01686 29
19	0,8841 27	1,2649 27	69	0361 288	3883 73	9	9,2860 410	01482 25
0,20	- 0,8218 - 24	+ 1,2227 + 25	0,70	0649 + 287	3810 72	3,0	+ 9,9338 + 446	013048 + 221
21	0,7619 22	1,1829 22	71	0936 286	3738 - 70	1	10,6263 485	011494 192
22	0,7042 20	1,1454 20	72	1222 285	3668 69	2	11,3673 527	010133 167
23	0,6485 18	1,1099 18	73	1507 284	3599 67	3	12,1610 572	008939 145
24	0,5947 17	1,0762 17	74	1791 282	3532 65	4	13,0121 622	007891 127
0,25	- 0,5425 - 15	+ 1,0443 + 16	0,75	2073 + 282	3467 64	3,5	+ 13,9254 + 675	006970 + 111
26	0,4919 + 506	1,0139 - 305	76	2355 281	3403 - 62	6	14,9063 734	006160 97
27	0,4427 492	0,9849 290	77	2636 280	3341 61	7	15,9606 797	005448 85
28	0,3949 478	0,9573 276	78	2916 279	3280 59	8	17,0948 866	004820 74
29	0,3482 467	0,9309 264	79	3195 279	3221 58	9	18,3157 941	004267 65
0,30	- 0,3027 + 445	+ 0,9057 - 242	0,80	3474 + 278	3163 57	4,0	+ 19,6309 + 1023	003779 + 57
31	0,2582 435	0,8815 232	81	3752 277	3106 - 56	1	21,0485 1112	003349 50
32	0,2147 426	0,8583 222	82	4029 277	3050 54	2	22,5774 1209	002969 44
33	0,1721 417	0,8361 214	83	4306 276	2996 53	3	24,2274 1314	002633 39
34	0,1304 410	0,8147 205	84	4582 275	2943 52	4	26,0090 1429	002336 34
0,35	- 0,0894 + 401	+ 0,7942 - 197	0,85	4857 + 275	2891 51	4,5	+ 27,9337 + 1555	002073 + 30
36	0,0493 395	0,7745 191	86	5132 275	2840 - 50	6	30,0141 1691	001841 27
37	- 0,0098 388	0,7554 183	87	5407 274	2790 48	7	32,2639 1840	001635 23
38	+ 0,0290 382	0,7371 177	88	5681 274	2742 48	8	34,6979 2003	001453 21
39	0,0672 376	0,7194 170	89	5955 273	2694 47	9	37,3325 2180	001291 18
0,40	+ 0,1048 + 370	+ 0,7024 - 165	0,90	6228 + 273	2647 45	5,0	40,1853 + 2373	001148 + 16
41	0,1418 365	0,6859 159	91	6501 273	2602 - 45	6	+ 85,9898	3601 (-3)
42	0,1783 360	0,6700 154	92	6774 273	2557 44	7	191,505	1155 (-3)
43	0,2143 355	0,6546 149	93	7047 272	2513 43	8	440,380	3767 (-4)
44	0,2498 351	0,6397 144	94	7319 272	2470 41	9	1037,88	1245 (-4)
0,45	+ 0,2849 + 346	+ 0,6253 - 139	0,95	7591 + 273	2429 42	10	2492,23	4157 (-5)
46	0,3195 342	0,6114 135	96	7864 272	2387 - 40	11	+ 6071,41	1400 (-5)
47	0,3537 339	0,5979 131	97	8136 271	2347 39	12	14959,5	4751 (-6)
48	0,3876 335	0,5848 127	98	8407 271	2308 39	13	37197,7	1622 (-6)
49	0,4211 331	0,5721 123	99	8679 272	2269 38	14	93192,5	5566 (-7)
0,50	+ 0,4542	+ 0,5598	1,00	8951	2231 37	15	234956	1918 (-7)
				+ 1,	+ 0,			+ 0,

2. Интегральный синус и интегральный косинус

2.1. Интегральный синус $si(z)$ и интегральный косинус $ci(z)$ определяются формулами

$$si(z) = \frac{1}{2i} [Ei(iz) - Ei(-iz)] = \int_{\infty}^z \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$ci(z) = \frac{1}{2} [Ei(iz) + Ei(-iz)] = \int_{\infty}^z \frac{\cos t}{t} dt,$$

причем путь интегрирования должен быть выбран так, чтобы в начале пути $\lim_{t \rightarrow \infty} \arg t = 0$ и $\operatorname{Im} t$ оставалась вдоль него ограниченной.

Употребляют также следующие обозначения для этих функций:

$$Si(z) = si(z) + \frac{\pi}{2} = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt, \quad Ci(z) = ci(z).$$

Функция $si(z)$ является целой функцией z , а $ci(z)$ — бесконечнозначной аналитической функцией z с единственной конечной точкой ветвления $z=0$.

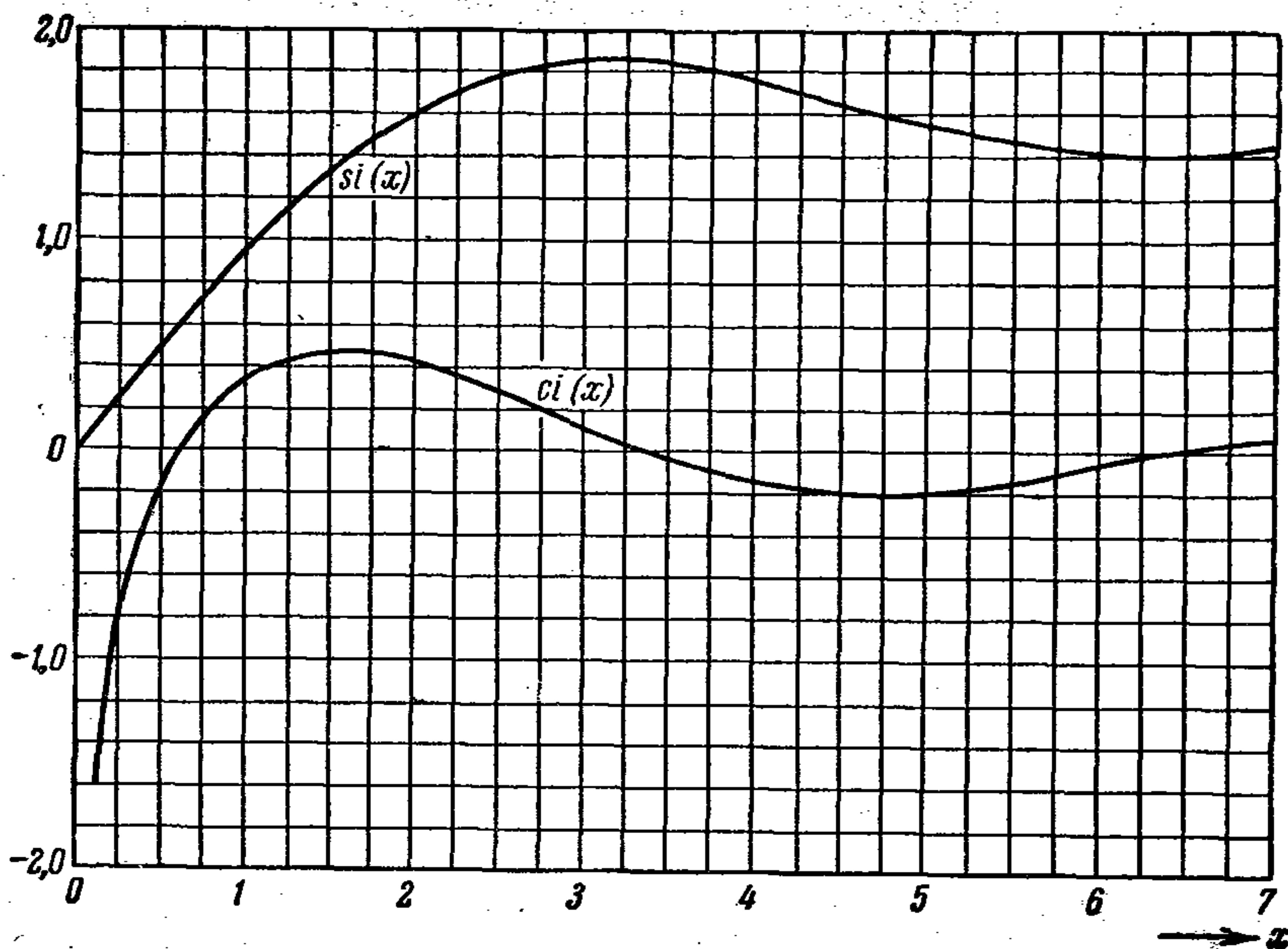


Рис. 28. Интегральный синус и интегральный косинус.

Значение функции $ci(z)$ после m обходов вокруг точки ветвления определяется формулой

$$ci(ze^{m\pi i}) = ci(z) + m\pi i \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

[т. е. циклическая постоянная этой функции равна πi].

Имеют место представления

$$si(z) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad ci(z) = \ln \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)(2n)!}.$$

Отсюда видно, что

$$\text{ci}(z) - \ln \gamma z = \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

является целой функцией z .

Функция $\text{si}(x)$ принимает действительные значения при всех действительных значениях x , а $\text{ci}(x)$ — при действительных $x > 0$ (рис. 28, таблица 16). Эти действительные функции $\text{si}(x)$ и $\text{ci}(x)$ получаются, если для соответствующего определяющего интеграла путь интегрирования взят вдоль действительной оси, начиная с $+\infty$. Имеем:

$$\text{si}(-x) = -\text{si}(x) - \pi, \quad \text{Ci}(-x) = -\text{Ci}(x).$$

Асимптотическое поведение при $x \gg 1$ дается формулами

$$\begin{aligned} \text{si}(x) &\approx -\frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) - \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right), \\ \text{ci}(x) &\approx \frac{\sin x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) - \frac{\cos x}{x} \left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right), \end{aligned}$$

и, следовательно, в качестве первого приближения получим:

$$\text{si}(x) \approx -\frac{\cos x}{x}, \quad \text{ci}(x) \approx \frac{\sin x}{x}.$$

[Обе функции имеют бесчисленное количество экстремумов (таблица 17).]

В прямоугольной системе координат (c, s) кривая $c = \text{ci}(x)$, $s = \text{si}(x)$ (x — действительный положительный параметр) представляет собой так называемую

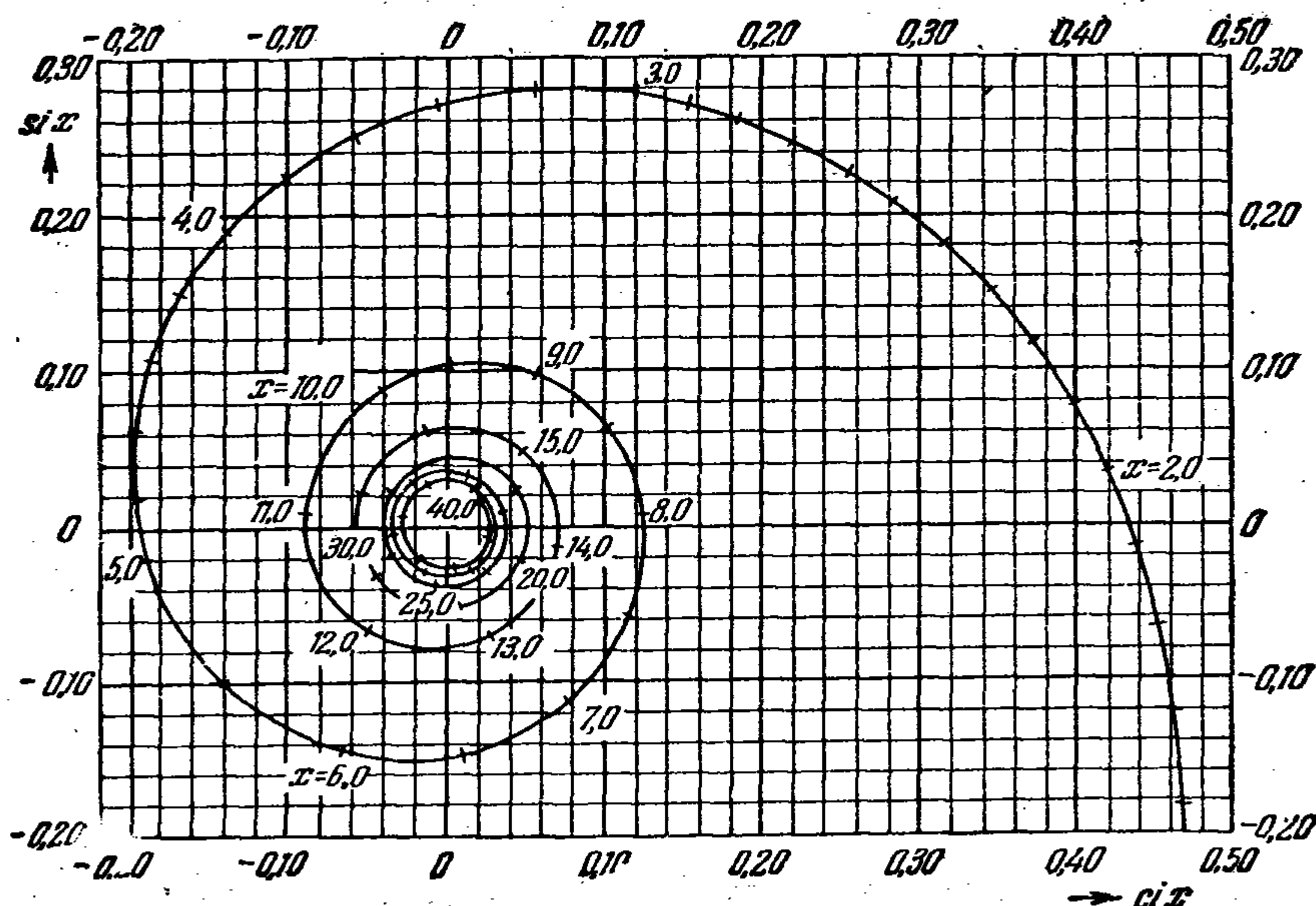


Рис. 29. sici-спираль.

ую sici-спираль (рис. 29). Длина дуги от начальной точки ($x=0$) до точки $(\text{ci } x, \text{si } x)$ равна $\ln x$, а кривизна κ в этой точке имеет величину $\kappa = x$. Кривизна, следовательно, возрастает по экспоненциальному закону с возрастанием длины дуги.

2.2. Вводят функции $\text{shi}(z)$, $\text{chi}(z)$, называемые интегральными гиперболическими синусом и косинусом:

$$\text{shi}(z) = \int_0^z \frac{\sinh t}{t} dt = -i \text{Si}(iz),$$

$$\text{chi}(z) = C + \ln z + \int_0^z \frac{\cosh t - 1}{t} dt = \text{Ci}(iz) - \frac{i\pi}{2}.$$

При этом $\text{shi}(z)$ — действительная функция для всех действительных, а $\text{chi}(z)$ — для действительных положительных значений $z = x$. [При $x > 0$ имеем:

$$\text{shi}(x) = \frac{\text{Ei}^*(x) - \text{Ei}(-x)}{2}, \quad \text{chi}(x) = \frac{\text{Ei}^*(x) + \text{Ei}(-x)}{2}, \quad \text{chi}(x) + \text{shi}(x) = \text{Li } e^x,$$

откуда получаются разложения

$$\text{shi}(x) = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots, \quad \text{chi}(x) = \ln \gamma x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

Функция $\text{shi}(x)$ является нечетной:

$$\text{shi}(-x) = -\text{shi}(x).]$$

3. Некоторые интегральные формулы

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-mt}}{a+t} dt = -e^{ma} \text{Ei}[-m(a+x)] \quad (m > 0, a > 0, x+a > 0),$$

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{im(b+t)}}{a+t} dt = -e^{im(b-a)} \text{Ei}[im(a+x)] \quad \left(\begin{array}{l} m > 0, a > 0, x+a > 0, \\ \arg[im(a+x)] = \pi/2 \end{array} \right),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-at}{t^2+a^2} e^{imt} dt = -e^{ma} \text{Ei}(-ma) \quad (m > 0, a > 0),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t+at}{t^2+a^2} e^{imt} dt = -e^{-ma} [\text{Ei}^*(ma) - \pi i],$$

$$\int_0^x \text{Ei}(-mt) dt = x \text{Ei}(-mx) - \frac{1-e^{-mx}}{m} \quad (m > 0, x > 0),$$

$$\int_0^x \text{Ei}(imt) dt = x \text{Ei}(imx) + \frac{1-e^{imx}}{im} \quad \left(\begin{array}{l} m > 0, x > 0, \\ \arg(imt) = \arg(imx) = \pi/2 \end{array} \right),$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \text{ci}(qt) dt = -\frac{1}{2p} \ln \left(1 + \frac{p^2}{q^2} \right) \quad (p > 0, q > 0),$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \text{si}(qt) dt = -\frac{1}{p} \text{arctg} \frac{p}{q},$$

$$\int_0^{+\infty} \cos t \text{ci } t dt = \int_0^{+\infty} \sin t \text{si } t dt = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{+\infty} \text{ci}^2(t) dt = \int_0^{+\infty} \text{si}^2(t) dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \text{ci}(t) \text{si}(t) dt = -\ln 2.$$

Таблица 16. Интегральный синус Si (x) и интегральный косинус Ci (x)

x	Si (x)	Ci (x)	x	Si (x)	Ci (x)	x	Si (x)	Ci (x)
0,00	+ 0, 000000	— ∞	0,50	+ 0, 4931	— 0, 1778	1,0	+ 0, 9461	+ 0,3374 — 541
01	010000	4,0280	51	+ 96 5027	+ 173 1605	2	— 121 *1080	— 406 0,4205
02	020000	3,3349	52	96 5123	169 1436	4	138 2562	406 0,4620
03	029999	2,9296	53	95 5218	165 1271	6	153 3892	314 0,4717
04	039996	2,6421	54	95 5313	161 1110	8	164 5058	244 0,4568
0,05	04999	— 2,4191 — 388	0,55	+ 95 5408	+ 153 0953	2,0	171 6054	— 187 + 0,4230 — 140
06	05999	2,2371 273	56	+ 95 5503	+ 150 0800	2	— 175 6876	98 0,3751
07	06998	2,0833 202	57	95 5598	146 0650	4	174 7525	61 0,3173
08	07997	1,9501 155	58	94 5693	142 0504	6	170 8004	— 28 0,2533
09	08996	1,8328 123	59	94 5787	139 0362	8	163 8321	+ 1 0,1865
0,10	09994	— 1,7279 — 100	0,60	+ 94 5881	+ 136 0223	3,0	152 8487	+ 26 + 0,1196
11	10993	1,6331 83	61	94 5975	133 0087	2	— 139 8514	47 + 0,0553
12	11990	1,5466 70	62	94 6069	130 *0046	4	123 8514	64 — 0,0045
13	12988	1,4672 59	63	93 6163	127 0176	6	105 8419	77 0,0580
14	13985	1,3938 51	64	93 6256	123 0303	8	86 8219	87 0,1038
0,15	14981	— 1,3255 — 45	0,65	+ 93 6349	+ 122 0426	4,0	66 7582	+ 92 — 0,1410
16	15977	1,2618 39	66	93 6442	118 0548	2	— 46 7184	94 0,1690
17	16973	1,2020 35	67	93 6535	116 0666	4	27 7184	93 0,1877
18	17968	1,1457 31	68	92 6628	113 0782	6	8 6758	89 0,1970
19	18962	1,0925 28	69	92 6720	110 0895	8	+ 9 6325	82 0,1976
0,20	1996	— 1,0422 — 25	0,70	+ 92 6812	+ 108 1005	5,0	25 5900	+ 724 — 0,19003
21	2095	0,9944 23	71	92 6904	106 1113	2	— 108 5137	612 0,17525
22	2194	0,9490 21	72	91 6996	103 1219	4	49 5137	486 0,15439
23	2293	0,9057 19	73	92 7087	101 1322	6	58 4823	352 0,12867
24	2392	0,8643 18	74	91 7179	99 1423	8	64 4567	215 0,09944
0,25	2491	— 0,8247 — 16	0,75	+ 90 7270	+ 96 1522	6,0	67 4247	+ 79 — 0,06806
26	2590	0,7867 364	76	91 7360	94 1618	2	— 67 4187	51 0,03587
27	2689	0,7503 350	77	90 7451	93 1712	4	65 4187	171 — 0,00418
28	2788	0,7153 337	78	90 7541	90 1805	6	61 4192	278 + 0,02582
29	2886	0,6816 324	79	90 7631	88 1895	8	55 4258	368 0,05308
0,30	2985	— 0,6492 + 313	0,80	+ 90 7721	+ 86 1983	7,0	47 4379	— 439 + 0,07670
31	3083	0,6179 302	81	89 7811	84 2069	2	— 47 4751	490 0,09596
32	3182	0,5877 292	82	89 7900	82 2153	4	28 4751	520 0,11036
33	3280	0,5585 281	83	89 7989	81 2235	6	17 4983	529 0,11960
34	3378	0,5304 273	84	88 8078	78 2316	8	6 5233	518 0,12359
0,35	3476	— 0,5031 + 264	0,85	+ 88 8166	+ 77 2394	8,0	4 5489	— 487 + 0,12243
36	3574	0,4767 256	86	88 8254	75 2471	2	— 14 5742	440 0,11644
37	3672	0,4511 248	87	88 8342	73 2546	4	22 5981	379 0,10607
38	3770	0,4263 241	88	88 8430	72 2619	6	30 6198	306 0,09194
39	3867	0,4022 234	89	87 8518	70 2691	8	36 6386	224 0,07476
0,40	3965	— 0,3788 + 227	0,90	+ 87 8605	+ 68 2761	9,0	40 6538	— 138 + 0,05535
41	4062	0,3561 220	91	86 8692	67 2829	2	— 43 6650	51 0,03455
42	4159	0,3341 215	92	87 8778	65 2896	4	44 6720	35 + 0,01325
43	4256	0,3126 208	93	86 8865	63 2961	6	43 6747	116 — 0,00771
44	4353	0,2918 203	94	85 8951	62 3024	8	40 6732	189 0,02752
0,45	4450	— 0,2715 + 198	0,95	+ 86 9036	+ 61 3086	10,0	37 6676	+ 252 — 0,04546
46	4546	0,2517 192	96	85 9122	59 3147		— 32 6583	
47	4643	0,2325 187	97	85 9207	57 3206		+ 1, + 1,	
48	4739	0,2138 182	98	85 9292	56 3263			
49	4835	0,1956 178	99	84 9377	55 3319			
0,50	4931	— 0,1778	1,00	+ 0, 9461	+ 0, 3374			

Продолжение табл. 16

x	$Si(x)$		$CI(x)$		x	$Si(x)$		$CI(x)$		x	$Si(x)$		$CI(x)$	
	+ 1,					+ 1,					+ 1,			
10,0	6583	— 200	— 0,04546	+ 1614	25	5315	— 0,00685	75	5586	— 0,00533				
10,5	6229	— 94	— 0,07828	+ 2256	26	5449	+ 0,02830	80	5723	— 0,01240				
11,0	5783	+ 23	— 0,08956	+ 2323	27	5803	+ 0,03572	85	5824	— 0,001935				
11,5	5357	+ 125	— 0,07857	+ 1849	28	6047	+ 0,01087	90	5757	+ 0,009986				
12,0	5050	+ 190	— 0,04978	+ 987	29	5973	— 0,02195	95	5630	+ 0,007110				
12,5	4923	+ 205	— 0,01141	— 35	30	5668	— 0,03303	100	5622	— 0,005149				
13,0	4994	+ 172	+ 0,02676	— 970	31	5418	— 0,01395	110	5799	— 0,000320				
13,5	5229	+ 101	+ 0,05576	— 1609	32	5442	+ 0,01639	120	5640	+ 0,004781				
14,0	5562	+ 11	+ 0,06940	— 1828	33	5703	+ 0,03026	130	5737	— 0,007132				
14,5	5907	— 74	+ 0,06554	— 1604	34	5953	+ 0,01626	140	5722	+ 0,007011				
15,0	6182	— 137	+ 0,04628	— 1019	35	5969	— 0,01148	150	5662	— 0,004800				
15,5	6326	— 164	+ 0,01719	— 232	36	5751	— 0,02741	160	5769	+ 0,001409				
16,0	6313	— 150	— 0,01420	+ 560	37	5506	— 0,01792	170	5653	+ 0,002010				
16,5	6156	— 102	— 0,04031	+ 1172	38	5455	+ 0,00713	180	5741	— 0,004432				
17,0	5901	— 33	— 0,05524	+ 1472	39	5633	+ 0,02451	190	5704	+ 0,005250				
17,5	5615	+ 41	— 0,05610	+ 1407	40	5870	+ 0,01902	200	5684	— 0,004378				
18,0	5366	+ 100	— 0,04348	+ 1013	41	5949	— 0,00328	300	5709	— 0,003332				
18,5	5213	+ 133	— 0,02111	+ 400	42	5808	— 0,02157	400	5721	— 0,002124				
19,0	5186	+ 132	+ 0,00515	— 275	43	5583	— 0,01962	500	5726	— 0,0009320				
19,5	5286	+ 100	+ 0,02883	— 850	44	5481	— 0,00011	600	5725	+ 0,0000764				
20,0	5482	+ 46	+ 0,04442	— 1195	45	5587	+ 0,01863	700	5720	+ 0,0007788				
20,5	5723	— 16	+ 0,04859	— 1239	46	5798	+ 0,01979	800	5714	+ 0,001118				
21,0	5949	— 72	+ 0,04089	— 986	47	5918	+ 0,00307	900	5707	+ 0,001109				
21,5	6106	— 108	+ 0,02373	— 510	48	5845	— 0,01571	10 ³	5702	+ 0,000826				
22,0	6161	— 116	+ 0,00164	+ 65	49	5651	— 0,01957	10 ⁴	5709	— 0,0000306				
22,5	6104	— 97	— 0,01986	+ 600	50	5516	— 0,00563	10 ⁵	5708	+ 0,0000004				
23,0	5955	— 55	— 0,03566	+ 968	55	5707	— 0,01817	10 ⁶	5708	— 0,0000004				
23,5	5752	— 2	— 0,04221	+ 1089	60	5867	— 0,00481	10 ⁷	5708	+ 0,0000000				
24,0	5547	+ 49	— 0,03833	+ 946	65	5792	+ 0,01285		+ 1,					
24,5	5390	+ 87	— 0,02539	+ 582	70	5616	+ 0,01092	∞	π/2	0				
25,0	5315	+ 102	— 0,00685	+ 93	75	5586	— 0,00533							
	+ 1,					+ 1,								

Таблица 17. Экстремумы функций $ci(x)$ и $si(x)$

$\frac{x}{\pi}$	Max. Min. $ci(x)$	$\frac{x}{\pi}$	Max. Min. $si(x)$	$\frac{x}{\pi}$	Max. Min. $si(x)$
0,5	+ 0,47200	1	+ 0,28114	16	— 0,019879
1,5	— 0,19841	2	— 0,15264	17	+ 0,018711
2,5	+ 0,12377	3	+ 0,10396	18	— 0,017673
3,5	— 0,089564	4	— 0,078635	19	+ 0,016744
4,5	+ 0,070065	5	+ 0,063168	20	— 0,015907
5,5	— 0,057501	6	— 0,052762	21	+ 0,015151
6,5	+ 0,048742	7	+ 0,045289	22	— 0,014463
7,5	— 0,042292	8	— 0,039665	23	+ 0,013834
8,5	+ 0,037345	9	+ 0,035280	24	— 0,013258
9,5	— 0,033433	10	— 0,031767		
10,5	+ 0,030260	11	+ 0,028889		
11,5	— 0,027637	12	— 0,026489		
12,5	+ 0,025432	13	+ 0,024456		
13,5	— 0,023552	14	— 0,022713		
14,5	+ 0,021931	15	+ 0,021201		
15,5	— 0,020519				

ВІІ. ІНТЕГРАЛ ОШИБОК І СВ'ЯЗАННІ З НИМ ФУНКЦІЇ

1. Інтеграл ошибок

1.1. Інтеграл ошибок $\Phi(z)$ визначається рівністю

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = \int_0^{z^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2i}} \int_0^{z^2} H_{-1/2}^{(2)}(-it) dt$$

(визначення функцій $\gamma(a, z)$ і $H_{\nu}^{(2)}(z)$ см. відповідно в V, С і XIII, А).

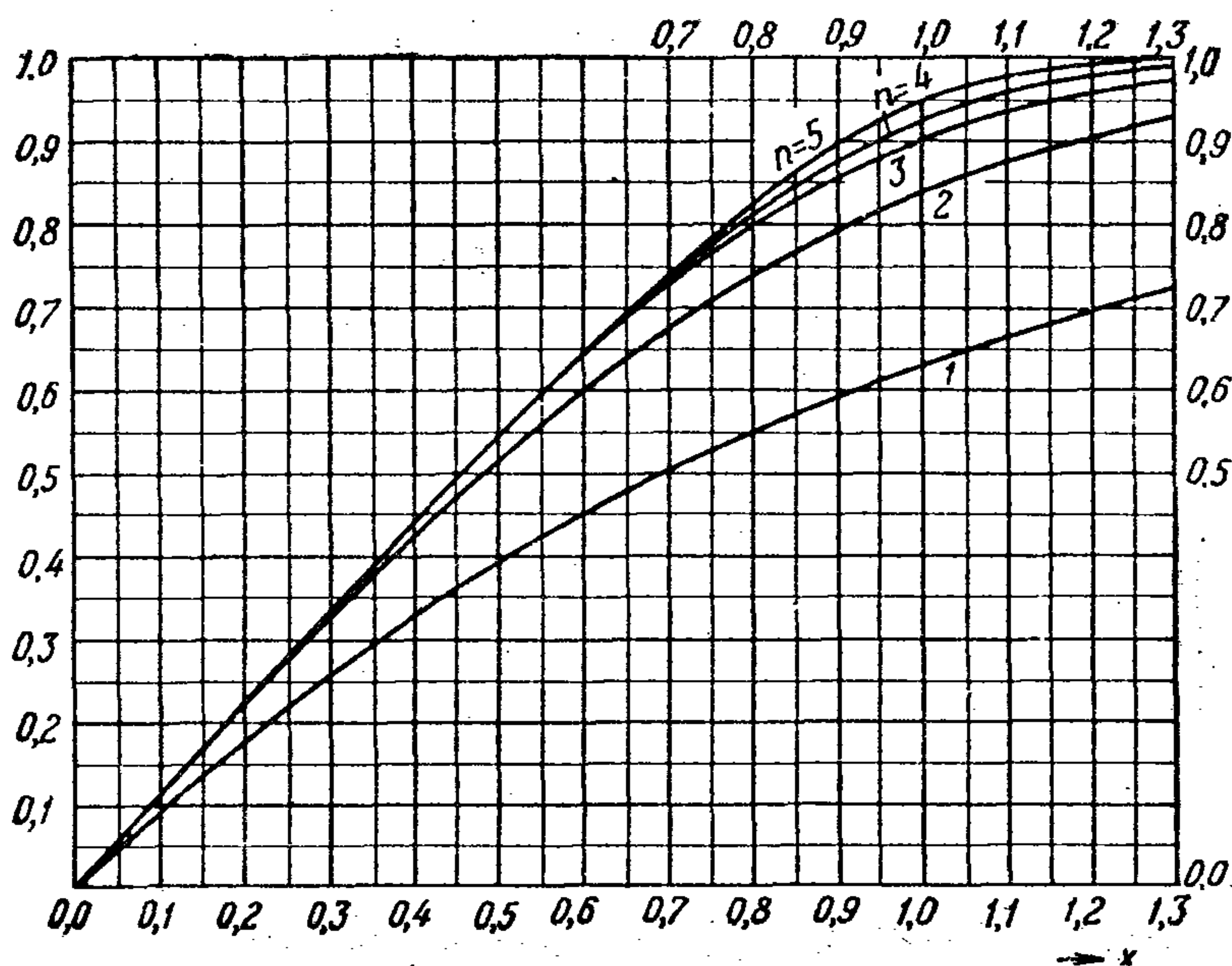


Рис. 30. Функції $E_n(x)$; $E_2(x) = \Phi(x)$.

Інтеграл ошибок *) являється цілою функцією від z , причому

$$\Phi(-z) = -\Phi(z).$$

Для дійсних значень аргумента $z = x$ інтеграл ошибок приймає дійсні значення (рис. 30, таблиця 18). В частині, маємо:

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

*) Цю функцію називають часто інтегралом вероятности ошибок или інтегралом вероятности. — Прим. ред.

[Часто встречаются также производные интеграла ошибок (рис. 31, таблица 19):

$$\Phi_1(x) = \Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2};$$

$$\Phi_{n+1}(x) = \Phi^{(n+1)}(x) = 2^n \Phi_1(x) \left\{ (-x)^n - n \frac{n-1}{4} (-x)^{n-2} + \right. \\ \left. + n \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{32} (-x)^{n-4} - \dots \right\}.$$

Из представлений для $\gamma(a, z)$ получаем для $\Phi(z)$ степенные ряды

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} z^{2n+1},$$

а в секторе $-\frac{3\pi}{4} + \varepsilon \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) имеет место асимптотическое разложение для $|z| \gg 1$:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \{1 - \Phi(z)\} \approx \frac{e^{-z^2}}{2z} \left\{ 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2z^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z^2)^3} + \dots \right\}.$$

При этом для положительных действительных значений аргумента $z = x$ ошибка,

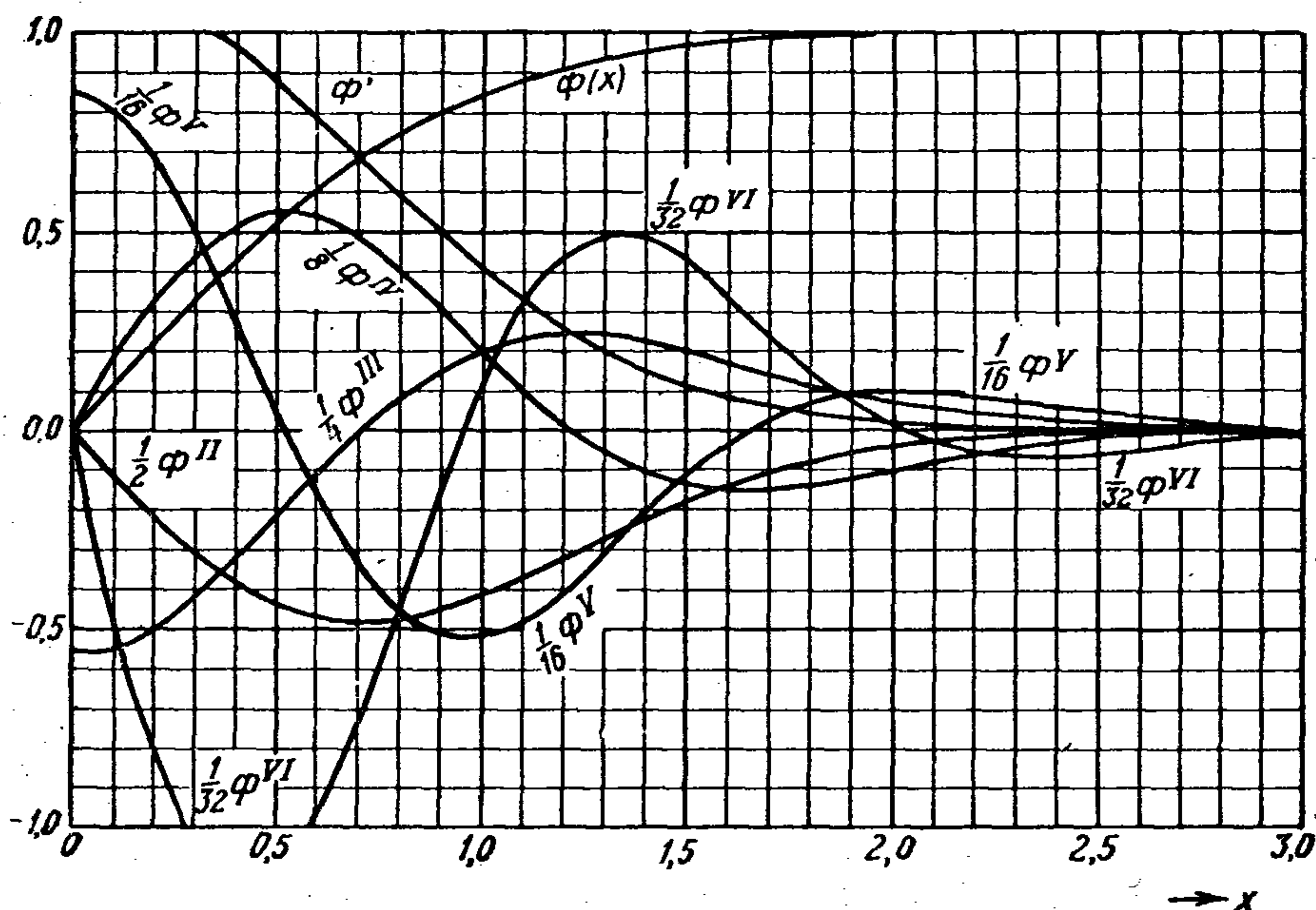


Рис. 31. Производные интеграла ошибок.

получающаяся при обрывании ряда, по абсолютной величине меньше первого отбрасываемого члена и имеет тот же знак (таблица 20).

Обобщением интеграла ошибок являются функции $E_n(z)$, определяемые равенством (рис. 30)

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right) E_n(z) = \frac{1}{n} \gamma\left(\frac{1}{n}, z^n\right) = \frac{1}{n} \int_0^{z^n} e^{-t} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \int_0^z e^{-t^n} dt$$

[в частности,

$$E_1(z) = 1 - e^{-z}, \quad E_2(z) = \Phi(z)].$$

Для функций $E_n(z)$ легко получить степенные ряды и асимптотику из представлений для $\gamma(a, z)$. [А именно:

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) E_n(z) = z - \frac{z^{n+1}}{1!(n+1)} + \frac{z^{2n+1}}{2!(2n+1)} - \frac{z^{3n+1}}{3!(3n+1)} + \dots,$$

и при действительных положительных $x \gg 1$

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) [1 - E_n(x)] \approx \frac{e^{-x^n}}{nx^{n-1}} \left\{ 1 - \frac{n-1}{nx^n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{(nx^n)^2} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{(nx^n)^3} + \dots \right\}.$$

1.2. В статистике обычно принимают несколько иную нормировку интеграла ошибок. Именно, полагают (таблица 22)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

В частности имеем:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

Производная от этой функции равна (таблица 22)

$$\phi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Кроме этих обозначений, употребляются еще следующие *):

$$\Theta(x) = H(x) = \Phi(x),$$

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(x),$$

$$\operatorname{Erfc}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - \Phi(x)), \quad \alpha(x) = 2\Phi(x) - 1.$$

*) Часто рассматривается также функция (таблица 21)

$$y = \int_0^x et^2 dt = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(ix),$$

которая обозначается обычно через $\operatorname{Erfi}(x)$. — Прим. ред.

Т а б л и ц а 18. Интеграл ошибок $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,50	0,52050	1,00	0,84270	1,50	0,6611	2,00	0,5322	2,50	0,9593
01	01128	51	52924	01	84681	51	6728	01	5525	51	9614
02	02256	52	53790	02	85084	52	6841	02	5719	52	9635
03	03384	53	54646	03	85478	53	6952	03	5906	53	9654
04	04511	54	55494	04	85865	54	7059	04	6086	54	9672
0,05	05637	0,55	56332	1,05	86244	1,55	7162	2,05	6258	2,55	9689
06	06762	56	57162	06	86614	56	7263	06	6423	56	9706
07	07886	57	57982	07	86977	57	7360	07	6582	57	9722
08	09008	58	58792	08	87333	58	7455	08	6734	58	9736
09	10128	59	59594	09	87680	59	7546	09	6880	59	9751
0,10	11246	0,60	60386	1,10	88021	1,60	7635	2,10	7021	2,60	97640
11	12362	61	61168	11	88353	61	7721	11	7155	61	97767
12	13476	62	61941	12	88679	62	7804	12	7284	62	97888
13	14587	63	62705	13	88997	63	7884	13	7407	63	98003
14	15695	64	63459	14	89308	64	7962	14	7525	64	98112
0,15	16800	0,65	64203	1,15	89612	1,65	8038	2,15	7639	2,65	98215
16	17901	66	64938	16	89910	66	8110	16	7747	66	98313
17	18999	67	65663	17	90200	67	8181	17	7851	67	98406
18	20094	68	66378	18	90484	68	8249	18	7951	68	98494
19	21184	69	67084	19	90761	69	8315	19	8046	69	98578
0,20	22270	0,70	67780	1,20	91031	1,70	8379	2,20	8137	2,70	98657
21	23352	71	68467	21	91296	71	8441	21	8224	71	98732
22	24430	72	69143	22	91553	72	8500	22	8308	72	98803
23	25502	73	69810	23	91805	73	8558	23	8388	73	98870
24	26570	74	70468	24	92051	74	8613	24	8464	74	98934
0,25	27633	0,75	71116	1,25	92290	1,75	8667	2,25	8537	2,75	98994
26	28690	76	71754	26	92524	76	8719	26	8607	76	99051
27	29742	77	72382	27	92751	77	8769	27	8674	77	99105
28	30788	78	73001	28	92973	78	8817	28	8738	78	99156
29	31828	79	73610	29	93190	79	8864	29	8799	79	99204
0,30	32863	0,80	74210	1,30	93401	1,80	8909	2,30	8857	2,80	99250
31	33891	81	74800	31	93606	81	8952	31	8912	81	99293
32	34913	82	75381	32	93807	82	8994	32	8966	82	99334
33	35928	83	75952	33	94002	83	9035	33	9016	83	99373
34	36936	84	76514	34	94191	84	9074	34	9065	84	99409
0,35	37938	0,85	77067	1,35	94376	1,85	9111	2,35	9111	2,85	99443
36	38933	86	77610	36	94556	86	9147	36	9155	86	99476
37	39921	87	78144	37	94731	87	9182	37	9197	87	99507
38	40901	88	78669	38	94902	88	9216	38	9237	88	99536
39	41874	89	79184	39	95067	89	9248	39	9275	89	99563
0,40	42839	0,90	79691	1,40	95229	1,90	9279	2,40	9311	2,90	99589
41	43797	91	80188	41	95385	91	9309	41	9346	91	99613
42	44747	92	80677	42	95538	92	9338	42	9379	92	99636
43	45689	93	81156	43	95686	93	9366	43	9411	93	99658
44	46623	94	81627	44	95830	94	9392	44	9441	94	99679
0,45	47548	0,95	82089	1,45	95970	1,95	9418	2,45	9469	2,95	99698
46	48466	96	82542	46	96105	96	9443	46	9497	96	99716
47	49375	97	82987	47	96237	97	9466	47	9523	97	99733
48	50275	98	83423	48	96365	98	9489	48	9547	98	99750
49	51167	99	83851	49	96490	99	9511	49	9571	99	99765
0,50	52050	1,00	84270	1,50	96611	2,00	9532	2,50	9593	3,00	99779
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,9	0,9	0,99	0,99	0,99	0,99

Таблица 19. Производные интеграла ошибок $\Phi(x)$

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
0,00	+1,1284	—0,0000	—0,5642	+0,0000	+0,8463	—0,0000
0,01	+1,1283	—0,0113	—0,5640	+0,0169	+0,8459	—0,0423
0,02	+1,1279	—0,0226	—0,5635	+0,0338	+0,8446	—0,0845
0,03	+1,1274	—0,0338	—0,5627	+0,0507	+0,8425	—0,1267
0,04	+1,1266	—0,0451	—0,5615	+0,0675	+0,8395	—0,1686
0,05	+1,1256	—0,0563	—0,5600	+0,0843	+0,8357	—0,2103
0,06	+1,1243	—0,0675	—0,5581	+0,1009	+0,8311	—0,2518
0,07	+1,1229	—0,0786	—0,5559	+0,1175	+0,8257	—0,2928
0,08	+1,1212	—0,0897	—0,5534	+0,1340	+0,8194	—0,3335
0,09	+1,1193	—0,1007	—0,5506	+0,1503	+0,8123	—0,3737
0,10	+1,1172	—0,1117	—0,5474	+0,1665	+0,8045	—0,4134
0,11	+1,1148	—0,1226	—0,5439	+0,1825	+0,7958	—0,4525
0,12	+1,1122	—0,1335	—0,5401	+0,1983	+0,7864	—0,4909
0,13	+1,1095	—0,1442	—0,5360	+0,2139	+0,7762	—0,5287
0,14	+1,1065	—0,1549	—0,5316	+0,2293	+0,7652	—0,5658
0,15	+1,1033	—0,1655	—0,5268	+0,2445	+0,7535	—0,6021
0,16	+1,0999	—0,1760	—0,5218	+0,2595	+0,7411	—0,6375
0,17	+1,0962	—0,1864	—0,5164	+0,2742	+0,7280	—0,6721
0,18	+1,0924	—0,1966	—0,5108	+0,2886	+0,7143	—0,7057
0,19	+1,0884	—0,2068	—0,5049	+0,3027	+0,6998	—0,7384
0,20	+1,0841	—0,2168	—0,4987	+0,3166	+0,6847	—0,7701
0,21	+1,0797	—0,2267	—0,4922	+0,3301	+0,6690	—0,8007
0,22	+1,0751	—0,2365	—0,4855	+0,3433	+0,6527	—0,8302
0,23	+1,0702	—0,2462	—0,4785	+0,3562	+0,6358	—0,8587
0,24	+1,0652	—0,2557	—0,4713	+0,3688	+0,6184	—0,8859
0,25	+1,0600	—0,2650	—0,4638	+0,3809	+0,6004	—0,9120
0,26	+1,0546	—0,2742	—0,4560	+0,3928	+0,5819	—0,9368
0,27	+1,0490	—0,2832	—0,4480	+0,4042	+0,5629	—0,9604
0,28	+1,0433	—0,2921	—0,4399	+0,4153	+0,5435	—0,9827
0,29	+1,0374	—0,3008	—0,4314	+0,4260	+0,5236	—1,0038
0,30	+1,0313	—0,3094	—0,4228	+0,4362	+0,5034	—1,0235
0,31	+1,0250	—0,3177	—0,4140	+0,4461	+0,4827	—1,0418
0,32	+1,0186	—0,3259	—0,4050	+0,4555	+0,4617	—1,0588
0,33	+1,0120	—0,3339	—0,3958	+0,4646	+0,4404	—1,0744
0,34	+1,0052	—0,3418	—0,3864	+0,4731	+0,4187	—1,0887
0,35	+0,9983	—0,3494	—0,3769	+0,4813	+0,3968	—1,1015
0,36	+0,9912	—0,3568	—0,3671	+0,4890	+0,3747	—1,1129
0,37	+0,9840	—0,3641	—0,3573	+0,4963	+0,3523	—1,1229
0,38	+0,9767	—0,3711	—0,3473	+0,5031	+0,3298	—1,1315
0,39	+0,9692	—0,3780	—0,3372	+0,5095	+0,3071	—1,1387
0,40	+0,9615	—0,3846	—0,3269	+0,5154	+0,2842	—1,1445
0,41	+0,9538	—0,3911	—0,3166	+0,5208	+0,2613	—1,1488
0,42	+0,9459	—0,3973	—0,3061	+0,5258	+0,2383	—1,1518
0,43	+0,9379	—0,4033	—0,2955	+0,5304	+0,2152	—1,1533
0,44	+0,9298	—0,4091	—0,2849	+0,5344	+0,1922	—1,1534
0,45	+0,9215	—0,4147	—0,2742	+0,5381	+0,1691	—1,1522
0,46	+0,9132	—0,4201	—0,2634	+0,5412	+0,1461	—1,1496
0,47	+0,9047	—0,4252	—0,2525	+0,5439	+0,1231	—1,1457
0,48	+0,8962	—0,4302	—0,2416	+0,5461	+0,1003	—1,1404
0,49	+0,8875	—0,4349	—0,2307	+0,5479	+0,0775	—1,1338
0,50	+0,8788	—0,4394	—0,2197	+0,5492	+0,0549	—1,1259

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
0,50	+0,8788	—0,4394	—0,2197	+0,5492	+0,0549	—1,1259
0,51	+0,8700	—0,4437	—0,2087	+0,5501	+0,0325	—1,1168
0,52	+0,8610	—0,4477	—0,1977	+0,5505	+0,0103	—1,1064
0,53	+0,8520	—0,4516	—0,1867	+0,5505	—0,0118	—1,0948
0,54	+0,8430	—0,4552	—0,1757	+0,5501	—0,0335	—1,0820
0,55	+0,8338	—0,4586	—0,1647	+0,5492	—0,0550	—1,0681
0,56	+0,8246	—0,4618	—0,1537	+0,5479	—0,0762	—1,0536
0,57	+0,8154	—0,4648	—0,1428	+0,5461	—0,0971	—1,0369
0,58	+0,8060	—0,4675	—0,1319	+0,5440	—0,1177	—1,0197
0,59	+0,7967	—0,4700	—0,1210	+0,5414	—0,1379	—1,0015
0,60	+0,7872	—0,4723	—0,1102	+0,5385	—0,1578	—0,9823
0,61	+0,7778	—0,4744	—0,0995	+0,5351	—0,1772	—0,9621
0,62	+0,7683	—0,4763	—0,0888	+0,5314	—0,1962	—0,9411
0,63	+0,7587	—0,4780	—0,0782	+0,5273	—0,2148	—0,9192
0,64	+0,7491	—0,4795	—0,0677	+0,5228	—0,2330	—0,8965
0,65	+0,7395	—0,4807	—0,0573	+0,5180	—0,2507	—0,8730
0,66	+0,7299	—0,4817	—0,0470	+0,5128	—0,2679	—0,8487
0,67	+0,7203	—0,4826	—0,0368	+0,5072	—0,2846	—0,8238
0,68	+0,7106	—0,4832	—0,0267	+0,5014	—0,3009	—0,7982
0,69	+0,7010	—0,4837	—0,0168	+0,4952	—0,3166	—0,7720
0,70	+0,6913	—0,4839	—0,0059	+0,4887	—0,3317	—0,7452
0,71	+0,6816	—0,4839	+0,0028	+0,4819	—0,3464	—0,7180
0,72	+0,6719	—0,4833	+0,0124	+0,4749	—0,3605	—0,6902
0,73	+0,6622	—0,4834	+0,0218	+0,4675	—0,3740	—0,6621
0,74	+0,6526	—0,4829	+0,0311	+0,4599	—0,3869	—0,6335
0,75	+0,6429	—0,4822	+0,0402	+0,4521	—0,3993	—0,6046
0,76	+0,6333	—0,4813	+0,0491	+0,4440	—0,4111	—0,5755
0,77	+0,6237	—0,4802	+0,0579	+0,4356	—0,4223	—0,5460
0,78	+0,6141	—0,4790	+0,0676	+0,4271	—0,4330	—0,5164
0,79	+0,6045	—0,4776	+0,0750	+0,4183	—0,4430	—0,4866
0,80	+0,5950	—0,4760	+0,0833	+0,4094	—0,4524	—0,4568
0,81	+0,5855	—0,4742	+0,0914	+0,4002	—0,4613	—0,4268
0,82	+0,5760	—0,4723	+0,0993	+0,3909	—0,4695	—0,3968
0,83	+0,5666	—0,4703	+0,1070	+0,3814	—0,4771	—0,3669
0,84	+0,5572	—0,4681	+0,1146	+0,3718	—0,4842	—0,3369
0,85	+0,5479	—0,4657	+0,1219	+0,3621	—0,4903	—0,3071
0,86	+0,5386	—0,4632	+0,1290	+0,3522	—0,4965	—0,2774
0,87	+0,5293	—0,4605	+0,1360	+0,3422	—0,5017	—0,2479
0,88	+0,5202	—0,4577	+0,1427	+0,3321	—0,5054	—0,2187
0,89	+0,5110	—0,4548	+0,1493	+0,3220	—0,5105	—0,1896
0,90	+0,5020	—0,4518	+0,1556	+0,3117	—0,5140	—0,1609
0,91	+0,4930	—0,4486	+0,1617	+0,3014	—0,5169	—0,1324
0,92	+0,4840	—0,4453	+0,1677	+0,2911	—0,5193	—0,1044
0,93	+0,4752	—0,4419	+0,1734	+0,2803	—0,5211	—0,0767
0,94	+0,4664	—0,4384	+0,1789	+0,2702	—0,5223	—0,0494
0,95	+0,4576	—0,4347	+0,1842	+0,2598	—0,5231	—0,0226
0,96	+0,4490	—0,4310	+0,1893	+0,2493	—0,5232	+0,0037
0,97	+0,4404	—0,4272	+0,1942	+0,2388	—0,5229	+0,0296
0,98	+0,4319	—0,4232	+0,1988	+0,2284	—0,5221	+0,0549
0,99	+0,4235	—0,4192	+0,2033	+0,2180	—0,5207	+0,0796
1,00	+0,4151	—0,4151	+0,2076	+0,2076	—0,5189	+0,1038

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
1,00	+0,4151	-0,4151	+0,2076	+0,2076	-0,5189	+0,1038
1,01	+0,4068	-0,4109	+0,2116	+0,1972	-0,5166	+0,1273
1,02	+0,3987	-0,4066	+0,2154	+0,1869	-0,5138	+0,1503
1,03	+0,3906	-0,4023	+0,2191	+0,1766	-0,5106	+0,1726
1,04	+0,3826	-0,3979	+0,2225	+0,1665	-0,5069	+0,1942
1,05	+0,3747	-0,3934	+0,2257	+0,1564	-0,5028	+0,2152
1,06	+0,3668	-0,3889	+0,2288	+0,1464	-0,4983	+0,2355
1,07	+0,3591	-0,3843	+0,2316	+0,1364	-0,4934	+0,2550
1,08	+0,3515	-0,3796	+0,2342	+0,1266	-0,4881	+0,2739
1,09	+0,3439	-0,3749	+0,2367	+0,1169	-0,4824	+0,2920
1,10	+0,3365	-0,3701	+0,2389	+0,1073	-0,4764	+0,3094
1,11	+0,3291	-0,3653	+0,2410	+0,0979	-0,4701	+0,3260
1,12	+0,3219	-0,3605	+0,2428	+0,0885	-0,4634	+0,3419
1,13	+0,3147	-0,3556	+0,2445	+0,0793	-0,4564	+0,3570
1,14	+0,3076	-0,3507	+0,2460	+0,0703	-0,4491	+0,3714
1,15	+0,3007	-0,3458	+0,2473	+0,0614	-0,4415	+0,3850
1,16	+0,2938	-0,3408	+0,2484	+0,0526	-0,4337	+0,3979
1,17	+0,2870	-0,3358	+0,2494	+0,0440	-0,4256	+0,4099
1,18	+0,2804	-0,3308	+0,2502	+0,0356	-0,4173	+0,4212
1,19	+0,2738	-0,3258	+0,2508	+0,0273	-0,4088	+0,4318
1,20	+0,2673	-0,3208	+0,2513	+0,0192	-0,4001	+0,4416
1,21	+0,2610	-0,3158	+0,2516	+0,0113	-0,3911	+0,4506
1,22	+0,2547	-0,3107	+0,2518	+0,0036	-0,3820	+0,4589
1,23	+0,2485	-0,3057	+0,2518	-0,0039	-0,3728	+0,4664
1,24	+0,2425	-0,3007	+0,2516	-0,0113	-0,3634	+0,4732
1,25	+0,2365	-0,2957	+0,2513	-0,0185	-0,3539	+0,4793
1,26	+0,2307	-0,2906	+0,2509	-0,0255	-0,3442	+0,4846
1,27	+0,2249	-0,2856	+0,2503	-0,0322	-0,3345	+0,4893
1,28	+0,2192	-0,2806	+0,2496	-0,0388	-0,3247	+0,4932
1,29	+0,2137	-0,2756	+0,2487	-0,0452	-0,3148	+0,4965
1,30	+0,2082	-0,2707	+0,2478	-0,0514	-0,3048	+0,4991
1,31	+0,2028	-0,2657	+0,2467	-0,0574	-0,2948	+0,5010
1,32	+0,1976	-0,2608	+0,2455	-0,0632	-0,2848	+0,5023
1,33	+0,1924	-0,2559	+0,2442	-0,0688	-0,2747	+0,5030
1,34	+0,1873	-0,2510	+0,2427	-0,0742	-0,2646	+0,5030
1,35	+0,1824	-0,2462	+0,2412	-0,0794	-0,2546	+0,5025
1,36	+0,1775	-0,2414	+0,2395	-0,0844	-0,2445	+0,5014
1,37	+0,1727	-0,2366	+0,2378	-0,0892	-0,2345	+0,4997
1,38	+0,1680	-0,2319	+0,2360	-0,0938	-0,2246	+0,4974
1,39	+0,1634	-0,2272	+0,2341	-0,0982	-0,2146	+0,4947
1,40	+0,1589	-0,2225	+0,2321	-0,1024	-0,2048	+0,4914
1,41	+0,1545	-0,2179	+0,2300	-0,1064	-0,1950	+0,4876
1,42	+0,1502	-0,2133	+0,2278	-0,1102	-0,1853	+0,4834
1,43	+0,1460	-0,2088	+0,2256	-0,1138	-0,1757	+0,4787
1,44	+0,1419	-0,2043	+0,2233	-0,1172	-0,1661	+0,4736
1,45	+0,1378	-0,1999	+0,2209	-0,1204	-0,1567	+0,4681
1,46	+0,1339	-0,1955	+0,2184	-0,1235	-0,1474	+0,4621
1,47	+0,1300	-0,1911	+0,2159	-0,1263	-0,1382	+0,4558
1,48	+0,1262	-0,1868	+0,2134	-0,1290	-0,1292	+0,4492
1,49	+0,1225	-0,1826	+0,2108	-0,1315	-0,1203	+0,4422
1,50	+0,1189	-0,1784	+0,2081	-0,1338	-0,1115	+0,4348

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
1,50	+0,1189	—0,1784	+0,2081	—0,1338	—0,1115	+0,4348
1,51	+0,1154	—0,1743	+0,2054	—0,1359	—0,1029	+0,4272
1,52	+0,1120	—0,1702	+0,2027	—0,1379	—0,0944	+0,4193
1,53	+0,1086	—0,1662	+0,1999	—0,1397	—0,0861	+0,4112
1,54	+0,1053	—0,1622	+0,1971	—0,1414	—0,0780	+0,4028
1,55	+0,1021	—0,1583	+0,1943	—0,1428	—0,0700	+0,3942
1,56	+0,0990	—0,1544	+0,1914	—0,1442	—0,0622	+0,3853
1,57	+0,0959	—0,1506	+0,1885	—0,1453	—0,0546	+0,3763
1,58	+0,0930	—0,1469	+0,1856	—0,1463	—0,0471	+0,3672
1,59	+0,0901	—0,1432	+0,1826	—0,1472	—0,0399	+0,3579
1,60	+0,0872	—0,1396	+0,1797	—0,1479	—0,0328	+0,3484
1,61	+0,0845	—0,1360	+0,1767	—0,1485	—0,0260	+0,3389
1,62	+0,0818	—0,1325	+0,1738	—0,1490	—0,0193	+0,3292
1,63	+0,0792	—0,1291	+0,1708	—0,1493	—0,0128	+0,3195
1,64	+0,0766	—0,1257	+0,1678	—0,1495	—0,0065	+0,3096
1,65	+0,0741	—0,1223	+0,1648	—0,1496	—0,0004	+0,2998
1,66	+0,0717	—0,1191	+0,1618	—0,1495	+0,0055	+0,2899
1,67	+0,0694	—0,1159	+0,1588	—0,1493	+0,0112	+0,2800
1,68	+0,0671	—0,1127	+0,1558	—0,1491	+0,0167	+0,2701
1,69	+0,0649	—0,1096	+0,1528	—0,1487	+0,0220	+0,2602
1,70	+0,0627	—0,1066	+0,1499	—0,1482	+0,0271	+0,2503
1,71	+0,0606	—0,1036	+0,1469	—0,1476	+0,0320	+0,2405
1,72	+0,0586	—0,1007	+0,1440	—0,1469	+0,0367	+0,2307
1,73	+0,0566	—0,0979	+0,1410	—0,1461	+0,0412	+0,2209
1,74	+0,0546	—0,0951	+0,1381	—0,1453	+0,0456	+0,2113
1,75	+0,0528	—0,0924	+0,1352	—0,1443	+0,0497	+0,2017
1,76	+0,0510	—0,0897	+0,1324	—0,1433	+0,0536	+0,1922
1,77	+0,0492	—0,0871	+0,1295	—0,1422	+0,0574	+0,1828
1,78	+0,0475	—0,0845	+0,1267	—0,1410	+0,0609	+0,1735
1,79	+0,0458	—0,0820	+0,1239	—0,1397	+0,0643	+0,1643
1,80	+0,0442	—0,0795	+0,1211	—0,1384	+0,0675	+0,1553
1,81	+0,0426	—0,0772	+0,1183	—0,1370	+0,0705	+0,1464
1,82	+0,0411	—0,0748	+0,1156	—0,1356	+0,0734	+0,1377
1,83	+0,0396	—0,0725	+0,1129	—0,1341	+0,0760	+0,1291
1,84	+0,0382	—0,0703	+0,1102	—0,1325	+0,0785	+0,1206
1,85	+0,0368	—0,0681	+0,1076	—0,1310	+0,0809	+0,1123
1,86	+0,0355	—0,0660	+0,1050	—0,1293	+0,0830	+0,1042
1,87	+0,0342	—0,0639	+0,1024	—0,1276	+0,0850	+0,0963
1,88	+0,0329	—0,0619	+0,0999	—0,1259	+0,0869	+0,0885
1,89	+0,0317	—0,0599	+0,0974	—0,1242	+0,0886	+0,0809
1,90	+0,0305	—0,0580	+0,0949	—0,1224	+0,0901	+0,0735
1,91	+0,0294	—0,0561	+0,0925	—0,1206	+0,0915	+0,0663
1,92	+0,0283	—0,0543	+0,0901	—0,1187	+0,0928	+0,0593
1,93	+0,0272	—0,0525	+0,0878	—0,1168	+0,0939	+0,0525
1,94	+0,0262	—0,0508	+0,0854	—0,1150	+0,0949	+0,0459
1,95	+0,0252	—0,0491	+0,0832	—0,1131	+0,0957	+0,0395
1,96	+0,0242	—0,0475	+0,0809	—0,1111	+0,0964	+0,0332
1,97	+0,0233	—0,0459	+0,0787	—0,1092	+0,0971	+0,0272
1,98	+0,0224	—0,0443	+0,0765	—0,1073	+0,0975	+0,0214
1,99	+0,0215	—0,0428	+0,0744	—0,1053	+0,0979	+0,0158
2,00	+0,0207	—0,0413	+0,0723	—0,1033	+0,0982	+0,0103

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
2,00	+0,0207	—0,0413	+0,0723	—0,1033	+0,0982	+0,0103
2,01	+0,0199	—0,0399	+0,0703	—0,1014	+0,0983	+0,0051
2,02	+0,0191	—0,0385	+0,0683	—0,0994	+0,0984	+0,0001
2,03	+0,0183	—0,0372	+0,0663	—0,0974	+0,0983	—0,0047
2,04	+0,0176	—0,0359	+0,0644	—0,0955	+0,0982	—0,0094
2,05	+0,0169	—0,0346	+0,0625	—0,0935	+0,0980	—0,0138
2,06	+0,0162	—0,0334	+0,0606	—0,0916	+0,0976	—0,0180
2,07	+0,0155	—0,0322	+0,0588	—0,0896	+0,0972	—0,0221
2,08	+0,0149	—0,0310	+0,0571	—0,0877	+0,0968	—0,0259
2,09	+0,0143	—0,0299	+0,0553	—0,0857	+0,0962	—0,0296
2,10	+0,0137	—0,0288	+0,0536	—0,0838	+0,0956	—0,0331
2,11	+0,0132	—0,0277	+0,0520	—0,0819	+0,0949	—0,0364
2,12	+0,0126	—0,0267	+0,0504	—0,0800	+0,0941	—0,0396
2,13	+0,0121	—0,0257	+0,0488	—0,0781	+0,0933	—0,0424
2,14	+0,0116	—0,0248	+0,0472	—0,0763	+0,0924	—0,0452
2,15	+0,0111	—0,0238	+0,0457	—0,0745	+0,0915	—0,0478
2,16	+0,0106	—0,0229	+0,0442	—0,0726	+0,0905	—0,0502
2,17	+0,0102	—0,0221	+0,0428	—0,0708	+0,0895	—0,0525
2,18	+0,0097	—0,0212	+0,0414	—0,0691	+0,0884	—0,0546
2,19	+0,0093	—0,0204	+0,0401	—0,0673	+0,0873	—0,0566
2,20	+0,0089	—0,0196	+0,0387	—0,0656	+0,0861	—0,0584
2,21	+0,0085	—0,0189	+0,0374	—0,0638	+0,0850	—0,0601
2,22	+0,0082	—0,0181	+0,0362	—0,0622	+0,0837	—0,0616
2,23	+0,0078	—0,0174	+0,0349	—0,0605	+0,0825	—0,0630
2,24	+0,0075	—0,0167	+0,0337	—0,0589	+0,0812	—0,0642
2,25	+0,0071	—0,0161	+0,0326	—0,0573	+0,0799	—0,0653
2,26	+0,0068	—0,0154	+0,0315	—0,0557	+0,0786	—0,0663
2,27	+0,0065	—0,0148	+0,0304	—0,0541	+0,0773	—0,0672
2,28	+0,0062	—0,0142	+0,0293	—0,0526	+0,0759	—0,0680
2,29	+0,0060	—0,0136	+0,0283	—0,0511	+0,0746	—0,0686
2,30	+0,0057	—0,0131	+0,0273	—0,0496	+0,0732	—0,0691
2,31	+0,0054	—0,0125	+0,0263	—0,0481	+0,0718	—0,0696
2,32	+0,0052	—0,0120	+0,0253	—0,0467	+0,0704	—0,0699
2,33	+0,0050	—0,0115	+0,0244	—0,0453	+0,0690	—0,0701
2,34	+0,0047	—0,0111	+0,0235	—0,0440	+0,0676	—0,0703
2,35	+0,0045	—0,0106	+0,0226	—0,0426	+0,0662	—0,0703
2,36	+0,0043	—0,0102	+0,0218	—0,0413	+0,0648	—0,0703
2,37	+0,0041	—0,0097	+0,0210	—0,0400	+0,0634	—0,0702
2,38	+0,0039	—0,0093	+0,0202	—0,0388	+0,0620	—0,0700
2,39	+0,0037	—0,0089	+0,0194	—0,0376	+0,0606	—0,0697
2,40	+0,0036	—0,0085	+0,0187	—0,0364	+0,0592	—0,0694
2,41	+0,0034	—0,0082	+0,0180	—0,0352	+0,0578	—0,0690
2,42	+0,0032	—0,0078	+0,0173	—0,0340	+0,0564	—0,0685
2,43	+0,0031	—0,0075	+0,0166	—0,0329	+0,0551	—0,0680
2,44	+0,0029	—0,0071	+0,0160	—0,0318	+0,0537	—0,0674
2,45	+0,0028	—0,0068	+0,0154	—0,0308	+0,0524	—0,0668
2,46	+0,0027	—0,0065	+0,0147	—0,0297	+0,0510	—0,0661
2,47	+0,0025	—0,0062	+0,0142	—0,0287	+0,0497	—0,0654
2,48	+0,0024	—0,0060	+0,0136	—0,0278	+0,0484	—0,0646
2,49	+0,0023	—0,0057	+0,0131	—0,0268	+0,0471	—0,0638
2,50	+0,0022	—0,0054	+0,0125	—0,0259	+0,0459	—0,0630

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
2,50	+0,0022	—0,0054	+0,0125	—0,0259	+0,0459	—0,0630
2,51	+0,0021	—0,0052	+0,0120	—0,0250	+0,0446	—0,0621
2,52	+0,0020	—0,0050	+0,0115	—0,0241	+0,0434	—0,0612
2,53	+0,0019	—0,0047	+0,0111	—0,0232	+0,0422	—0,0603
2,54	+0,0018	—0,0045	+0,0106	—0,0224	+0,0410	—0,0593
2,55	+0,0017	—0,0043	+0,0102	—0,0216	+0,0398	—0,0583
2,56	+0,0016	—0,0041	+0,0097	—0,0208	+0,0387	—0,0573
2,57	+0,0015	—0,0039	+0,0093	—0,0200	+0,0375	—0,0563
2,58	+0,0015	—0,0037	+0,0089	—0,0193	+0,0364	—0,0553
2,59	+0,0014	—0,0036	+0,0086	—0,0186	+0,0353	—0,0543
2,60	+0,0013	—0,0034	+0,0082	—0,0179	+0,0342	—0,0532
2,61	+0,0012	—0,0032	+0,0078	—0,0172	+0,0332	—0,0522
2,62	+0,0012	—0,0031	+0,0075	—0,0166	+0,0321	—0,0511
2,63	+0,0011	—0,0029	+0,0072	—0,0159	+0,0311	—0,0500
2,64	+0,0011	—0,0028	+0,0069	—0,0153	+0,0301	—0,0489
2,65	+0,0010	—0,0027	+0,0066	—0,0147	+0,0292	—0,0479
2,66	+0,0010	—0,0025	+0,0063	—0,0141	+0,0282	—0,0468
2,67	+0,0009	—0,0024	+0,0060	—0,0136	+0,0273	—0,0457
2,68	+0,0009	—0,0023	+0,0057	—0,0131	+0,0264	—0,0446
2,69	+0,0008	—0,0022	+0,0055	—0,0125	+0,0255	—0,0435
2,70	+0,0008	—0,0021	+0,0052	—0,0120	+0,0247	—0,0425
2,71	+0,0007	—0,0020	+0,0050	—0,0116	+0,0238	—0,0414
2,72	+0,0007	—0,0019	+0,0048	—0,0111	+0,0230	—0,0404
2,73	+0,0007	—0,0018	+0,0045	—0,0106	+0,0222	—0,0393
2,74	+0,0006	—0,0017	+0,0043	—0,0102	+0,0214	—0,0383
2,75	+0,0006	—0,0016	+0,0041	—0,0098	+0,0207	—0,0373
2,76	+0,0006	—0,0015	+0,0039	—0,0094	+0,0199	—0,0363
2,77	+0,0005	—0,0015	+0,0038	—0,0090	+0,0192	—0,0353
2,78	+0,0005	—0,0014	+0,0036	—0,0086	+0,0185	—0,0343
2,79	+0,0005	—0,0013	+0,0034	—0,0082	+0,0178	—0,0333
2,80	+0,0004	—0,0012	+0,0033	—0,0079	+0,0172	—0,0324
2,81	+0,0004	—0,0012	+0,0031	—0,0075	+0,0166	—0,0314
2,82	+0,0004	—0,0011	+0,0030	—0,0072	+0,0159	—0,0305
2,83	+0,0004	—0,0011	+0,0028	—0,0069	+0,0153	—0,0296
2,84	+0,0004	—0,0010	+0,0027	—0,0066	+0,0147	—0,0287
2,85	+0,0003	—0,0010	+0,0026	—0,0063	+0,0142	—0,0278
2,86	+0,0003	—0,0009	+0,0024	—0,0060	+0,0136	—0,0269
2,87	+0,0003	—0,0009	+0,0023	—0,0058	+0,0131	—0,0261
2,88	+0,0003	—0,0008	+0,0022	—0,0055	+0,0126	—0,0252
2,89	+0,0003	—0,0008	+0,0021	—0,0053	+0,0121	—0,0244
2,90	+0,0003	—0,0007	+0,0020	—0,0050	+0,0116	—0,0236
2,91	+0,0002	—0,0007	+0,0019	—0,0048	+0,0112	—0,0228
2,92	+0,0002	—0,0007	+0,0018	—0,0046	+0,0107	—0,0221
2,93	+0,0002	—0,0006	+0,0017	—0,0044	+0,0103	—0,0213
2,94	+0,0002	—0,0006	+0,0016	—0,0042	+0,0099	—0,0206
2,95	+0,0002	—0,0006	+0,0015	—0,0040	+0,0094	—0,0199
2,96	+0,0002	—0,0005	+0,0015	—0,0038	+0,0091	—0,0192
2,97	+0,0002	—0,0005	+0,0014	—0,0036	+0,0087	—0,0185
2,98	+0,0002	—0,0005	+0,0013	—0,0035	+0,0083	—0,0179
2,99	+0,0001	—0,0004	+0,0012	—0,0033	+0,0080	—0,0172
3,00	+0,0001	—0,0004	+0,0012	—0,0031	+0,0076	—0,0166

Таблица 20. Функции $e^{x^2}[1-\Phi(x)]$ и e^{-x^2}

x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$	x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$	x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$	x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$	x	e^{-x^2}
	0,1		0,1		0,13		0,12		0,
3,00	79001 — 540,5	3,50	55294 — 411,5	4,00	6999 — 322	4,50	2485 — 259	3,0	1234 098 (—3)
02	77920 534,5	52	54471 406,5	02	6355 319,5	52	1967 257	1	0670 548 (—3)
04	76851 528	54	53658 403	04	5716 316,5	54	1453 255	2	0357 128 (—3)
06	75795 522	56	52852 399	06	5083 313,5	56	0943 252,5	3	1864 374 (—4)
08	74751 516,5	58	52054 394,5	08	4456 311	58	0438 251	4	0954 016 (—4)
3,10	73718 — 510	3,60	51265 — 390,5	4,10	3834 — 308	4,60	*9936 — 248,5	3,5	0478 512 (—4)
12	72698 504,5	62	50484 387	12	3218 305	62	9439 246,5	6	2352 575 (—5)
14	71689 499	64	49710 383	14	2608 302,5	64	8946 245	7	1133 727 (—5)
16	70691 493,5	66	48944 379	16	2003 300	66	8456 242,5	8	0535 535 (—5)
18	69704 488	68	48186 375,5	18	1403 297,5	68	7971 240,5	9	2479 596 (—6)
3,20	68728 — 482,5	3,70	47435 — 372	4,20	0808 — 294,5	4,70	7490 — 239	4,0	1125 352 (—6)
22	67763 477	72	46691 368	22	0219 292	72	7012 237	1	0500 622 (—6)
24	66809 472	74	45955 364,5	24	*9635 289,5	74	6538 235	2	2182 958 (—7)
26	65865 467	76	45226 361	26	9056 286,5	76	6068 233	3	0933 029 (—7)
28	64931 462	78	44504 357,5	28	8483 284,5	78	5602 231,5	4	0390 894 (—7)
3,30	64007 — 456,5	3,80	43789 — 354	4,30	7914 — 282	4,80	5139 — 229	4,5	1605 228 (—8)
32	63094 452	82	43081 351	32	7350 279,5	82	4681 228,5	6	0646 143 (—8)
34	62190 447,5	84	42379 347,5	34	6791 277,5	84	4224 225,5	7	2549 382 (—9)
36	61295 442	86	41684 344	36	6236 274,5	86	3773 224,5	8	0985 951 (—9)
38	60411 438	88	40996 341	38	5687 272,5	88	3324 222,5	9	0373 757 (—9)
3,40	59535 — 433	3,90	40314 — 337,5	4,40	5142 — 270,5	4,90	2879 — 221	5,0	1388 794 (—10)
42	58669 428,5	92	39639 334,5	42	4601 268	92	2437 219		0,
44	57812 424	94	38970 331,5	44	4065 265,5	94	1999 217,5		
46	56964 420	96	38307 328,5	46	3534 263,5	96	1564 215,5		
48	56124 415	98	37650 325,5	48	3007 261	98	1133 214		
3,50	55294 0,1	4,00	36999 0,1	4,50	2485 0,12	5,00	0705 0,13		

Таблица 21. Функция $y = \int_0^x e^{t^2} dt$

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
	0,		0,		1,				
0,00	0000 + 100	0,40	4224 + 118,5	0,80	0091 + 193	1,20	2,141 + 43,5	1,60	5,17 + 13,5
02	0200 100	42	4461 120	82	0477 199	22	2,228 45	62	5,44 14,5
04	0400 100,5	44	4701 122,5	84	0875 206	24	2,318 48	64	5,73 15
06	0601 100,5	46	4946 125	86	1287 213	26	2,414 50	66	6,03 16,5
08	0802 100,5	48	5196 127	88	1713 221	28	2,514 53	68	6,36 17
0,10	1003 + 101,5	0,50	5450 + 129,5	0,90	215 + 23	1,30	2,620 + 55,5	1,70	6,70 + 19
12	1206 101,5	52	5709 132,5	92	261 24	32	2,731 58,5	72	7,08 19,5
14	1409 102,5	54	5974 135,5	94	309 24,5	34	2,848 62	74	7,47 21,5
16	1614 103	56	6245 138,5	96	358 25,5	36	2,972 65,5	76	7,90 23
18	1820 103,5	58	6522 141,5	98	409 27	38	3,103 69	78	8,36 24,5
0,20	2027 + 104,5	0,60	6805 + 146	1,00	463 + 27,5	1,40	3,241 + 73	1,80	8,85 + 26,5
22	2236 105,5	62	7095 149	02	518 29	42	3,387 77,5	82	9,38 28,5
24	2447 106,5	64	7393 152,5	04	576 30	44	3,542 81,5	84	9,95 31
26	2660 107,5	66	7698 156,5	06	636 31,5	46	3,705 87	86	10,57 33
28	2875 108,5	68	8011 161	08	699 33	48	3,879 92	88	11,23 35,5
0,30	3092 + 110,5	0,70	8333 + 165,5	1,10	765 + 34	1,50	4,063 + 98	1,90	11,94 + 38,5
32	3313 111,5	72	8664 170,5	12	833 36	52	4,259 104	92	12,71 41,5
34	3536 113	74	9005 175,5	14	905 37,5	54	4,467 110,5	94	13,54 44,5
36	3762 114,5	76	9356 181	16	980 39,5	56	4,688 117,5	96	14,43 48,5
38	3991 116,5	78	9718 186,5	18	*059 41	58	4,923 125,5	98	15,40 52,5
0,40	4224 0,	0,80	*0091 1,	1,20	141 2,	1,60	5,174	2,00	16,45

Таблица 22. Интеграл ошибок $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и его производная $\varphi(x)$

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
0,00	0,50000	0,39894	1,00	0,84134	0,24197	2,00	0,97725	0,05399
02	50798	39886	02	84614	23713	02	7831	5186
04	51595	39862	04	85083	23230	04	7932	4980
06	52392	39822	06	85543	22747	06	8030	4780
08	53188	39767	08	85993	22265	08	8124	4586
0,10	53983	39695	1,10	86433	21785	2,10	8214	4398
12	54776	39608	12	86864	21307	12	8300	4217
14	55567	39505	14	87286	20831	14	8382	4041
16	56356	39387	16	87698	20357	16	8461	3871
18	57142	39253	18	88100	19886	18	8537	3706
0,20	57926	39104	1,20	88493	19419	2,20	8610	3547
22	58706	38940	22	88877	18954	22	8679	3394
24	59483	38762	24	89251	18494	24	8745	3246
26	60257	38568	26	89617	18037	26	8809	3103
28	61026	38361	28	89973	17585	28	8870	2965
0,30	61791	38139	1,30	90320	17137	2,30	8928	2833
32	62552	37903	32	90658	16694	32	8983	2705
34	63307	37654	34	90988	16256	34	9036	2582
36	64058	37391	36	91309	15822	36	9086	2463
38	64803	37115	38	91621	15395	38	9134	2349
0,40	65542	36827	1,40	91924	14973	2,40	9180	2239
42	66276	36526	42	92220	14556	42	9224	2134
44	67003	36213	44	92507	14146	44	9266	2033
46	67724	35889	46	92785	13742	46	9305	1936
48	68439	35553	48	93056	13344	48	9343	1842
0,50	69146	35207	1,50	93319	12952	2,50	93790	1753
52	69847	34849	52	93574	12566	52	94132	1667
54	70540	34482	54	93822	12188	54	94457	1585
56	71226	34105	56	94062	11816	56	94766	1506
58	71904	33718	58	94295	11450	58	95060	1431
0,60	72575	33322	1,60	94520	11092	2,60	95339	1358
62	73237	32918	62	94738	10741	62	95604	1289
64	73891	32506	64	94950	10396	64	95855	1223
66	74537	32086	66	95154	10059	66	96093	1160
68	75175	31659	68	95352	9728	68	96319	1100
0,70	75804	31225	1,70	95543	9405	2,70	96533	1042
72	76424	30785	72	95728	9089	72	96736	9987
74	77035	30339	74	95907	8780	74	96928	935
76	77637	29887	76	96080	8478	76	97110	885
78	78230	29431	78	96246	8183	78	97282	837
0,80	78814	28969	1,80	96407	7895	2,80	97445	792
82	79389	28504	82	96562	7614	82	97599	748
84	79955	28034	84	96712	7341	84	97744	707
86	80511	27562	86	96856	7074	86	97882	668
88	81057	27086	88	96995	6814	88	98012	631
0,90	81594	26609	1,90	97128	6562	2,90	98134	595
92	82121	26129	92	97257	6316	92	98250	562
94	82639	25647	94	97381	6077	94	98359	530
96	83147	25164	96	97500	5844	96	98462	499
98	83646	24681	98	97615	5618	98	98559	470
1,00	84134	24197	2,00	97725	5399	3,00	98650	443
0,		0,	0,		0,	0,9		0,0

2. Интегралы Френеля

Под интегралами Френеля подразумевают функции

$$C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \cos t^2 dt,$$

$$S(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \sin t^2 dt.$$

Они связаны с интегралом ошибок равенствами

$$C(z) + iS(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \Phi(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{z}),$$

$$C(z) - iS(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \Phi(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{z}).$$

Далее очевидно

$$C\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) = \int_0^z \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad S\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) = \int_0^z \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt.$$

(Часто в литературе именно эти последние интегралы называются интегралами Френеля и обозначаются через $C(z)$, $S(z)$.)

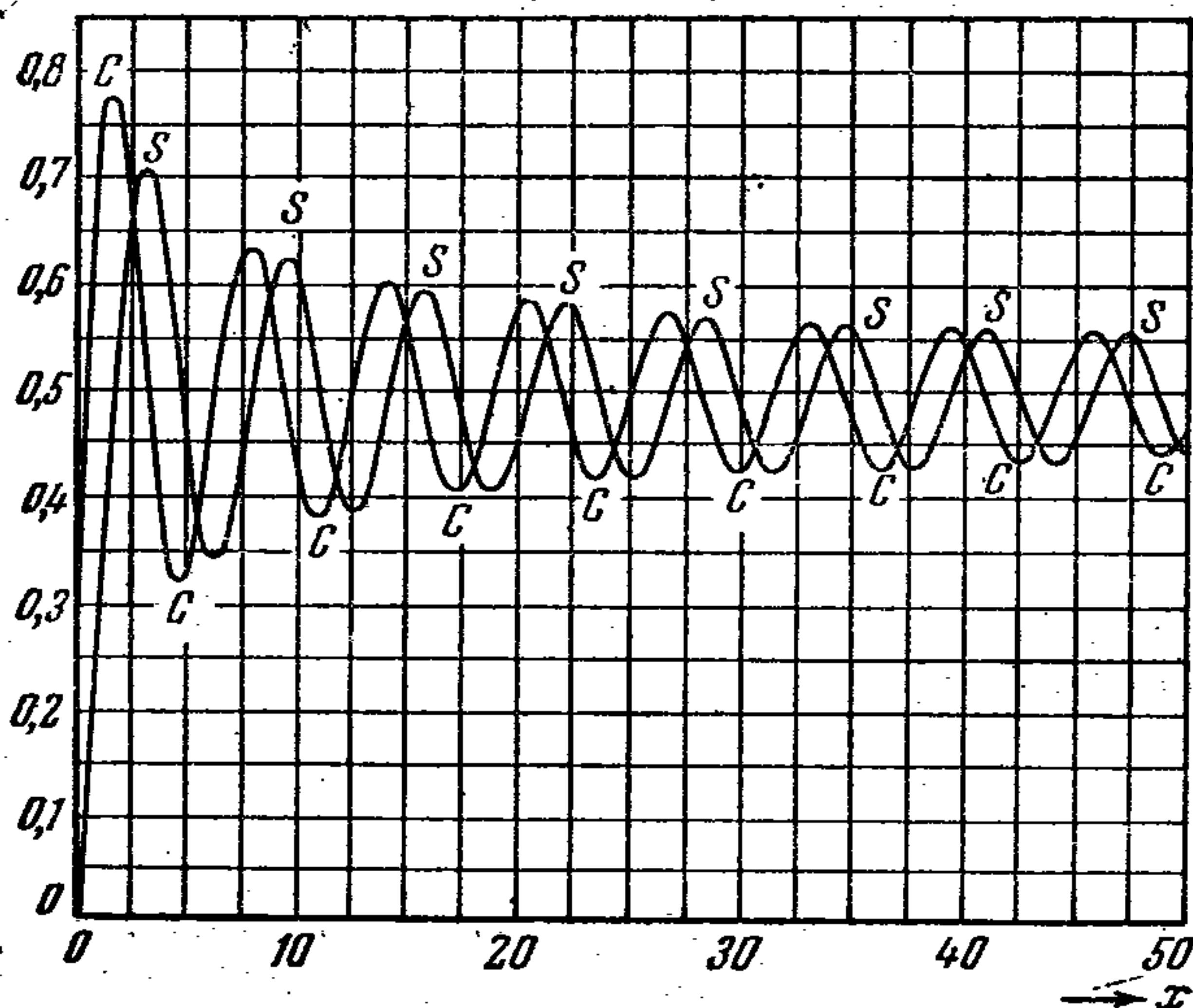


Рис. 32. Интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$.

Обе функции, $C(z)$ и $S(z)$, — двулистные аналитические функции от z ; точка $z=0$ является точкой ветвления. Вдоль действительной оси они принимают действительные значения, причем

$$C(0) = S(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \frac{1}{2}$$

(рис. 32, таблицы 23, 24).

Разложения в степенные ряды вблизи нуля имеют вид

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(4k+1) \cdot (2k)!}, \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(4k+3) \cdot (2k+1)!}.$$

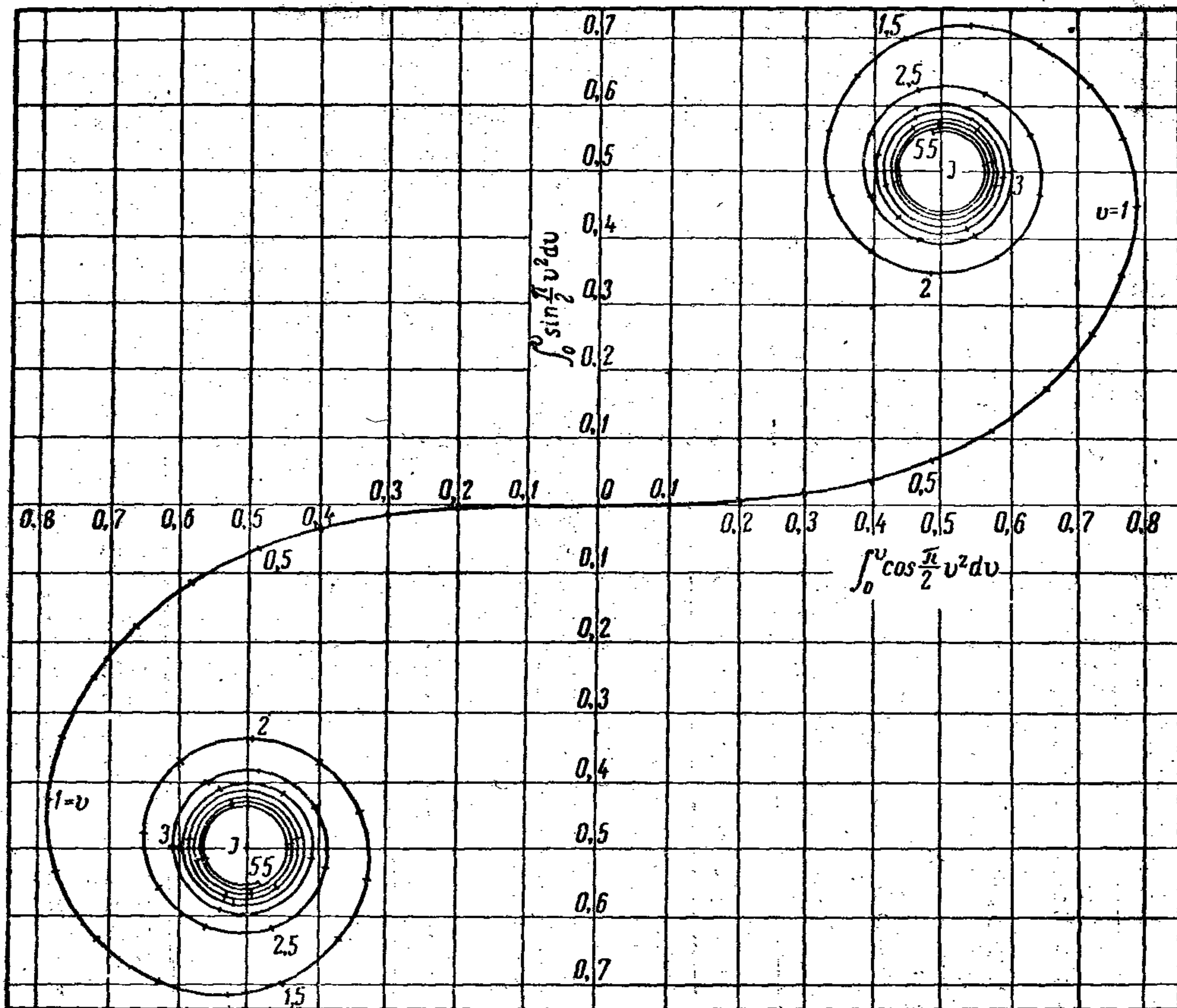


Рис. 33. Спираль Корню (клотоида).

Асимптотическое поведение этих функций для $|z| \gg 1$ в области $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) описывается формулами

$$C(z) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{(2z)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2z)^4} - \dots \right) - \frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}} \left(\frac{1}{2z} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z)^3} + \dots \right),$$

$$S(z) \approx \frac{1}{2} - \frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{(2z)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2z)^4} - \dots \right) - \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}} \left(\frac{1}{2z} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z)^3} + \dots \right),$$

и, следовательно, в качестве первого приближения можно брать:

$$C(z) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad S(z) \approx \frac{1}{2} - \frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}}.$$

В прямоугольной системе координат (C, S) кривая

$$C = C\left(\frac{\pi}{2} u^2\right), \quad S = S\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)$$

(u — действительный параметр) представляет собой так называемую *спираль Корню* (*клотоиду*, рис. 33). Длина дуги от точки $(0, 0)$ до точки, соответствующей

Т а б л и ц а 23. Интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$

x	$C(x)$	$S(x)$	x	$C(x)$	$S(x)$	x	$C(x)$	$S(x)$
0,00	0,000	0,000	1,0	7217 - 176	2476 + 19	10,0	4370 + 30	6084 - 41
02	1128	0008 + 4	2	7563 157	3153 - 4	2	4174 37	5928 34
04	1596	0021 6,5	4	7751 141	3826 25	4	4015 42	5737 26
06	1954	0039 9	6	7798 125	4475 43	6	3898 46	5521 17
08	2255	0060 10,5	8	7719 108	5081 59	8	3827 48	5288 - 7
0.10	2521 + 119,5'	0084 + 13	2,0	7533 - 91	5628 - 73	11,0	3804 + 48	5048 + 2
12	2760 110'	0110 14,5	2	7256 73	6103 83	2	3829 46	4810 12
14	2980 101,5'	0139 15,5	4	6906 54	6495 91	4	3900 43	4584 21
16	3183 95,5	0170 16,5	6	6503 35	6797 95	6	4013 38	4378 28
18	3374 90	0203 17	8	6064 - 16	7005 96	8	4164 31	4201 35
0.20	3554 + 85	0237 + 18	3,0	5610 + 2	7117 - 94	12,0	4346 + 23	4058 + 40
22	3724 81	0273 19	2	5158 19	7136 89	2	4550 15	3955 44
24	3886 77,5	0311 20	4	4725 35	7067 81	4	4769 + 6	3895 45
26	4041 74	0351 20,5	6	4326 48	6918 70	6	4994 - 3	3880 45
28	4189 71	0392 21	8	3975 59	6698 58	8	5216 12	3910 43
0.30	4331 + 68,5	0434 + 22	4,0	3682 + 67	6421 - 45	13,0	5425 - 20	3983 + 40
32	4468 65,5	0478 22,5	2	3456 73	6099 30	2	5615 27	4095 35
34	4599 63,5	0523 23	4	3302 75	5747 - 15	4	5777 34	4241 28
36	4726 61	0569 24	6	3222 75	5380 0	6	5906 38	4415 21
38	4848 58	0617 24	8	3218 72	5013 + 14	8	5997 41	4610 13
0.40	4966 + 57	0665 + 25	5,0	3285 + 67	4659 + 27	14,0	6047 - 43	4818 + 4
42	5080 55,5	0715 25,5	2	3418 59	4333 39	2	6055 42	5030 - 4
44	5191 53,5	0766 25,5	4	3610 49	4045 49	4	6021 40	5238 12
46	5298 52	0817 26,5	6	3850 38	3805 56	6	5947 37	5433 20
48	5402 50	0870 27	8	4129 26	3621 62	8	5836 32	5609 27
0.50	5502 + 49	0924 + 27	6,0	4433 + 13	3499 + 64	15,0	5693 - 26	5758 - 32
52	5600 47,5	0978 28	2	4750 0	3440 65	2	5525 19	5875 37
54	5695 45,5	1034 28	4	5067 - 12	3445 62	4	5338 11	5956 39
56	5786 44,5	1090 28,5	6	5372 24	3512 58	6	5140 - 3	5998 40
58	5875 43,5	1147 29	8	5654 34	3637 51	8	4939 + 5	5999 40
0.60	5962 + 41,5	1205 + 29	7,0	5901 - 43	3812 + 43	16,0	4743 + 13	5961 - 38
62	6045 41	1263 29,5	2	6106 50	4030 33	2	4560 20	5885 34
64	6127 39	1322 30	4	6261 55	4281 22	4	4396 26	5775 30
66	6205 38,5	1382 30,5	6	6362 57	4553 + 11	6	4258 31	5636 24
68	6282 37	1443 30,5	8	6406 57	4837 - 1	8	4152 35	5473 17
0.70	6356 + 36	1504 + 31	8,0	6393 - 56	5120 - 12	17,0	4080 + 38	5293 - 10
72	6428 34,5	1566 31	2	6325 51	5392 22	2	4046 39	5103 - 2
74	6497 34	1628 31,5	4	6206 46	5641 32	4	4050 38	4912 + 6
76	6565 32,5	1691 31,5	6	6041 38	5859 39	6	4091 36	4726 13
78	6630 31,5	1754 32	8	5839 29	6038 46	8	4169 32	4553 20
0.80	6693 + 30,5	1818 + 32	9,0	5608 - 19	6172 - 50	18,0	4278 + 28	4400 + 24
82	6754 29,5	1882 32,5	2	5358 - 9	6256 52	2	4415 22	4272 31
84	6813 28,5	1947 32,5	4	5099 + 2	6289 52	4	4574 15	4175 34
86	6870 28	2012 32,5	6	4841 12	6270 50	6	4748 8	4112 36
88	6926 26,5	2077 33	8	4595 21	6200 47	8	4930 + 1	4084 37
0.90	6979 + 25,5	2143 + 33	10,0	4370 + 30	6084 - 41	19,0	5113 - 6	4093 + 36
92	7030 25	2209 33		0,	0,	2	5290 13	4139 34
94	7080 23,5	2275 33,5				4	5453 20	4217 31
96	7127 23	2342 33,5				6	5597 25	4327 26
98	7173 22	2409 33,5				8	5715 30	4462 20
1,00	7217 0,	2476 0,				20,0	5804 - 33	4616 + 14

Продолжение табл. 23

x	$C(x)$	$S(x)$	x	$C(x)$	$S(x)$	x	$C(x)$	$S(x)$
	0,	0,		0,	0,		0,	0,
20,0	5804	4616	30,0	4279	4900	40,0	5475	5415
20,5	5878	5049	30,5	4420	4570	40,5	5217	5588
21,0	5738	5459	31,0	4700	4350	41,0	4909	5616
21,5	5423	5748	31,5	5048	4291	41,5	4627	5494
22,0	5012	5849	32,0	5379	4406	42,0	4439	5253
22,5	4607	5742	32,5	5613	4663	42,5	4390	4953
23,0	4307	5458	33,0	5694	4999	43,0	4490	4668
23,5	4181	5068	33,5	5605	5329	43,5	4713	4468
24,0	4256	4670	34,0	5370	5575	44,0	5004	4399
24,5	4511	4361	34,5	5049	5677	44,5	5290	4477
25,0	4879	4212	35,0	4720	5613	45,0	5502	4682
25,5	5269	4258	35,5	4464	5401	45,5	5590	4962
26,0	5586	4483	36,0	4342	5094	46,0	5533	5248
26,5	5755	4829	36,5	4382	4769	46,5	5347	5471
27,0	5738	5211	37,0	4571	4504	47,0	5078	5577
27,5	5541	5534	37,5	4863	4363	47,5	4793	5540
28,0	5217	5721	38,0	5184	4380	48,0	4562	5373
28,5	4846	5731	38,5	5456	4547	48,5	4439	5117
29,0	4518	5562	39,0	5613	4822	49,0	4455	4834
29,5	4314	5260	39,5	5620	5137	49,5	4603	4595
30,0	4279	4900	40,0	5475	5415	50,0	4847	4457
	0,	0,		0,	0,		0,	0,

Таблица 24. Интегралы Френеля $C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ и $S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$

x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$
	0,	0,		0,	0,		0,	0,
0,00	0000	0000	1,25	6801	6587	2,50	4574	6192
05	0500	0001	30	6386	6863	52	4396	6101
10	1000	0005	35	5923	7050	54	4235	5983
15	1500	0018	40	5431	7135	56	4094	5842
20	1999	0042	45	4933	7111	58	3978	5679
0,25	2498	0082	1,50	4453	6975	2,60	3889	5500
30	2994	0141	55	4018	6731	62	3831	5309
35	3487	0224	60	3655	6389	64	3805	5111
40	3975	0334	65	3388	5968	66	3812	4911
45	4455	0474	70	3238	5492	68	3853	4715
0,50	4923	0647	1,75	3219	4994	2,70	3925	4529
55	5377	0857	80	3336	4509	72	4028	4358
60	5811	1105	85	3584	4077	74	4158	4207
65	6219	1393	90	3945	3733	76	4313	4080
70	6597	1721	95	4391	3511	78	4487	3982
0,75	6935	2089	2,00	4883	3434	2,80	4675	3915
80	7228	2493	05	5374	3513	82	4872	3883
85	7469	2932	10	5816	3743	84	5072	3886
90	7648	3398	15	6159	4103	86	5268	3924
95	7760	3885	20	6363	4557	88	5454	3996
1,00	7799	4383	2,25	6401	5053	2,90	5624	4101
05	7759	4880	30	6266	5532	92	5772	4235
10	7638	5365	35	5970	5931	94	5893	4394
15	7436	5821	40	5550	6197	96	5983	4572
20	7154	6234	45	5061	6289	98	6038	4764
1,25	6801	6587	2,50	4574	6192	3,00	6057	4963
	0,	0,		0,	0,		0,	0,

Продолжение табл. 24

x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$
	0,	0,		0,	0,		0,	0,
3,00	6057 - 38	4963 0	4,00	4984 0	4205 + 51	5,0	5636	4992
02	6038 37	5162 - 7	02	5182 - 13	4230 49	1	4998	5624
04	5982 36	5354 14	04	5368 25	4304 45	2	4299	4969
06	5891 32	5531 21	06	5528 35	4422 37	3	5078	4405
08	5767 28	5688 27	08	5654 44	4576 27	4	5572	5140
3,10	5616 - 22	5818 - 32	4,10	5737 - 50	4758 + 15	5,5	4784	5537
12	5442 16	5917 36	12	5771 52	4955 + 2	6	4517	4700
14	5253 9	5979 39	14	5753 51	5153 - 11	7	5385	4595
16	5054 - 1	6003 40	16	5684 47	5341 24	8	5298	5460
18	4855 + 7	5988 39	18	5570 39	5504 36	9	4486	5163
3,20	4663 + 15	5933 - 38	4,20	5417 - 28	5632 - 45	6,0	4995	4470
22	4486 22	5842 34	22	5236 16	5716 51	1	5495	5165
24	4331 29	5716 29	24	5040 - 2	5749 54	2	4676	5398
26	4204 34	5562 23	26	4841 + 12	5730 52	3	4760	4555
28	4111 38	5385 15	28	4655 26	5658 48	4	5496	4965
3,30	4057 + 41	5193 - 7	4,30	4494 + 38	5540 - 39	6,5	4816	5454
32	4043 42	4994 + 1	32	4371 47	5383 28	6	4690	4631
34	4071 41	4796 10	34	4295 53	5199 - 14	7	5467	4915
36	4139 38	4608 19	36	4270 55	5001 + 1	8	4831	5436
38	4246 34	4439 26	38	4301 53	4804 16	9	4732	4624
3,40	4385 + 27	4296 + 33	4,40	4383 + 47	4623 + 30	7,0	5455	4997
42	4551 20	4186 38	42	4512 37	4471 42	1	4733	5360
44	4738 11	4114 42	44	4678 24	4360 51	2	4887	4573
46	4935 + 2	4084 44	46	4868 + 10	4299 56	3	5393	5189
48	5134 - 8	4097 43	48	5067 - 6	4293 56	4	4601	5161
3,50	5326 - 17	4152 + 41	4,50	5260 - 22	4343 + 53	7,5	5160	4607
52	5501 26	4249 36	52	5432 36	4444 43	6	5156	5389
54	5650 33	4381 30	54	5568 47	4590 33	7	4628	4820
56	5767 39	4543 22	56	5658 55	4768 18	8	5395	4896
58	5845 43	4727 13	58	5694 58	4964 + 2	9	4760	5323
3,60	5880 - 45	4923 + 3	4,60	5672 - 56	5162 - 14	8,0	4998	4602
62	5869 45	5122 - 7	62	5595 50	5346 30	1	5228	5320
64	5815 42	5314 18	64	5469 40	5500 43	2	4638	4859
66	5718 38	5489 27	66	5304 26	5611 53	3	5377	4932
68	5584 31	5637 35	68	5114 - 9	5670 59	4	4709	5243
3,70	5419 - 22	5750 - 41	4,70	4914 + 8	5671 - 59	8,5	5142	4653
72	5233 12	5822 45	72	4723 25	5615 54	6	5025	5369
74	5036 - 1	5849 47	74	4557 40	5504 45	7	4827	4677
76	4837 + 10	5830 46	76	4431 52	5350 31	8	5280	5229
78	4649 21	5764 43	78	4355 59	5166 - 14	9	4661	4886
3,80	4481 + 31	5656 - 37	4,80	4338 + 61	4968 + 4	9,0	5354	4999
82	4343 39	5512 29	82	4380 57	4773 22	1	4666	5104
84	4244 45	5338 19	84	4479 48	4600 38	2	5291	4814
86	4189 48	5147 - 8	86	4624 35	4464 51	3	4763	5247
88	4182 49	4947 + 4	88	4804 + 18	4378 59	4	5180	4713
3,90	4223 + 47	4752 + 16	4,90	5002 - 1	4351 + 62	9,5	4873	5310
92	4311 42	4573 27	92	5198 20	4384 59	6	5081	4679
94	4439 34	4420 36	94	5375 37	4476 50	7	4955	5325
96	4601 24	4303 44	96	5515 51	4618 37	8	5019	4676
98	4786 13	4230 49	98	5605 60	4795 20	9	4996	5321
4,00	4984 0	4205 + 51	5,00	5636 - 63	4992 0	10,0	4999	4682
	0,	0,		0,	0,		0,	0,

значению u параметра, равна u , а кривизна κ в этой точке будет $\kappa = \pi u$. Кривизна, следовательно, пропорциональна длине дуги.

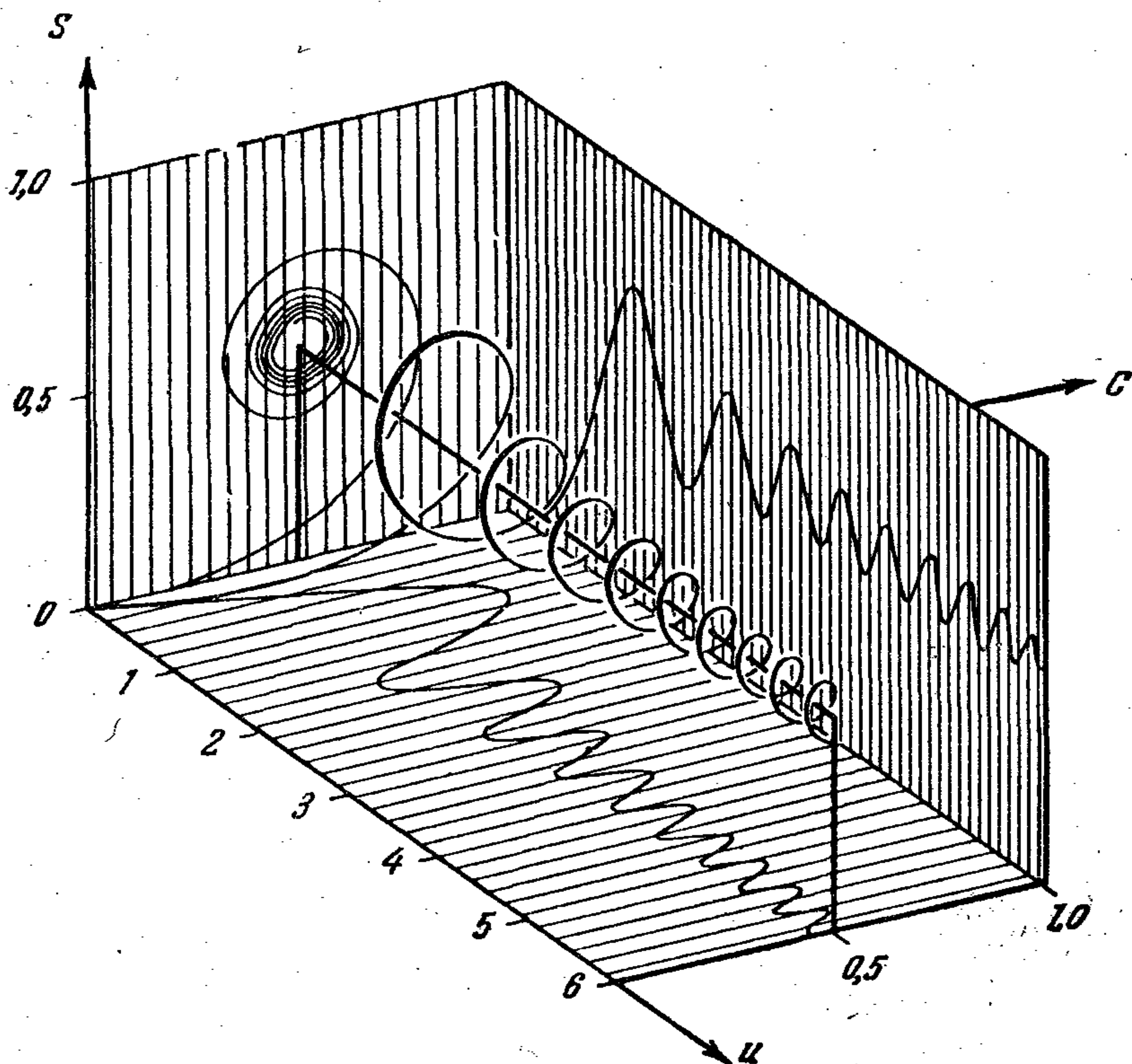


Рис. 34. Интегралы Френеля $C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$ и $S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$.

Если рассматривать u , $C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$, $S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$ как координаты в прямоугольной системе (u, C, S) , то получим пространственную спираль (рис. 34), проекциями которой на три координатные плоскости будут спираль Корню и кривые $C = C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$, $S = S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$.

VIII. ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

1. Определение и представления

В этом разделе n означает целое число, p — простое число; как всегда, $z = x + iy$

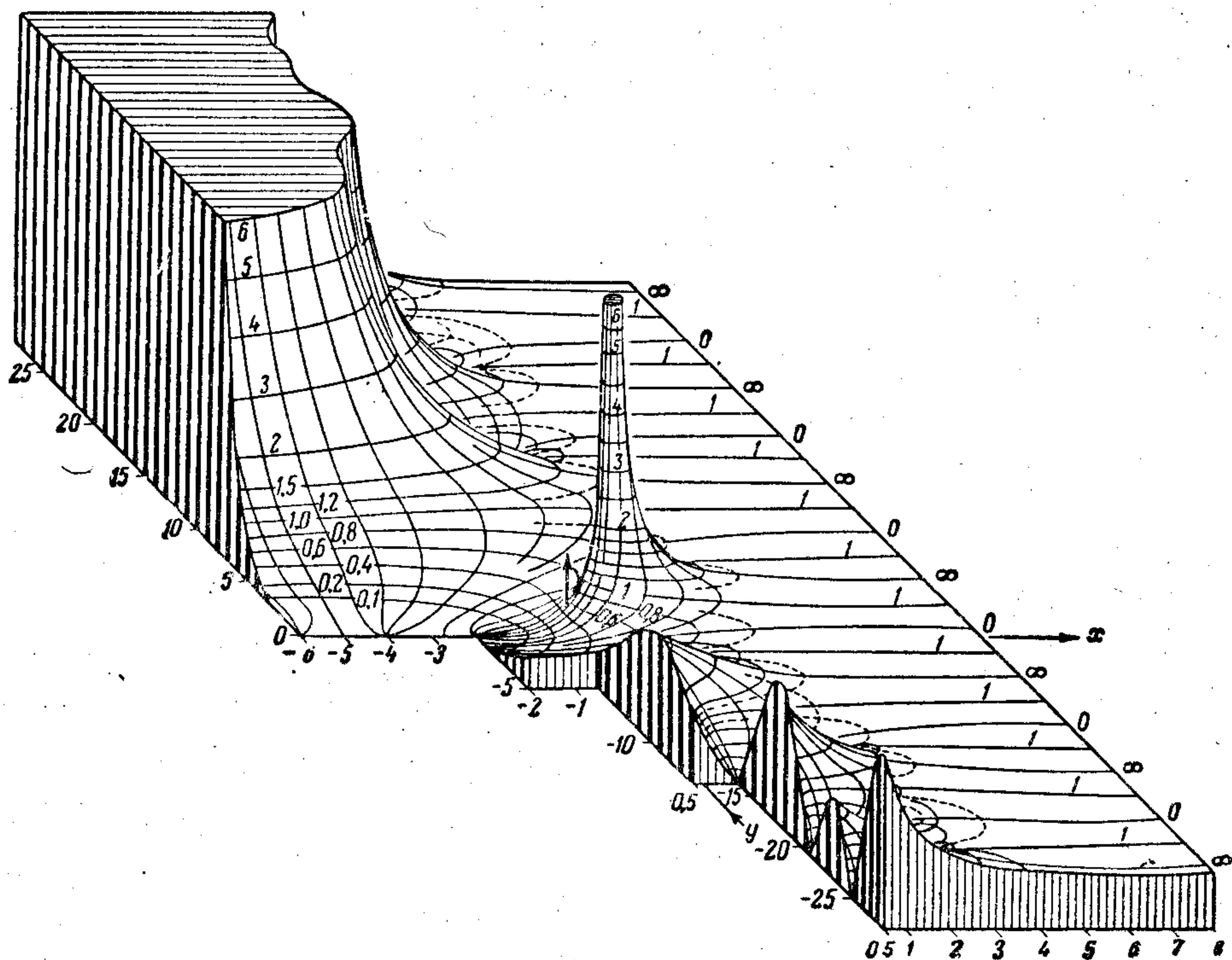


Рис. 35. Рельеф дзета-функции Римана $\zeta(z)$. Линии ската, обозначенные справа через 0, идут от нуля; обозначенные через ∞ — идут из бесконечности.

При $x > 1$ можно определить дзета-функцию Римана $\zeta(z)$ как

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1},$$

где произведение распространено на все простые числа. Имеем:

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z}) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \dots \quad (x > 1),$$

и вообще

$$\zeta(z)(1-2^{-z})(1-3^{-z})\dots(1-p^{-z})=1+\sum'_n \frac{1}{n^z} \quad (x>1),$$

где произведение в левой части распространено на все простые числа, не превосходящие p , а $\sum'$ означает суммирование только по тем значениям $n > p$, у которых все простые множители больше p .

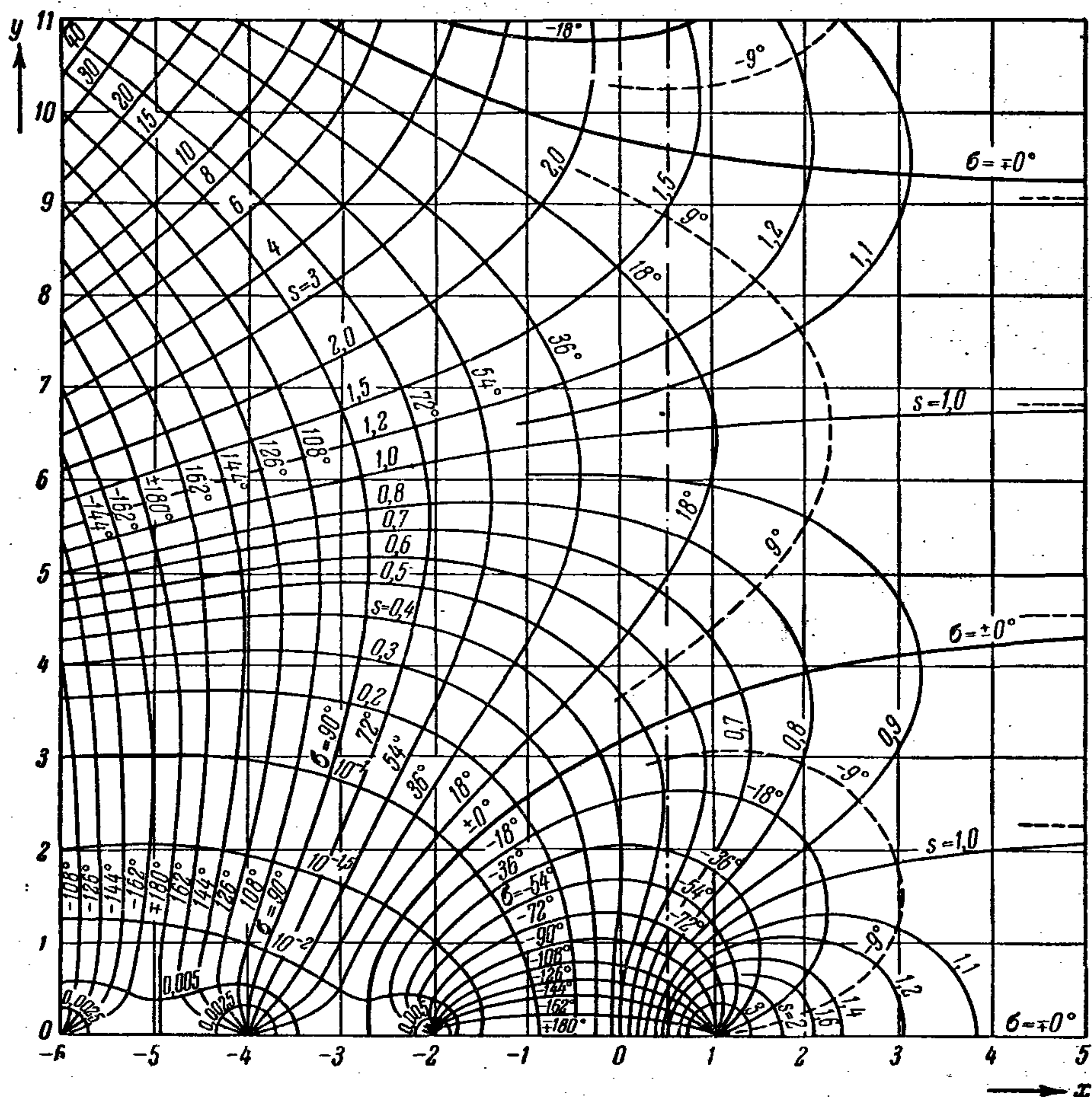


Рис. 36. Карта горизонталей рельефа дзета-функции Римана $\zeta(z)$.

[Эта функция аналитически продолжается на всю плоскость комплексного переменного z (рис. 35—37). Вдоль действительной оси функция $\zeta(x)$ принимает действительные значения (таблица 26).]

При $x > 0$ справедливо представление

$$(1-2^{1-z})\zeta(z)=1-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+\dots=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t+1}dt.$$

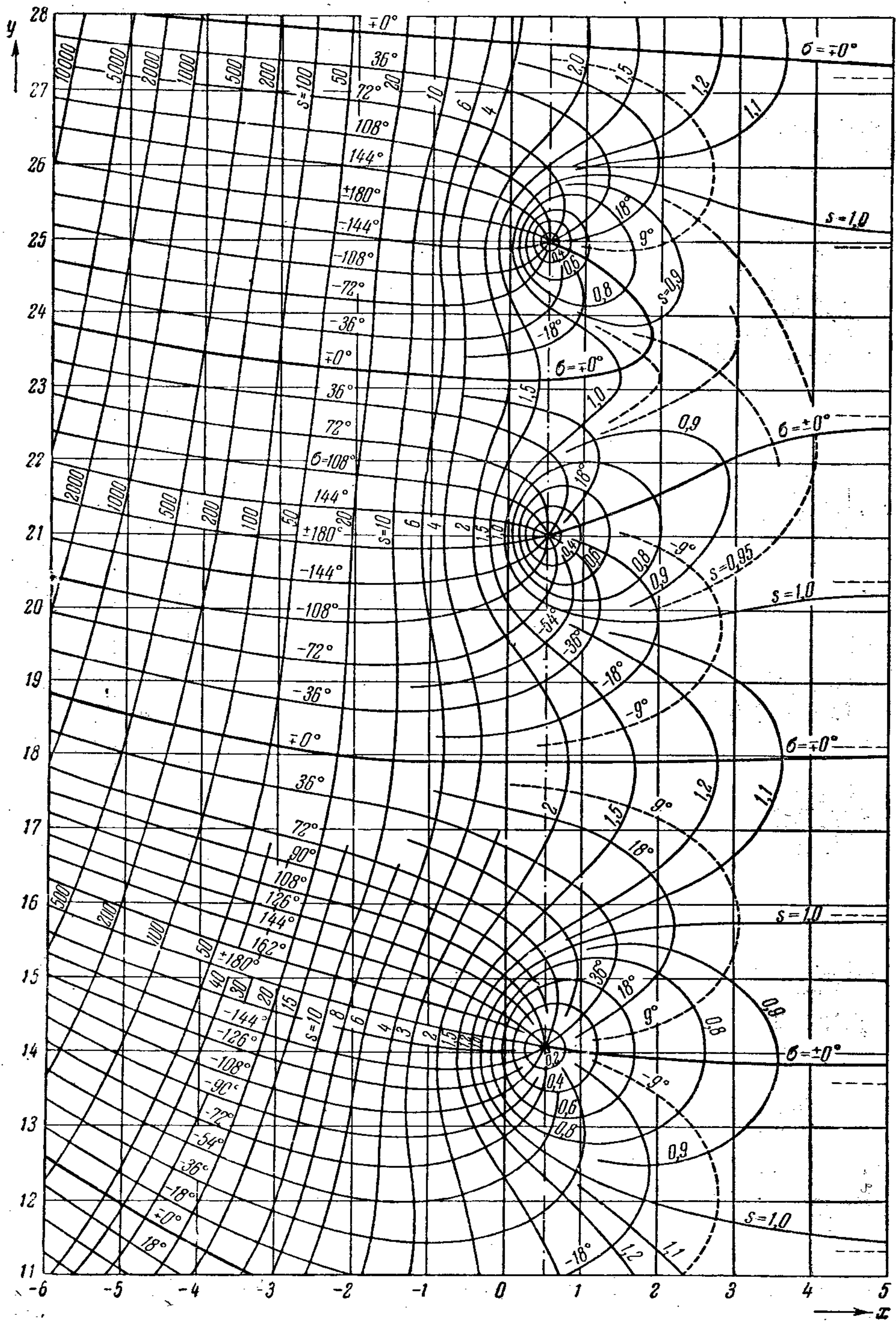


Рис. 37. Продолжение рис. 36 вверх.

При $|z| \ll 1$ особенно удобен для вычисления следующий ряд:

$$\zeta(z) = \sum_{v=1}^n \frac{1}{v^z} + \frac{1}{z-1} \frac{1}{n^{z-1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^z} + \frac{1}{12} \frac{z}{n^{z+1}} - \frac{1}{720} \frac{z(z+1)(z+2)}{n^{z+3}} +$$

$$+ \frac{1}{30\,240} \frac{z(z+1)\dots(z+4)}{n^{z+5}} - \frac{1}{1\,209\,600} \frac{z(z+1)\dots(z+6)}{n^{z+7}} +$$

$$+ \frac{1}{47\,900\,160} \frac{z(z+1)\dots(z+8)}{n^{z+9}} - \dots$$

Если положим для краткости $z = \frac{1}{2} + it = 2u$, то функция

$$\Xi(t) = \frac{(2u-1)\Gamma(u+1)}{\pi^u} \zeta(2u) = \Xi(-t)$$

будет четной относительно t и имеет действительные коэффициенты в разложении по возрастающим степеням t^2 . Нетривиальные нули ζ -функции, расположенные на прямой $\chi = \frac{1}{2}$, являются действительными корнями для функции $\Xi(t)$ (таблица 25).

2. Частные значения

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2n) = 0,$$

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad \zeta(2n) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

[В точке $z=1$ дзета-функция имеет полюс.]

3. Функциональные уравнения

$$\zeta(1+z) = \frac{2}{(2\pi)^z} \cos \frac{\pi z}{2} \Gamma(z) \zeta(z),$$

$$z(z+1) \frac{\zeta(z+2)\zeta(1-z)}{\zeta(z)\zeta(-1-z)} = -4\pi^2.$$

Таблица 25. Нули $\frac{1}{2} + i\alpha_n$ дзета-функции Римана $\zeta(x)$

n	α_n	n	α_n	n	α_n
1	14,134725	11	52,970	21	79,337
2	21,022040	12	56,446	22	82,910
3	25,010856	13	59,347	23	84,734
4	30,424878	14	60,833	24	87,426
5	32,935057	15	65,113	25	88,809
6	37,586176	16	67,080	26	92,494
7	40,918720	17	69,546	27	94,651
8	43,327073	18	72,067	28	95,871
9	48,005150	19	75,705	29	98,831
10	49,773832	20	77,145		

Таблица 26. Дзета-функция Римана $\zeta(x)$

x	$\zeta(x)$	$\zeta(-x)$	x	$\zeta(x)$	$\zeta(-x)$	x	$\zeta(x)$	$\zeta(-x)$
0,0	— 0,5000	— 0,5000	5,0	+ 1,0	— 0,003968	10,0	+ 1,000	0,00000
1	0,6030	0,4172	1	369	— 27	1	995	— 68
2	0,7339	0,3497	2	342	25	2	927	62
3	0,9046	0,2938	3	317	24	3	865	59
4	1,135	0,2472	4	293	21	4	806	54
0,5	— 1,460	— 0,2079	5,5	272	20	5,5	752	51
6	1,953	0,1746	6	252	18	6	701	— 47
7	2,778	0,1462	7	234	17	7	654	45
8	4,438	0,1220	8	217	16	8	609	41
9	— 9,430	0,1012	9	201	14	9	568	38
1,0	∞	— 0,08333	6,0	187	14	10,5	530	36
1	+ 10,584	0,06798	1	1734	— 123	11,0	494	— 33
2	5,592	0,05479	2	1611	115	1	461	31
3	3,932	0,04346	3	1496	106	2	430	29
4	3,106	0,03376	4	1390	98	3	401	27
1,5	+ 2,612	— 0,02549	6,5	1292	91	4	374	25
6	2,286	0,01845	7,5	1201	— 85	11,5	349	— 24
7	2,054	0,01251	8	1116	78	6	325	22
8	1,882	0,00752	9	1038	73	7	303	20
9	1,750	— 0,00339	10	965	67	8	283	19
2,0	+ 1,645	0,000000	11	898	63	9	264	18
1	1,560	+ 0,002729	12,0	835	— 58	12,0	2461	— 166
2	1,491	0,004879	1	0777	54	1	2295	154
3	1,432	0,006519	2	0723	50	2	2141	144
4	1,383	0,007713	3	0673	47	3	1997	134
2,5	+ 1,341	+ 0,008517	4	0626	43	4	1863	125
6	1,305	0,008982	7,5	0583	— 41	12,5	1738	— 117
7	1,274	0,009156	8	0542	37	6	1621	109
8	1,247	0,009081	9	0505	35	7	1512	102
9	1,223	— 0,008795	10	0470	32	8	1410	95
3,0	+ 1,202	+ 0,008333	11	0438	30	9	1315	88
1	1,183	0,007729	12,5	0408	— 28	13,0	1227	— 82
2	1,167	0,007012	1	0380	26	1	1145	77
3	1,152	0,006209	2	0354	25	2	1068	72
4	1,139	0,005344	3	0329	22	3	0996	67
3,5	+ 1,127	+ 0,004441	4	0307	21	4	0929	62
6	1,116	0,003520	8,5	0286	— 20	13,5	0867	— 58
7	1,106	0,002599	9,0	0266	18	6	0809	55
8	1,098	0,001696	1	0248	17	7	0754	50
9	1,090	+ 0,000825	2	0231	15	8	0704	47
4,0	+ 1,0823	0,000000	3	0216	15	9	0657	45
1	1,0757	— 0,000768	9,5	02008	— 136	14,0	0612	— 41
2	1,0698	0,001469	1	01872	128	1	0571	38
3	1,0643	0,002094	2	01744	118	2	0533	36
4	1,0593	0,002637	3	01626	111	3	0497	33
4,5	+ 1,0547	— 0,003092	4	01515	102	4	0464	31
6	1,0505	0,003455	9,5	01413	— 96	14,5	0433	— 29
7	1,0467	0,003725	6	01317	90	6	0404	27
8	1,0431	0,003900	7	01227	83	7	0377	26
9	1,0399	0,003980	8	01144	77	8	0351	23
5,0	+ 1,0369	— 0,003968	9	01067	72	9	0328	22
			10,0	00995	— 0,000000	15,0	0306	+ 0,4433
				+ 1,0			+ 1,000	

Продолжение табл. 26

x	$\zeta(x)$	$\zeta(-x)$	x	$\zeta(x)$	$\zeta(-x)$	x	$\zeta(x)$	$\zeta(-x)$
15,0	1,0000 306		18,0	1,00000 382		21,0	1,000000 477	
1	285	+ 0,4433	1	356	+ 0,000	1	445	- 281,5
2	266	0,4793	2	332	+ 1,525	2	415	314,5
3	248	0,5057	3	310	3,359	3	387	342,7
4	232	0,5193	4	289	5,505	4	361	363,5
		0,5173			7,955			373,9
15,5	216	+ 0,4963	18,5	270	+ 10,69	21,5	337	- 370,3
6	202	0,4531	6	252	13,66	6	315	349,0
7	188	0,3846	7	235	16,82	7	294	305,8
8	176	0,2879	8	219	20,08	8	274	236,2
9	164	+ 0,1604	9	205	23,34	9	256	- 135,7
16,0	1528	0,0000	19,0	1908	+ 26,46	22,0	2385	0,0
1	1426	- 0,1945	1	1780	29,27	1	2225	+ 175,2
2	1330	0,4236	2	1661	31,59	2	2076	393,4
3	1241	0,6865	3	1550	33,19	3	1937	657,3
4	1158	0,9810	4	1446	33,81	4	1807	968,3
16,5	1080	- 1,303	19,5	1349	+ 33,17	22,5	1686	+ 1326
6	1008	1,648	6	1259	30,96	6	1573	1728
7	0940	2,006	7	1175	26,87	7	1468	2168
8	0877	2,369	8	1096	20,56	8	1369	2638
9	0819	2,723	9	1022	+ 11,71	9	1278	3123
17,0	0764	- 3,054	20,0	0954	0,00	23,0	1192	+ 3608
1	0713	3,343	1	0890	- 14,83	1	1112	4066
2	0665	3,569	2	0830	33,00	2	1038	4471
3	0620	3,710	3	0775	54,63	3	0968	4784
4	0579	3,739	4	0723	79,75	4	0903	4964
17,5	0540	- 3,630	20,5	0675	- 108,2	23,5	0843	+ 4960
6	0504	3,353	6	0629	139,7	6	0787	4715
7	0470	2,880	7	0587	173,7	7	0734	4167
8	0439	2,181	8	0548	209,5	8	0685	3246
9	0409	- 1,229	9	0511	245,9	9	0639	+ 1882
18,0	0382	0,000	21,0	0477	- 281,5	24,0	0596	0
	1,0000			1,00000			1,000000	

IX. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определения и обозначения

Эллиптическим интегралом называется интеграл вида

$$\int R(z, \omega) dz,$$

причем R — рациональная функция двух своих аргументов, а $\omega^2 = P(z)$, где $P(z)$ — полином 3-й или 4-й степени без кратных нулей.

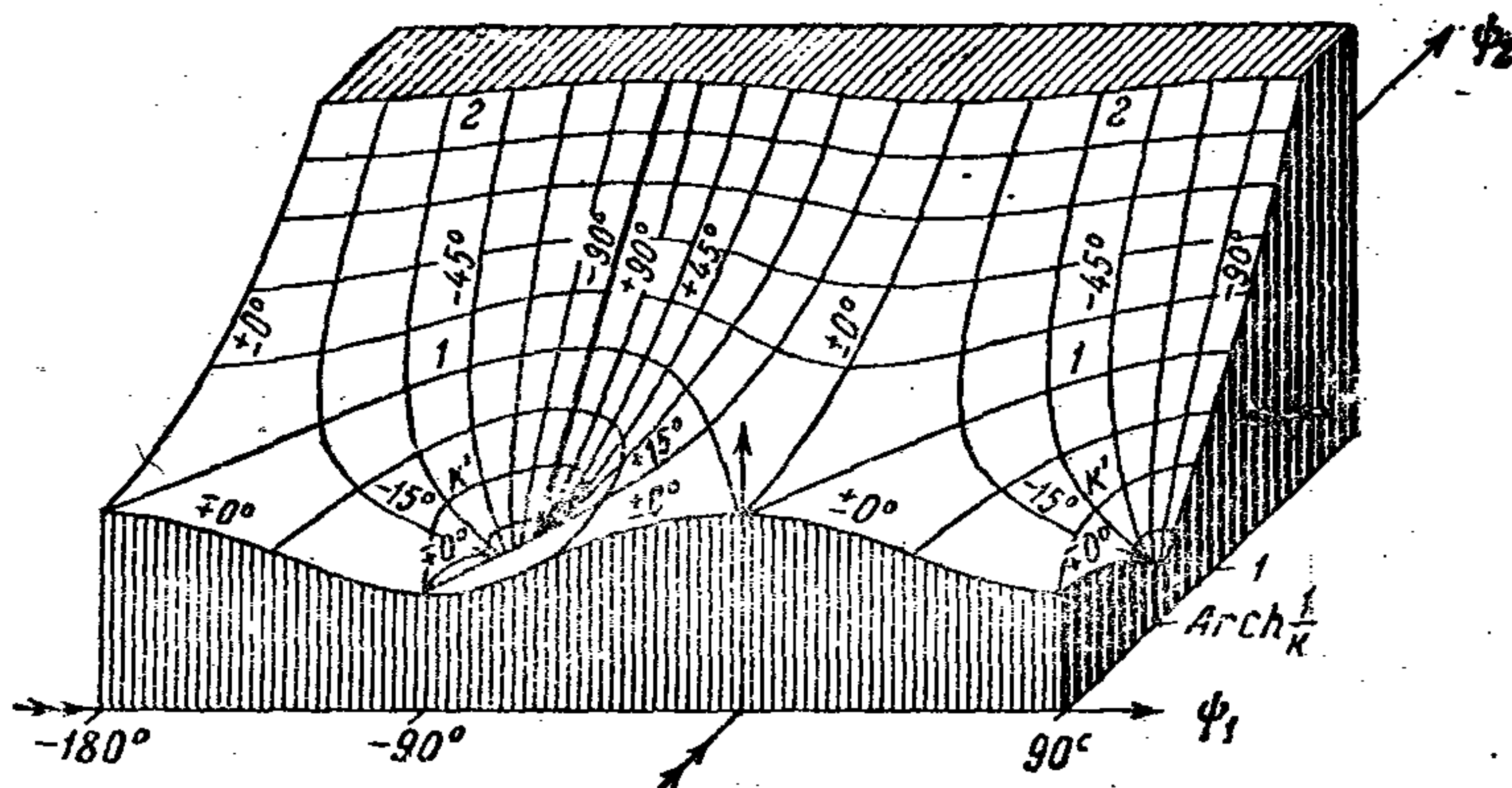


Рис. 38. Рельеф функции $\Delta(\psi, k)$ при $k=0,8$. Точки ветвления

$$\pm \frac{\pi}{2} \pm i \operatorname{Arch} \frac{1}{k}.$$

Следующие интегралы:

$$\int_0^z \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)},$$

$$\int_0^z V \frac{1-k^2t^2}{1-t^2} dt,$$

$$\int_0^z \frac{dt}{(1+nt^2)V(1-t^2)(1-k^2t^2)}$$

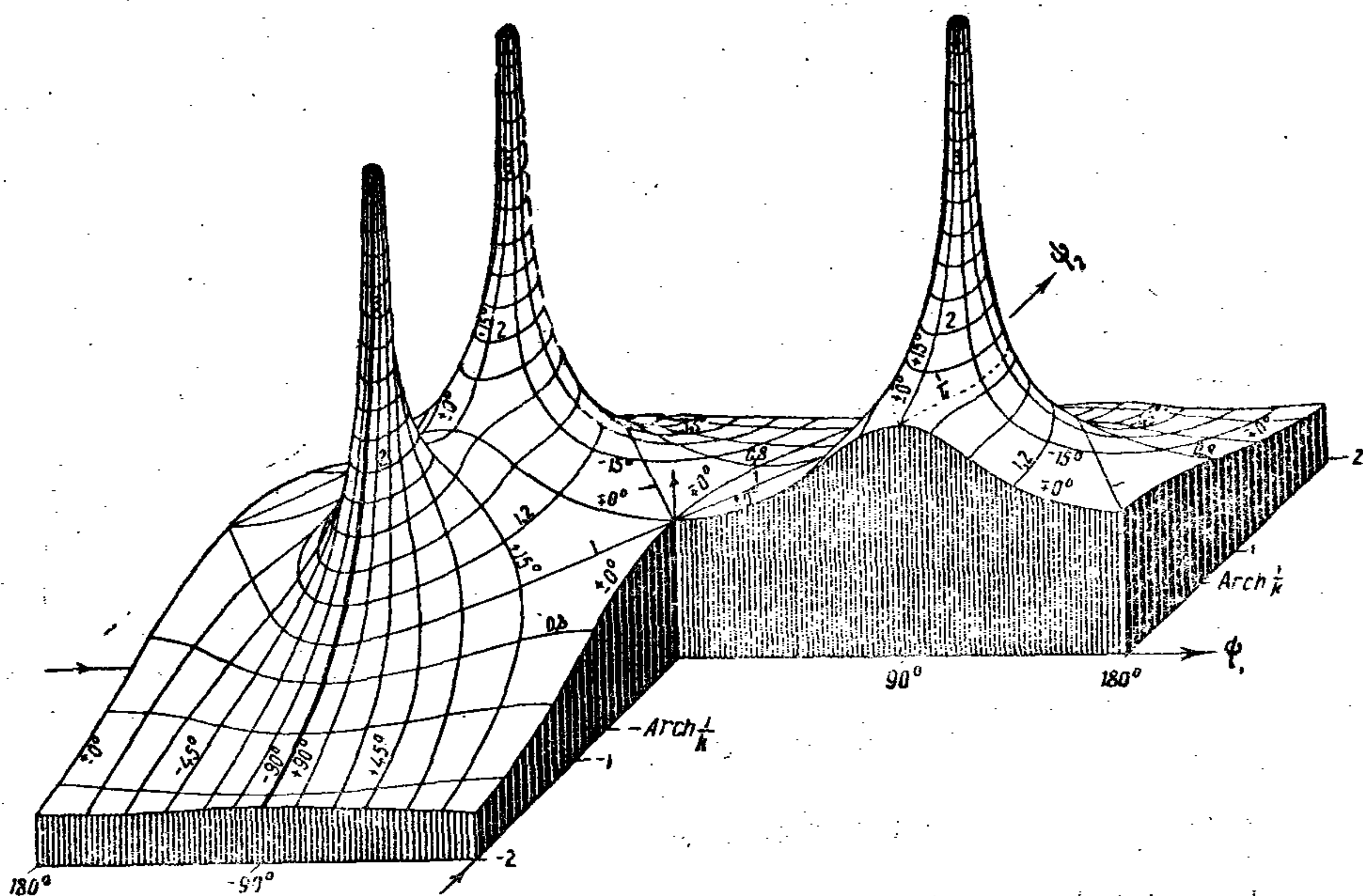
или, что то же, в тригонометрической форме ($z = \sin \varphi$, $t = \sin \psi$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$)

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi,$$

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

называются *неполными эллиптическими интегралами 1-го, 2-го и 3-го родов*



Если верхний предел интегрирования $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то получаем *полные эллиптические интегралы в нормальной форме*. Обозначают:

$$K(k) = F\left[\frac{\pi}{2}, k\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)} = \int_0^1 \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)},$$

$$E(k) = E\left[\frac{\pi}{2}, k\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\psi, k) d\psi = \int_0^1 V \frac{1-k^2t^2}{1-t^2} dt,$$

$$D(k) = \frac{K-E}{k^2} = D\left[\frac{\pi}{2}, k\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi = \int_0^1 \frac{t^2}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} dt.$$

Нормальная форма полных интегралов, соответствующих дополнительному модулю k' , обозначается так:

$$K'(k) = K(k'), \quad E'(k) = E(k').$$

А. ПРИВЕДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

1. Общие замечания

Всякий эллиптический интеграл может быть представлен как линейная комбинация элементарных функций и интегралов 1-го, 2-го и 3-го родов в нормальной форме Лежандра. Для действительных эллиптических интегралов это представление *) можно произвести так, что модуль k в нормальных формах интегралов и параметр n в нормальной форме интегралов 3-го рода будут действительны и $0 < k < 1$. Верхний предел интегрирования φ может при этом лежать в промежутке $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

2. Приведение к нормальной форме действительных интегралов

2.1. Если преобразовать действительный эллиптический интеграл

$$\int R(x, \sqrt{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}) dx$$

подходящим образом выбранной подстановкой

$$x = \frac{p+qt}{1+t} \quad (\text{если } a_0 \neq 0) \quad \text{или} \quad x = t^2 - r \quad (\text{если } a_0 = 0)$$

к виду

$$\int R^*(t, \sqrt{\pm(t^2 - \lambda)(t^2 - \mu)}) dt,$$

то во многих случаях можно привести его к нормальной форме с помощью следующей вспомогательной таблицы. Она содержит в первом и последнем

*) Формулы, необходимые в различных возможных случаях, можно найти в удобной для вычислений форме, например, в книгах: P. F. Byrd and M. D. Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954; F. Tricomi, Funzioni Ellittiche, Bologna, 1951; J. Houël, Recueil de formules et de tables numériques, Paris, 1901.

столбцах эллиптические интегралы, равные соответственно $\frac{1}{c} F(\varphi, k)$ или $mE(\varphi, k)$, причем модуль $k = \frac{a}{c}$, а значения φ и m находятся из средних столбцов (числа a, b, c связаны соотношением $a^2 + b^2 = c^2$).

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad k = \frac{a}{c}, \quad k' = \frac{b}{c}$$

$\frac{1}{c} F(\varphi, k)$	φ	m	$mE(\varphi, k)$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(b^2 + t^2)(c^2 + t^2)}}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{b}$	$\frac{c}{b^2}$	$\int_0^x \sqrt{\frac{c^2 + t^2}{(b^2 + t^2)^3}} dt$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(b^2 + t^2)(c^2 + t^2)}}$	$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{x}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\int_x^{+\infty} \sqrt{\frac{b^2 + t^2}{(c^2 + t^2)^3}} dt$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 + t^2)}}$	$\frac{\sin \varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{cx}{ab}$	$\frac{1}{b^2 c}$	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 + t^2)^3}}$
$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 + t^2)}}$	$\cos \varphi = \frac{x}{a}$	c	$\int_x^a \sqrt{\frac{b^2 + t^2}{a^2 - t^2}} dt$
$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 - b^2)}}$	$\cos \varphi = \frac{b}{x}$	$\frac{c}{b^2}$	$\int_b^x \sqrt{\frac{t^2 + a^2}{t^2 - b^2}} \frac{dt}{t^2}$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 - b^2)}}$	$\frac{\Delta(\varphi, k)}{\sin \varphi} = \frac{x}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\int_x^{+\infty} \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3 (t^2 - b^2)}}$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(c^2 - t^2)}}$	$\sin \varphi = \frac{x}{a}$	c	$\int_0^x \sqrt{\frac{c^2 - t^2}{a^2 - t^2}} dt$
$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(c^2 - t^2)}}$	$\frac{\cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{x}{a}$	$\frac{1}{b^2 c}$	$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(c^2 - t^2)^3}}$
$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - b^2)(c^2 - t^2)}}$	$\Delta(\varphi, k) = \frac{b}{x}$	$\frac{1}{b^2 c}$	$\int_b^x \frac{dt}{t^2 \sqrt{(t^2 - b^2)(c^2 - t^2)}}$
$\int_x^c \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - c^2)}}$	$\Delta(\varphi, k) = \frac{x}{c}$	c	$\int_x^c \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2 - b^2)(c^2 - t^2)}}$
$\int_c^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - c^2)}}$	$\frac{\Delta(\varphi, k)}{\cos \varphi} = \frac{x}{c}$	$\frac{c}{b^2}$	$\int_c^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)^3 (t^2 - c^2)}}$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - c^2)}}$	$\sin \varphi = \frac{c}{x}$	$\frac{1}{c}$	$\int_x^{+\infty} \sqrt{\frac{t^2 - a^2}{t^2 - c^2}} \frac{dt}{t^2}$

2.2. Первый столбец приводимой ниже вспомогательной таблицы дает некоторые эллиптические интегралы, равные $mF(\varphi, k)$ при соответствующих значениях φ, k, m .

$mF(\varphi, k)$	φ	k	m
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$	$\cos \varphi = \frac{x-1-\sqrt{3}}{x-1+\sqrt{3}}$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} &= \\ &= 0,2588190 = \\ &= \sin 15^\circ \end{aligned} \right.$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{3}} &= 0,7598357 \\ \\ \\ 2 - \sqrt{2} &= 0,5857864 \end{aligned} \right.$
$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$	$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}+1-x}{\sqrt{3}-1+x}$		
$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$	$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}-1+x}{\sqrt{3}+1-x}$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} &= \\ &= 0,9659258 = \\ &= \sin 75^\circ \end{aligned} \right.$	
$\int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$	$\cos \varphi = \frac{1-x-\sqrt{3}}{1-x+\sqrt{3}}$		
$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$\operatorname{tg} \varphi = (\sqrt{2}+1) \frac{1-x}{1+x}$	$\left\{ \begin{aligned} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt[4]{2} &= \\ &= 0,9851714 = \\ &= \sin 80^\circ, 12070 \end{aligned} \right.$	
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$\cos \varphi = \frac{x^2-1}{x^2+1}$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0,7071068 = \\ &= \sin 45^\circ \end{aligned} \right.$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \end{aligned} \right.$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$\cos \varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}$		
$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$	$\cos \varphi = \frac{1}{x}$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right.$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right.$
$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$	$\cos \varphi = x$		

2.3. Следующие интегралы могут быть выражены через F, E и D (все от аргументов φ, k):

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi = F - D, \quad \int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi = \frac{\Delta(\varphi, k) \operatorname{tg} \varphi - E}{k'^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k) \cos^2 \psi} = \frac{\Delta(\varphi, k) \operatorname{tg} \varphi + k^2 (D - F)}{k'^2}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta^3(\psi, k)} = \frac{E}{k'^2} - \frac{k^2}{k'^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2 \psi}{\Delta^3(\psi, k)} d\psi = \frac{F - D}{k'^2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{k'^2 \Delta(\varphi, k)}, \quad \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \psi}{\Delta^3(\psi, k)} d\psi = D + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

$$\int_0^\varphi \Delta(\psi, k) \operatorname{tg}^2 \psi d\psi = \Delta(\varphi, k) \operatorname{tg} \varphi + F - 2E.$$

В. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА НЕПОЛНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Представления

1.1. Неполный эллиптический интеграл 1-го рода $F(\varphi, k)$ (рис. 40—44) и неполный эллиптический интеграл 2-го рода $E(\varphi, k)$ (рис. 45—48) допускают

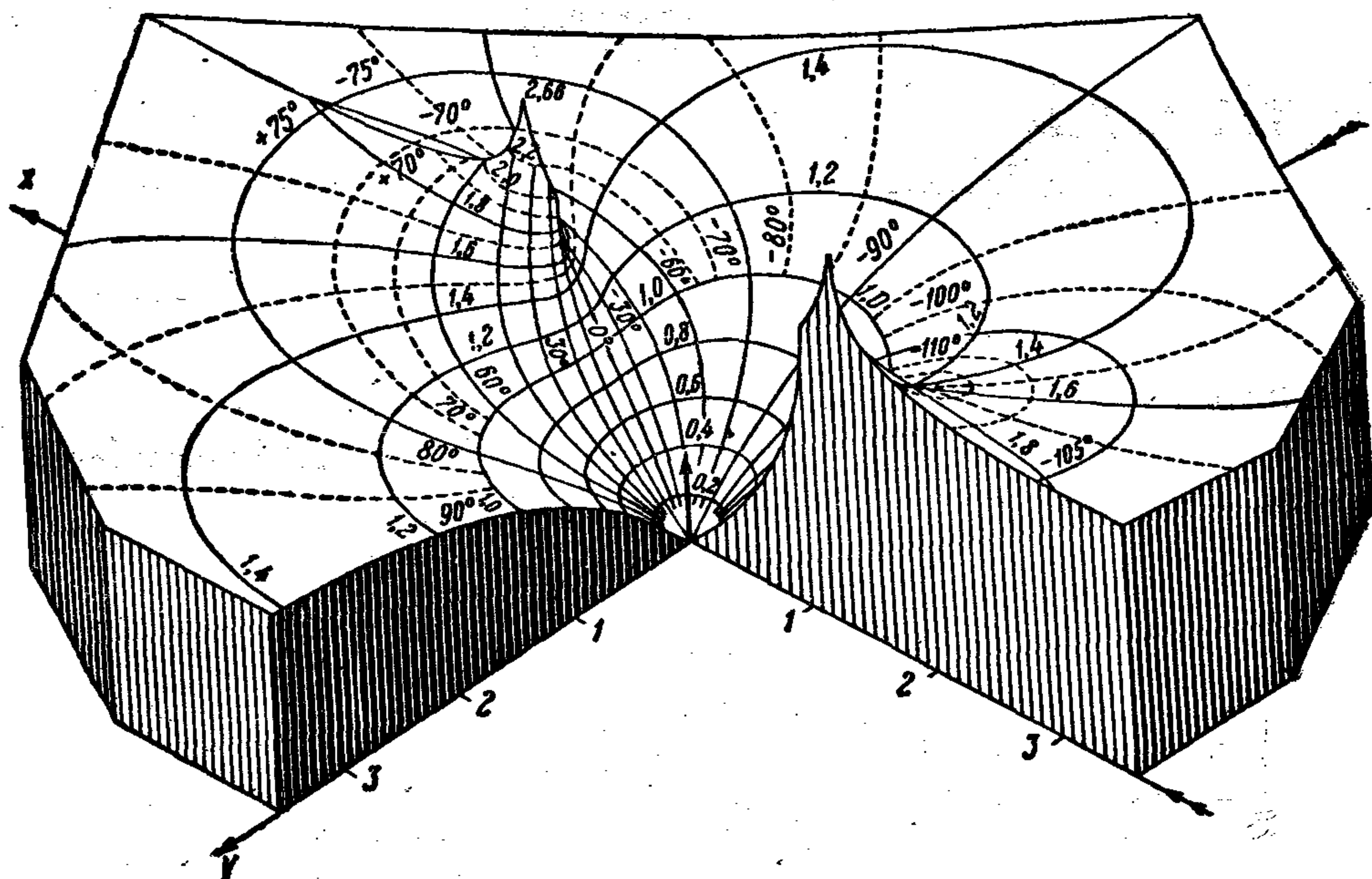


Рис. 40. Рельеф функции $F(\varphi, k)$ при $k=0,8$ над плоскостью $x+iy=\sin \varphi$.

следующие представления в действительной области:

$$\begin{aligned}
 F(\varphi, k) &= \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int_{\cos \varphi}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\sin^2 \varphi} \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt{(1-t)(1-k^2 t)}} = \int_{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}^1 \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt{k'^2(1+t^2) + 2(1+k^2)t}} = \\
 &= \int_0^{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt{1+t^2 + 2(k'^2 - k^2)t}} = \int_1^{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt{k'^2(1+t^2) + 2(1+k^2)t}}, \\
 E(\varphi, k) &= \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt = \int_{\cos \varphi}^1 \sqrt{\frac{k'^2 + k^2 t^2}{1-t^2}} dt = \\
 &= \int_0^{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \frac{\sqrt{1+t^2 + 2(k'^2 - k^2)t}}{(1+t)^2 \sqrt{t}} dt = \int_1^{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \sqrt{2(1+k^2) + k'^2 \left(t + \frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{(1+t)^2} = \\
 &= \int_{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}^1 \sqrt{2(1+k^2) + k'^2 \left(t + \frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{(1+t)^2}.
 \end{aligned}$$

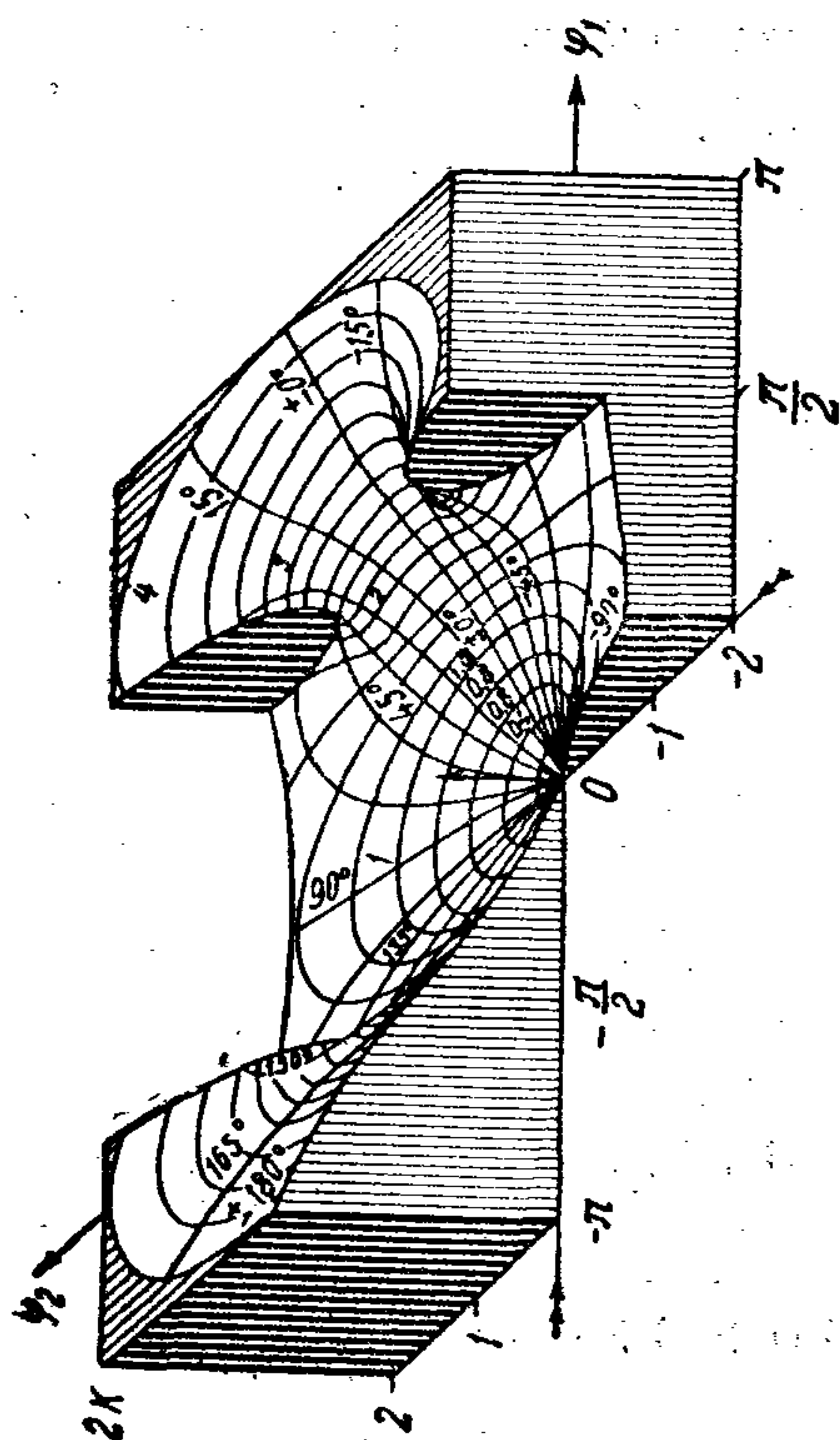


Рис. 41. Рельеф первой ветви функции $F(\varphi, k)$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, при $k=0,8$.

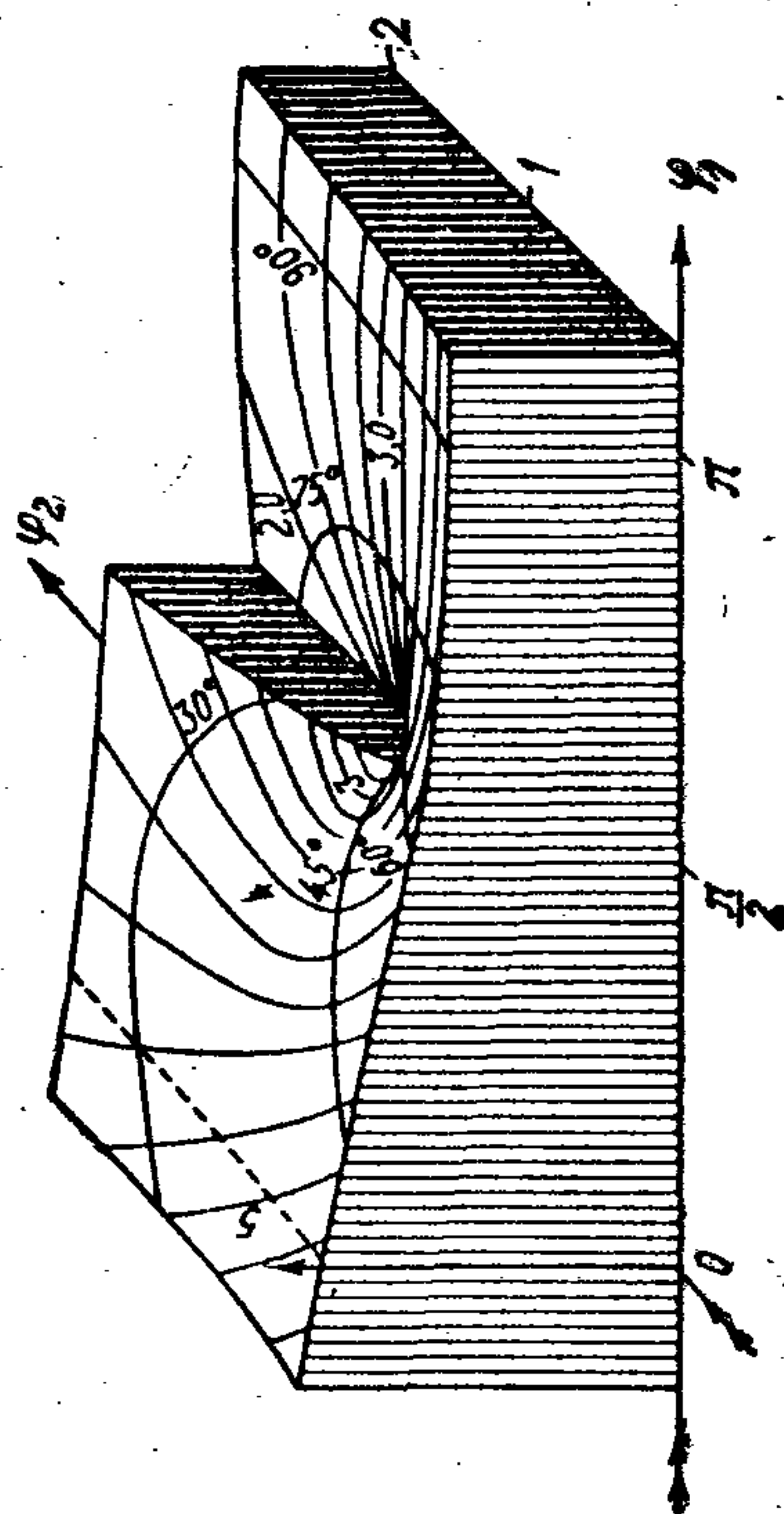


Рис. 42. Рельеф второй ветви функции $F(\varphi, k)$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, при $k=0,8$.

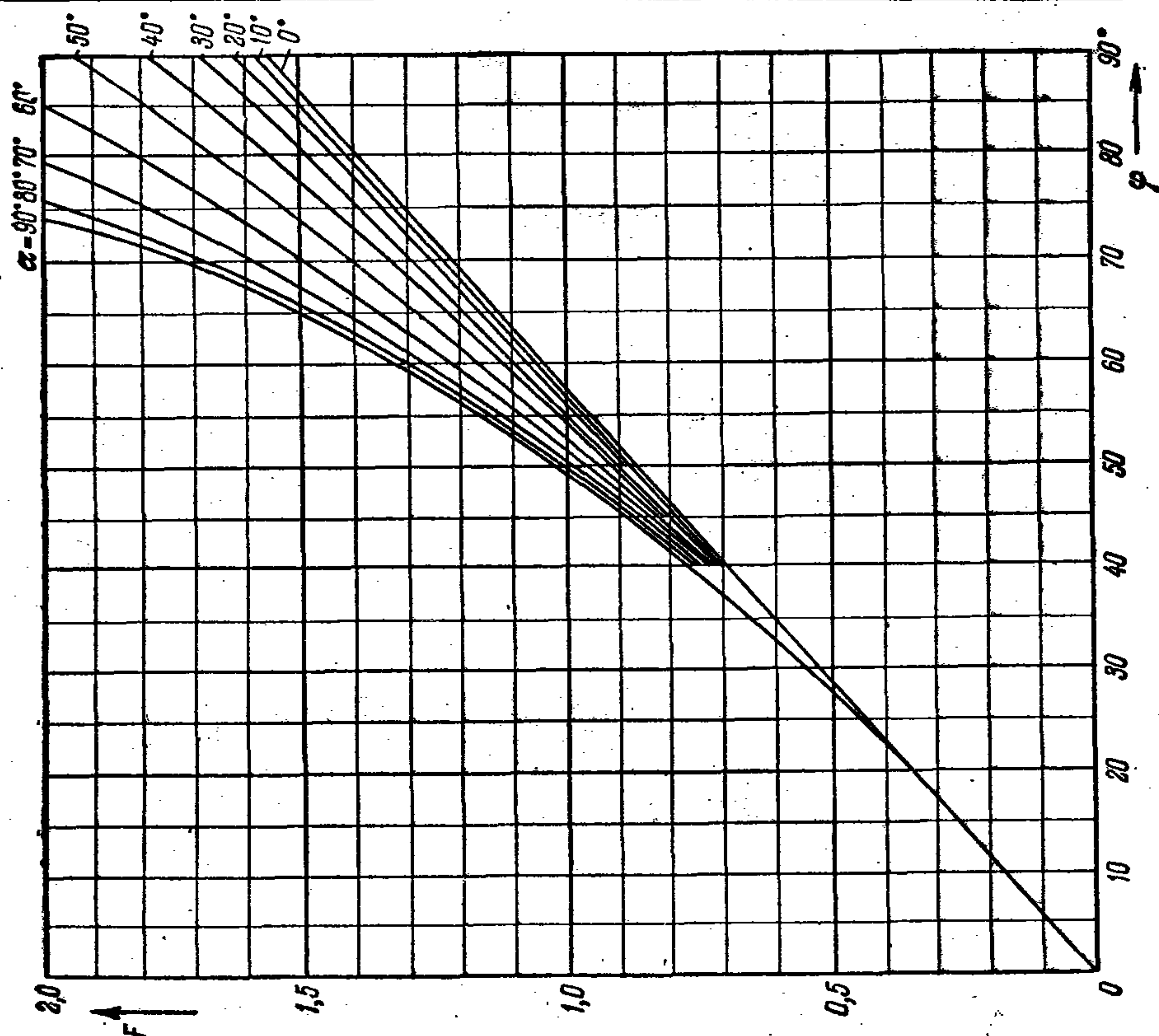


Рис. 43. Кривые $F(\varphi, \sin \alpha)$, $\alpha = \text{const.}$

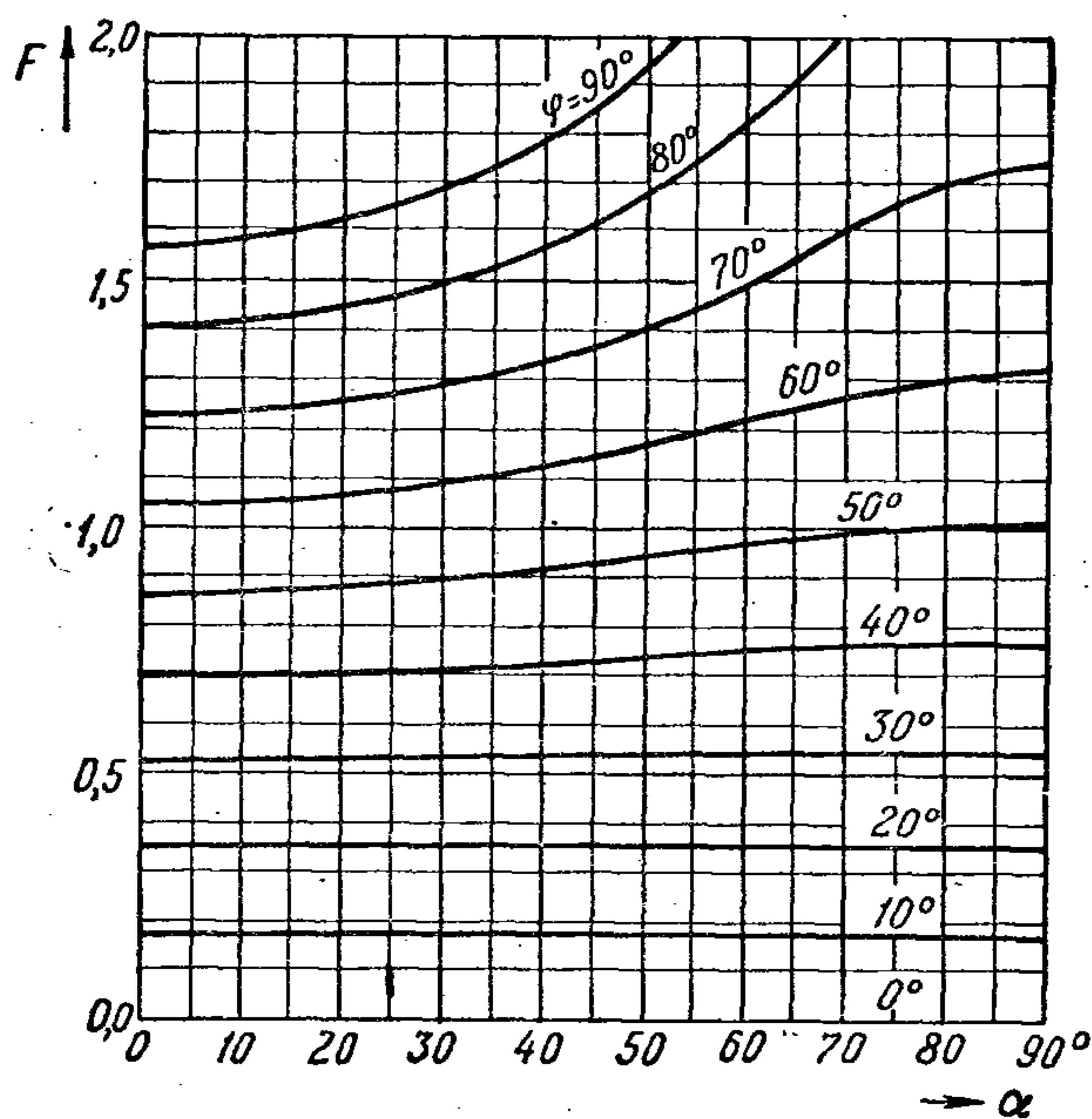


Рис. 44. Кривые $F(\varphi, \sin \alpha)$, $\varphi = \text{const.}$

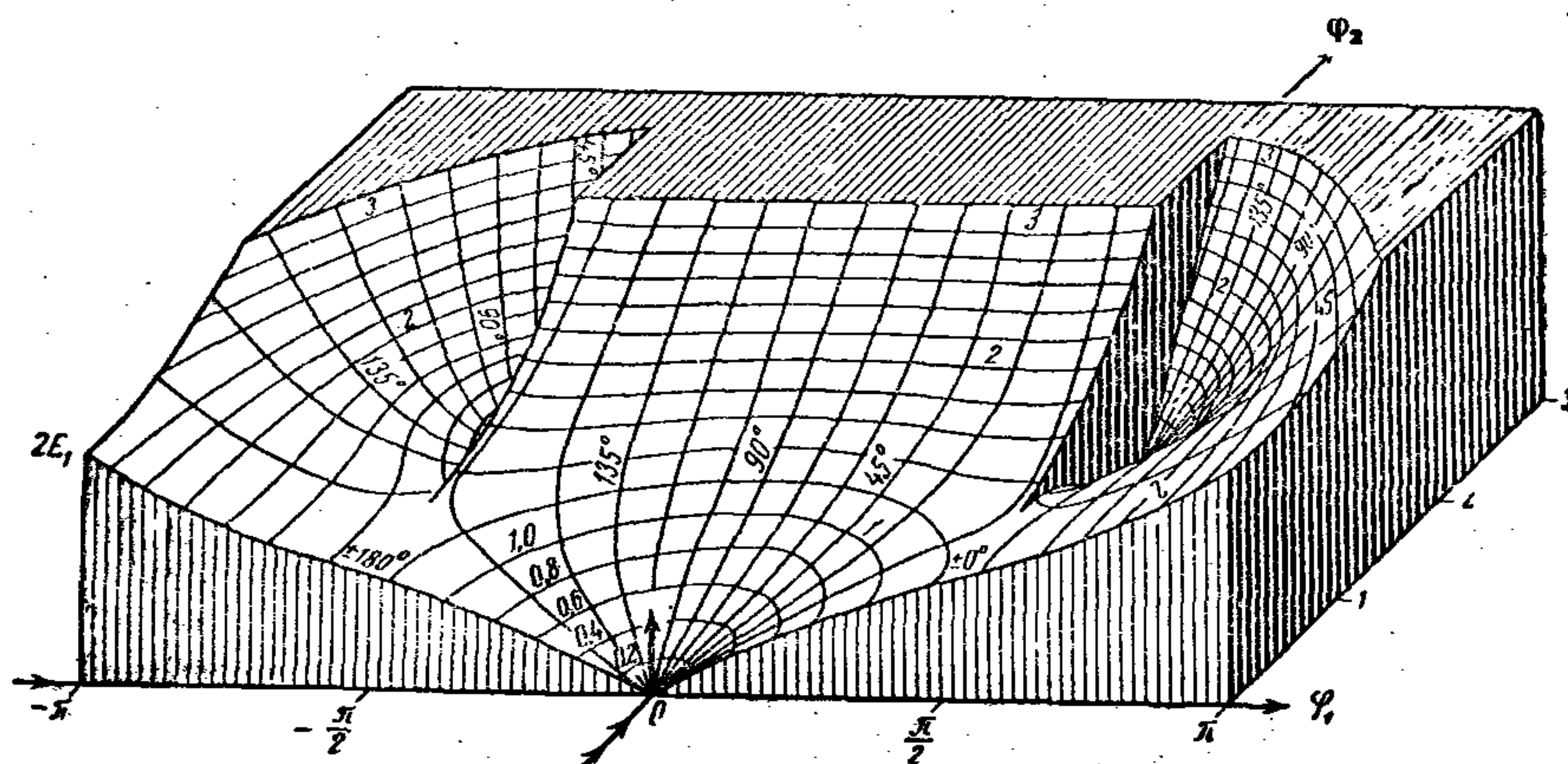


Рис. 45. Рельеф первой ветви функции $E(\varphi, k)$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, при $k=0.8$.

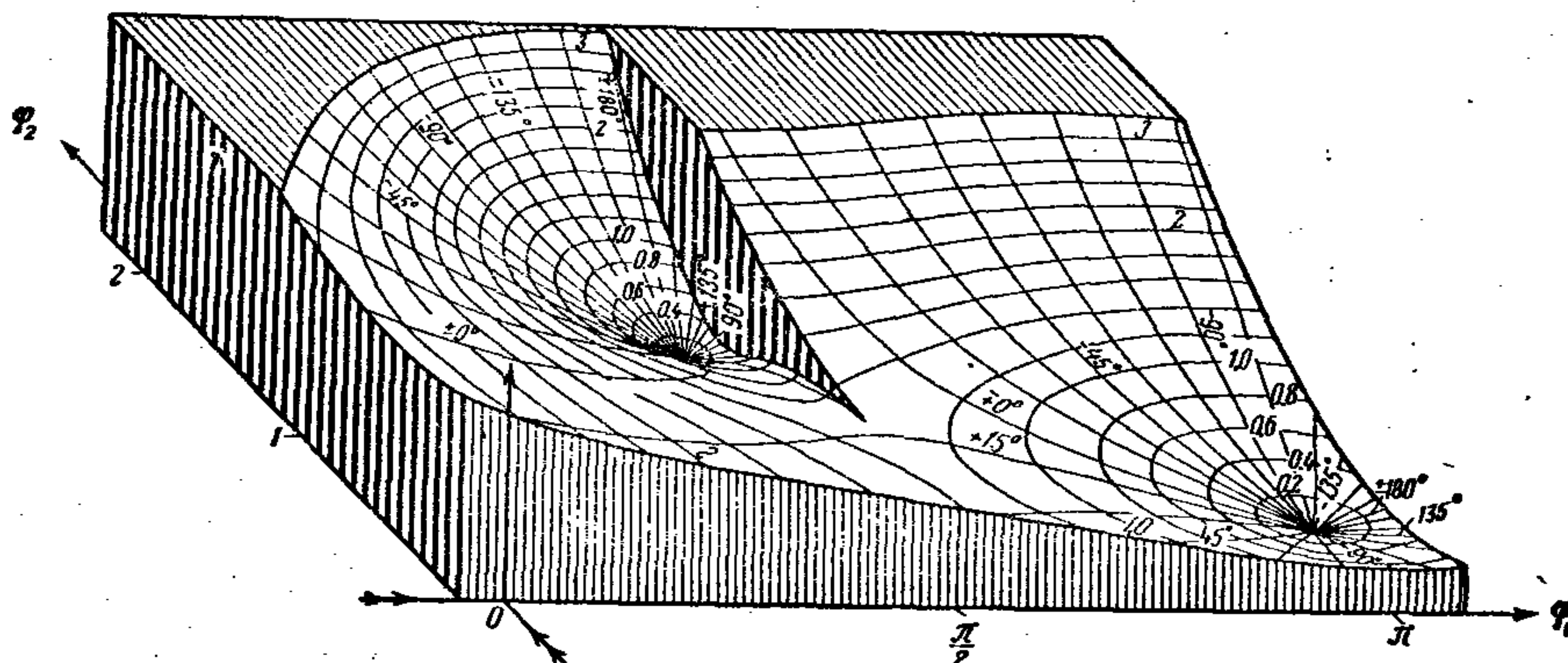


Рис. 46. Рельеф второй ветви функции $E(\varphi, k)$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, при $k=0.8$.

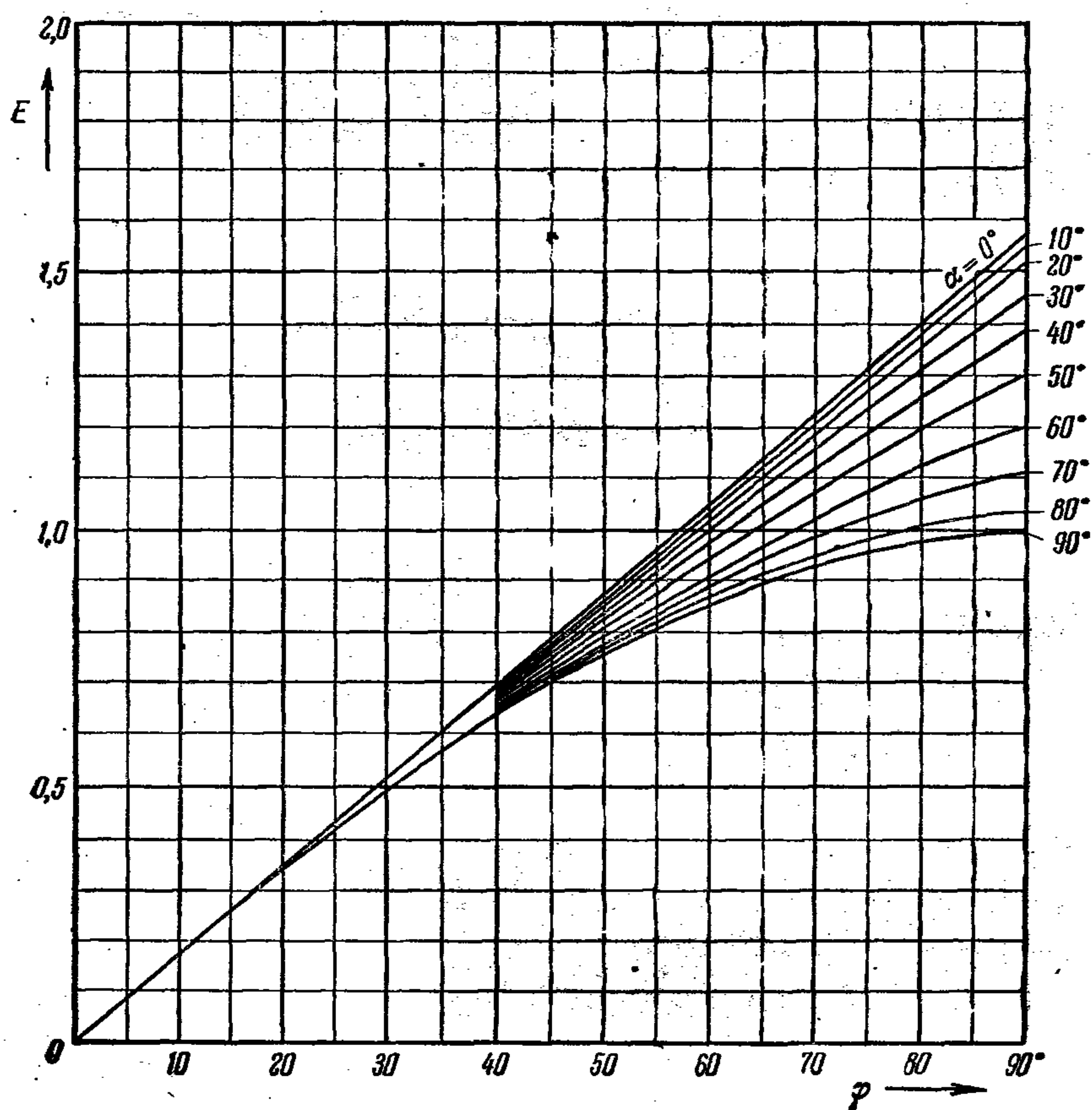
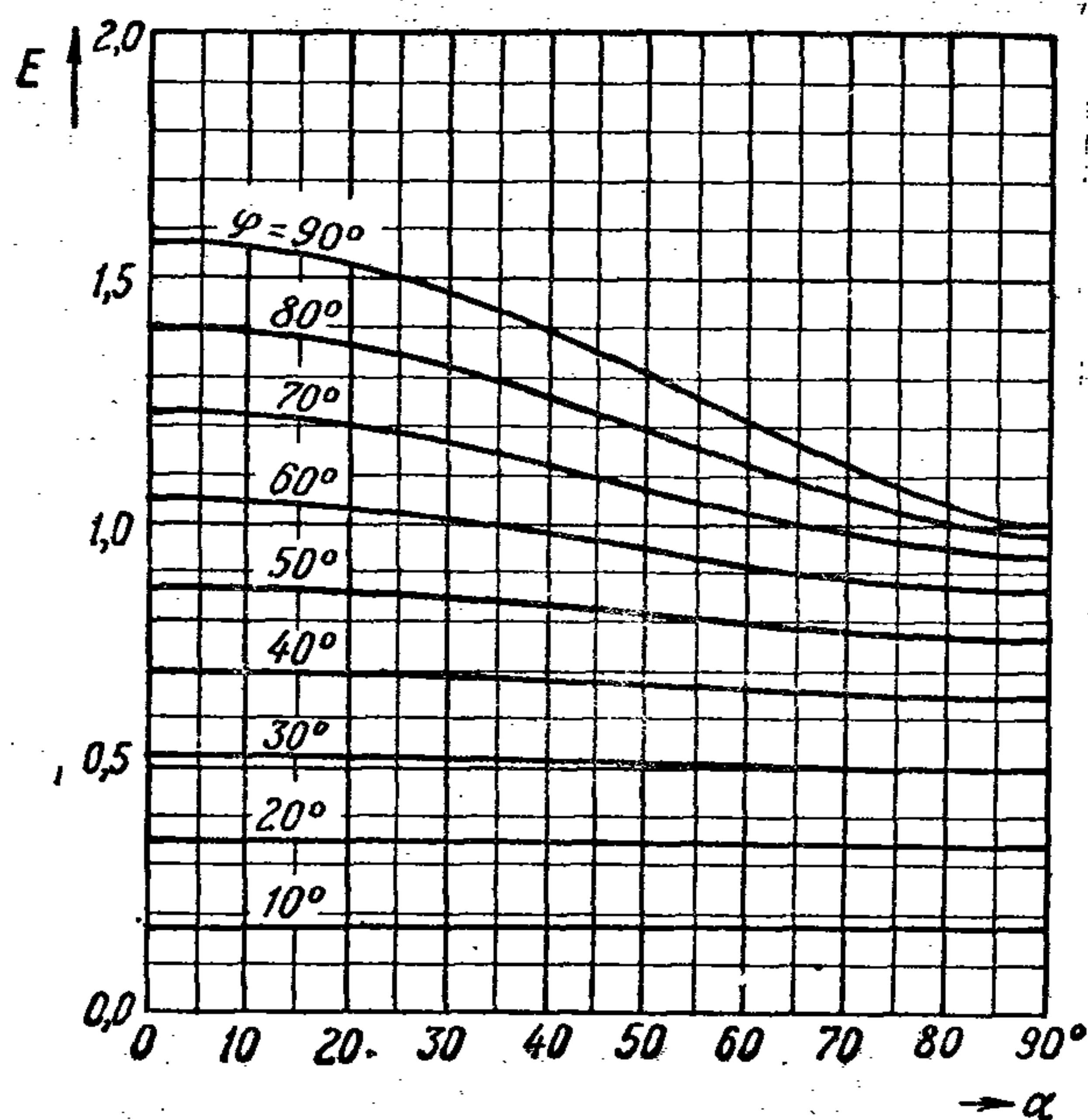
Рис. 47. Кривые $E(\varphi, \sin \alpha)$, $\alpha = \text{const.}$ Рис. 48. Кривые $E(\varphi, \sin \alpha)$, $\varphi = \text{const.}$

Таблица 27. Неполный эллиптический интеграл 1-го рода $F(\varphi, k)$

φ	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0°	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5
2°	03491 1745	03491 1745	03491 1745	03491 1745,5	03491 1745,5	03491 1745,5	03491 1746
4°	06981 1745,5	06981 1745,5	06981 1746	06982 1745,5	06982 1746	06982 1746,5	06983 1747
6°	10472 1745,5	10472 1745,5	10473 1745,5	10473 1746,5	10474 1747	10475 1748	10477 1748,5
8°	13963 1745	13963 1745,5	13964 1746	13966 1746,5	13968 1748	13971 1749	13974 1750,5
10°	1745 + 174,5	1745 + 175	1746 + 174,5	1746 + 174,5	1746 + 175	1747 + 175	1748 + 175
12°	2094 174,5	2095 174,5	2095 174,5	2095 175	2096 175	2097 175,5	2098 176
14°	2443 175	2444 174,5	2444 175	2445 175	2446 175,5	2448 175,5	2450 176
16°	2793 174,5	2793 174,5	2794 174,5	2795 175	2797 175,5	2799 176	2802 176
18°	3142 174,5	3142 174,5	3143 175	3145 175	3148 175,5	3151 176	3154 177
20°	3491 + 174,5	3491 + 174,5	3493 + 174,5	3495 + 175,5	3499 + 176	3503 + 176,5	3508 + 177,5
22°	3840 174,5	3840 175	3842 175	3846 175,5	3851 176	3856 177	3863 178
24°	4189 174,5	4190 174,5	4192 175	4197 175,5	4203 176,5	4210 177,5	4219 178,5
26°	4538 174,5	4539 174,5	4542 175,5	4548 175,5	4556 176,5	4565 178	4576 179
28°	4887 174,5	4888 175	4893 175	4899 176	4909 177	4921 178	4934 180
30°	5236 + 174,5	5238 + 174,5	5243 + 175	5251 + 176	5263 + 177	5277 + 179	5294 + 181
32°	5585 174,5	5587 175	5593 175,5	5603 176,5	5617 178	5635 179,5	5656 181
34°	5934 174,5	5937 174,5	5944 175,5	5956 176,5	5973 178	5994 179,5	6018 182,5
36°	6283 174,5	6286 175	6295 175,5	6309 176,5	6329 178	6353 180,5	6383 183
38°	6632 174,5	6636 174,5	6646 175,5	6662 177	6685 179	6714 181	6749 183,5
40°	6981 + 174,5	6985 + 175	6997 + 175,5	7016 + 177	7043 + 179	7076 + 182	7116 + 185
42°	7330 174,5	7335 175	7348 176	7370 177,5	7401 179,5	7440 182	7486 185,5
44°	7679 175	7685 174,5	7700 176	7725 177,5	7760 180	7804 183	7857 186,5
46°	8029 174,5	8034 175	8052 175,5	8080 178	8120 180	8170 183,5	8230 188
48°	8378 174,5	8384 175	8403 176,5	8436 178	8480 181	8537 184	8606 188
50°	8727 + 174,5	8734 + 175	8756 + 176	8792 + 178	8842 + 181	8905 + 185	8982 + 189,5
52°	9076 174,5	9084 175	9108 176	9148 178,5	9204 181,5	9275 185,5	9361 190,5
54°	9425 174,5	9434 175	9460 176,5	9505 178,5	9567 181,5	9646 186	9742 191,5
56°	9774 174,5	9784 175	9813 176,5	9862 178,5	9930 182,5	*0018 186,5	*0125 192
58°	*0123 174,5	*0134 175	*0166 176,5	*0219 179	*0295 182,5	0391 187,5	0509 193,5
60°	0472 + 174,5	0484 + 175	0519 + 176,5	0577 + 179,5	0660 + 183	0766 + 187,5	0896 + 194
62°	0821 174,5	0834 175	0872 176,5	0936 179,5	1026 183	1141 188,5	1284 195
64°	1170 174,5	1184 175	1225 177	1295 179,5	1392 183,5	1518 189	1674 195,5
66°	1519 174,5	1534 175	1579 176,5	1654 179,5	1759 184	1896 189,5	2065 196,5
68°	1868 174,5	1884 175	1932 177	2013 180	2127 184	2275 190	2458 197,5
70°	2217 + 174,5	2234 + 175,5	2286 + 177	2373 + 180	2495 + 184,5	2655 + 190,5	2853 + 198
72°	2566 174,5	2585 175	2640 177	2733 180	2864 185	3036 190,5	3249 199
74°	2915 175	2935 175	2994 177	3093 180,5	3234 184,5	3417 191,5	3647 199
76°	3265 174,5	3285 175,5	3348 177	3454 180	3603 185,5	3800 191,5	4045 200
78°	3614 174,5	3636 175	3702 177	3814 180,5	3974 185	4183 191,5	4445 200,5
80°	3963 + 174,5	3986 + 175	4056 + 177,5	4175 + 180,5	4344 + 185,5	4566 + 192	4846 + 200,5
82°	4312 174,5	4336 175,5	4411 177	4536 180,5	4715 185,5	4950 192,5	5247 201
84°	4661 174,5	4687 175	4765 177,5	4897 181	5086 185,5	5335 192,5	5649 201,5
86°	5010 174,5	5037 175,5	5120 177	5259 180,5	5457 186	5720 192,5	6052 201
88°	5359 174,5	5388 175	5474 177	5620 180,5	5829 185,5	6105 192,5	6454 202
90°	5708 1,	5738 1,	5828 1,	5981 1,	6200 1,	6490 1,	6858 1,

Продолжение табл. 27

φ	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
	0,	0,	0,	0,		
0°	00000	00000	00000	00000	0,00000	0,00000
2°	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	0,03491 + 1745,5	0,03491 + 1745,5
4°	06983 1746	06984 1746,5	06984 1746,5	06985 1747	0,06985 1747	0,06986 1747,5
6°	10478 1747,5	10480 1748	10482 1749	10483 1749	0,10485 1750	0,10486 1750
8°	13978 1750	13981 1750,5	13985 1751,5	13989 1753	0,13993 1754	0,13997 1755,5
10°	1748 1752	1749 1754,5	1750 1756,5	1751 1758	0,1751 1760	0,1752 1761,5
12°	2099 + 175,5	2101 + 176	2102 + 176	2103 + 176	0,2105 + 177	0,2106 + 177
14°	2451 176	2453 176	2456 177	2458 177,5	0,2460 177,5	0,2462 178
16°	2804 176,5	2808 177,5	2811 177,5	2814 178	0,2817 178,5	0,2820 179
18°	3159 177,5	3163 177,5	3167 178	3172 179	0,3177 180	0,3181 180,5
20°	3514 177,5	3520 178,5	3526 179,5	3533 180,5	0,3539 181	0,3545 182
22°	3871 + 178,5	3879 + 179,5	3887 + 180,5	3896 + 181,5	0,3904 + 182,5	0,3912 + 183,5
24°	4229 179	4239 180	4250 181,5	4261 182,5	0,4272 184	0,4283 185,5
26°	4588 179,5	4602 181,5	4616 183	4630 184,5	0,4645 186,5	0,4658 187,5
28°	4950 181	4967 182,5	4985 184,5	5003 186,5	0,5021 188	0,5038 190
30°	5313 181,5	5334 183,5	5356 185,5	5379 188	0,5401 190	0,5422 192
32°	5679 + 183	5704 + 185	5731 + 187,5	5759 + 190	0,5786 + 192,5	0,5812 + 195
34°	6046 183,5	6077 186,5	6109 189	6143 192	0,6176 195	0,6208 198
36°	6416 185	6452 187,5	6491 191	6531 194	0,6571 197,5	0,6610 201
38°	6788 186	6831 189,5	6877 193	6925 197	0,6973 201	0,7019 204,5
40°	7162 187	7213 191	7267 195	7323 199	0,7380 203,5	0,7436 208,5
42°	7539 + 188,5	7598 + 192,5	7661 + 197	7727 + 202	0,7794 + 207	0,7860 + 212
44°	7918 189,5	7986 194	8059 199	8136 204,5	0,8215 210,5	0,8293 216,5
46°	8300 191	8378 196	8462 201,5	8552 208	0,8643 214	0,8734 220,5
48°	8685 192,5	8773 197,5	8870 204	8973 210,5	0,9079 218	0,9185 225,5
50°	9072 193,5	9173 200	9283 206,5	9401 214	0,9523 222	0,9647 231
52°	9462 + 195	9575 + 201	9701 + 209	9835 + 217	0,9976 + 226,5	1,0118 + 235,5
54°	9855 196,5	9982 203,5	*0124 211,5	*0277 221	1,0437 230,5	1,0602 242
56°	*0250 197,5	*0393 205,5	0552 214	0725 224	1,0908 235,5	1,1097 247,5
58°	0648 199	0807 207	0985 216,5	1180 227,5	1,1389 240,5	1,1605 254
60°	1049 200,5	1226 209,5	1424 219,5	1643 231,5	1,1879 245	1,2126 260,5
62°	1452 + 201,5	1648 + 211	1868 + 222	2113 + 235	1,2379 + 250	1,2661 + 267,5
64°	1859 203,5	2073 212,5	2318 225	2591 239	1,2890 255,5	1,3209 274
66°	2267 204	2503 215	2773 227,5	3076 242,5	1,3411 260,5	1,3773 282
68°	2678 205,5	2936 216,5	3232 229,5	3568 246	1,3942 265,5	1,4351 289
70°	3092 207	3372 218	3697 232,5	4068 250	1,4484 271	1,4944 296,5
72°	3507 + 207,5	3812 + 220	4167 + 235	4574 + 253	1,5036 + 276	1,5552 + 304
74°	3924 208,5	4254 221	4640 236,5	5087 256,5	1,5597 280,5	1,6175 311,5
76°	4344 210	4700 223	5118 239	5606 259,5	1,6168 285,5	1,6812 318,5
78°	4765 210,5	5147 223,5	5600 241	6130 262	1,6748 290	1,7462 325
80°	5187 211	5597 225	6065 242,5	6660 265	1,7335 293,5	1,8125 331,5
82°	5611 + 212	6049 + 226	6572 + 243,5	7193 + 266,5	1,7929 + 297	1,8799 + 337
84°	6035 212	6502 226,5	7062 245	7731 269	1,8528 299,5	1,9482 341,5
86°	6461 213	6957 227,5	7554 246	8271 270	1,9132 302	2,0172 345
88°	6886 212,5	7412 227,5	8047 246,5	8813 271	1,9739 303,5	2,0867 347,5
90°	7312 213	7868 228	8541 247	9356 271,5	2,0347 304	2,1565 349
	1,	1,	1,	1,		

Продолжение табл. 27

φ	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 89^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
0°	0,00000 + 1745,5	0,00000 + 1745,5	0,00000 + 1745,5	0,00000 + 1745,5	0,00000 + 1745,5	0,00000 + 1745,5	0,00000 + 1745,5
2°	0,03491 1747,5	0,03491 1747,5	0,03491 1748	0,03491 1748	0,03491 1748	0,03491 1748	0,03491 1748
4°	0,06986 1751	0,06986 1751,5	0,06987 1751,5	0,06987 1752	0,06987 1752	0,06987 1752	0,06987 1752
6°	0,10488 1756	0,10489 1757	0,10490 1757,5	0,10491 1758	0,10491 1758,5	0,10491 1758,5	0,10491 1758,5
8°	0,14000 1763	0,14003 1764,5	0,14005 1766!	0,14007 1766,5!	0,14008 1767!	0,14008 1767,5!	0,14008 1767,5!
10°	0,1753 + 177	0,1753 + 177,5	0,1754 + 177,5	0,1754 + 177,5	0,1754 + 178	0,1754 + 178	0,1754 + 178
12°	0,2107 178,5	0,2108 178,5	0,2109 178,5	0,2109 179	0,2110 179	0,2110 179	0,2110 179
14°	0,2464 179,5	0,2465 180	0,2466 180,5	0,2467 180,5	0,2468 180,5	0,2468 181	0,2468 181
16°	0,2823 181	0,2825 181,5	0,2827 182	0,2828 182,5	0,2829 182,5	0,2830 182,5	0,2830 182,5
18°	0,3185 182,5	0,3188 183,5	0,3191 184	0,3193 184	0,3194 184,5	0,3195 184,5	0,3195 184,5
20°	0,3550 + 184,5	0,3555 + 185,5	0,3559 + 186	0,3561 + 187	0,3563 + 187	0,3564 + 187	0,3564 + 187
22°	0,3919 186,5	0,3926 187,5	0,3931 188,5	0,3935 189	0,3937 189,5	0,3938 189,5	0,3938 189,5
24°	0,4292 189	0,4301 190	0,4308 191	0,4313 192	0,4316 192,5	0,4317 192,5	0,4317 192,5
26°	0,4670 191,5	0,4681 193	0,4690 194,5	0,4697 195	0,4701 195,5	0,4702 196	0,4702 196
28°	0,5053 194,5	0,5067 196	0,5079 197,5	0,5087 198,5	0,5092 199,5	0,5094 199,5	0,5094 199,5
30°	0,5442 + 197,5	0,5459 + 199,5	0,5474 + 201	0,5484 + 202,5	0,5491 + 203,5	0,5493 + 203,5	0,5493 + 203,5
32°	0,5837 200,5	0,5858 203,5	0,5876 205,5	0,5889 207	0,5898 207,5	0,5900 208	0,5900 208,5
34°	0,6238 204,5	0,6265 207	0,6287 209,5	0,6303 211,5	0,6313 213	0,6316 213,5	0,6317 213
36°	0,6647 208	0,6679 211,5	0,6706 214,5	0,6726 216,5	0,6739 218	0,6743 218,5	0,6743 218,5
38°	0,7063 212,5	0,7102 216,5	0,7135 220	0,7159 222,5	0,7175 224	0,7180 224,5	0,7180 224,5
40°	0,7488 + 217	0,7535 + 222	0,7575 + 12	0,7604 + 13	0,7623 + 13	0,7629 + 13	0,7629 + 13
42°	0,7922 222,5	0,7979 227	0,8026 13	0,8062 14	0,8084 15	0,8091 15	0,8092 15
44°	0,8367 227	0,8433 233,5	0,8490 14	0,8533 15	0,8560 16	0,8569 16	0,8569 16
46°	0,8821 233	0,8900 240,5	0,8968 15	0,9019 17	0,9052 18	0,9062 18	0,9063 18
48°	0,9287 239,5	0,9381 247,5	0,9461 17	0,9523 19	0,9561 20	0,9574 20	0,9575 20
50°	0,9766 + 13	0,9876 + 16	0,9971 + 18	1,0044 + 21	1,0091 + 22	1,0106 + 23	1,0107 + 23
52°	1,0258 14	1,0387 17	1,0499 20	1,0587 23	1,0642 25	1,0661 25	1,0662 25
54°	1,0764 15	1,0915 19	1,1048 22	1,1152 25	1,1219 28	1,1241 28	1,1242 28
56°	1,1285 16	1,1462 20	1,1619 25	1,1743 28	1,1823 31	1,1849 32	1,1851 32
58°	1,1822 17	1,2030 22	1,2215 27	1,2362 32	1,2458 35	1,2490 37	1,2492 37
60°	1,2376 + 18	1,2619 + 24	1,2837 + 30	1,3014 + 36	1,3129 + 40	1,3168 + 42	1,3170 + 42
62°	1,2949 19	1,3231 26	1,3490 33	1,3701 41	1,3841 46	1,3888 49	1,3890 49
64°	1,3541 20	1,3870 28	1,4175 37	1,4429 46	1,4599 54	1,4657 57	1,4659 57
66°	1,4153 21	1,4536 30	1,4898 41	1,5203 53	1,5411 63	1,5482 67	1,5485 67
68°	1,4786 22	1,5232 32	1,5661 45	1,6030 60	1,6287 74	1,6376 80	1,6379 80
70°	1,5441 + 22	1,5959 + 33	1,6468 + 49	1,6918 + 70	1,7237 + 89	1,7349 + 97	1,7354 + 97
72°	1,6118 23	1,6720 35	1,7326 54	1,7876 81	1,8277 108	1,8421 120	1,8427 120
74°	1,6818 22	1,7516 36	1,8237 59	1,8915 93	1,9427 133	1,9614 152	1,9623 153
76°	1,7540 22	1,8347 37	1,9207 63	2,0047 108	2,0711 168	2,0962 198	2,0973 199
78°	1,8284 21	1,9215 36	2,0240 66	2,1288 124	2,2164 215	2,2513 268	2,2528 270
80°	1,9048 + 19	2,0119 + 34	2,1339 + 67	2,2653 + 140	2,3836 + 282	2,4340 + 381	2,4362 + 386
82°	1,9831 16	2,1057 32	2,2504 64	2,4157 152	2,5795 377	2,6566 578	2,6603 589
84°	2,0630 13	2,2024 25	2,3731 56	2,5811 151	2,8136 507	2,9421	2,9487
86°	2,1442 9	2,3017 18	2,5013 42	2,7612 129	3,0978 630	3,3396	3,3547
88°	2,2263 5	2,4026 9	2,6336 23	2,9537 76	3,4412	3,9911	4,0481
90°	2,3088 0	2,5046 0	2,7681 0	3,1534 0	3,8317	5,4349	∞

Таблица 28. Неполный эллиптический интеграл 2-го рода $E(\varphi, k)$

φ	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0°	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5	00000 + 1745,5
2°	03491 1745	03491 1745	03491 1745	03491 1745	03491 1745	03491 1744,5	03490 1745
4°	06981 1745,5	06981 1745,5	06981 1745	06981 1745	06981 1744,5	06980 1744,5	06980 1743,5
6°	10472 1745,5	10472 1745	10471 1745	10471 1744,5	10470 1743,5	10469 1743	10467 1742
8°	13963 1745	13962 1745,5	13961 1745	13960 1743,5	13957 1743	13955 1741,5	13951 1740
10°	1745 + 174,5	1745 + 174,5	1745 + 174,5	1745 + 174	1744 + 174,5	1744 + 174	1743 + 174
12°	2094 174,5	2094 174,5	2094 174,5	2093 174,5	2093 174	2092 173,5	2091 173
14°	2443 175	2443 174,5	2443 174	2442 174	2441 173,5	2439 173,5	2437 173,5
16°	2793 174,5	2792 174,5	2791 174,5	2790 174	2788 174	2786 173,5	2784 172,5
18°	3142 174,5	3141 174,5	3140 174,5	3138 174	3136 173,5	3133 172,5	3129 172
20°	3491 + 174,5	3490 + 174,5	3489 + 174	3486 + 174	3483 + 173	3478 + 172,5	3473 + 172
22°	3840 174,5	3839 174,5	3837 174	3834 173,5	3829 173	3823 172,5	3817 171
24°	4189 174,5	4188 174,5	4185 174	4181 173,5	4175 172,5	4168 171,5	4159 170,5
26°	4538 174,5	4537 174,5	4533 174	4528 173	4520 172,5	4511 171,5	4500 170
28°	4887 174,5	4886 174	4881 174	4874 173,5	4865 172	4854 170,5	4840 169,5
30°	5236 + 174,5	5234 + 174,5	5229 + 174	5221 + 173	5209 + 172	5195 + 170,5	5179 + 168,5
32°	5585 174,5	5583 174,5	5577 173,5	5567 172,5	5553 171,5	5536 170	5516 168
34°	5934 174,5	5932 174	5924 174	5912 173	5896 171	5876 169	5852 167
36°	6283 174,5	6280 174,5	6272 173,5	6258 172	6238 171	6214 169	6186 166,5
38°	6632 174,5	6629 174	6619 173,5	6602 172,5	6580 170,5	6552 168	6519 166
40°	6981 + 174,5	6977 + 174,5	6966 + 173,5	6947 + 172	6921 + 170	6888 + 168	6851 + 164,5
42°	7330 174,5	7326 174	7313 173	7291 171,5	7261 169,5	7224 167	7180 164
44°	7679 175	7674 174,5	7659 173,5	7634 171,5	7600 169,5	7558 166,5	7508 163,5
46°	8029 174,5	8023 174	8006 173	7977 171,5	7939 169	7891 166	7835 162,5
48°	8378 174,5	8371 174	8352 173	8320 171,5	8277 168,5	8223 165,5	8160 161,5
50°	8727 + 174,5	8719 + 174,5	8698 + 173	8663 + 170,5	8614 + 168,5	8554 + 165	8483 + 161
52°	9076 174,5	9068 174	9044 172,5	9004 171	8951 168	8884 164	8805 160
54°	9425 174,5	9416 174	9389 173	9346 170,5	9287 167,5	9212 164	9125 159
56°	9774 174,5	9764 174	9735 172,5	9687 170,5	9622 167	9540 163	9443 158,5
58°	*0123 174,5	*0112 174	*0080 173	*0028 170	9956 167	9866 162,5	9760 158
60°	0472 + 174,5	0460 + 174	0426 + 172,5	0368 + 170	*0290 + 166,5	*0191 + 162,5	*0076 + 156,5
62°	0821 174,5	0808 174	0771 172	0708 170	0623 166	0516 161,5	0389 156,5
64°	1170 174,5	1156 174	1115 172,5	1048 169,5	0955 166	0839 161,5	0702 155,5
66°	1519 174,5	1504 174	1460 172,5	1387 169,5	1287 165,5	1162 160,5	1013 155
68°	1868 174,5	1852 174	1805 172	1726 169,5	1618 165,5	1483 160,5	1323 154,5
70°	2217 + 174,5	2200 + 174	2149 + 172	2065 + 169	1949 + 165,5	1804 + 160	1632 + 153,5
72°	2566 174,5	2548 174	2493 172,5	2403 169,5	2280 164,5	2124 159,5	1939 153,5
74°	2915 175	2896 174	2838 172	2742 169	2609 165	2443 159,5	2246 153
76°	3265 174,5	3244 174	3182 172	3080 168,5	2939 164,5	2762 159	2552 152
78°	3614 174,5	3592 173,5	3526 172	3417 169	3268 164,5	3080 159	2856 152,5
80°	3963 + 174,5	3939 + 174	3870 + 172	3755 + 169	3597 + 164	3398 + 158,5	3161 + 151,5
82°	4312 174,5	4287 174	4214 172	4093 168,5	3925 164,5	3715 158,5	3464 151,5
84°	4661 174,5	4635 174	4558 171,5	4430 168,5	4254 164	4032 158	3767 151,5
86°	5010 174,5	4983 173,5	4901 172	4767 168,5	4582 164	4348 158,5	4070 151
88°	5359 174,5	5330 174	5245 172	5104 169	4910 164	4665 158	4372 151,5
90°	5708 1.	5678 1.	5589 1.	5442 1.	5238 1.	4981 1.	4675 1.

Продолжение табл. 28

φ	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0°	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745
2°	03490 1744,5	03490 1744,5	03490 1744	03490 1744	03490 1744	03490 1743,5
4°	06979 1743,5	06979 1742,5	06978 1742	06978 1741,5	06978 1740,5	06977 1740,5
6°	10466 1741	10464 1740	10462 1739	10461 1737,5	10459 1736,5	10458 1735,5
8°	13948 1738	13944 1736,5	13940 1734,5	13936 1732,5	13932 1731	13929 1729
10°	1742 + 173,5	1742 + 173	1741 + 173	1740 + 172,5	1739 + 172,5	1739 + 172
12°	2089 173,5	2088 172,5	2087 172	2085 172	2084 171,5	2083 171
14°	2436 172,5	2433 172,5	2431 172	2429 171	2427 170,5	2425 170
16°	2781 172	2778 171,5	2775 170,5	2771 170,5	2768 169,5	2765 169
18°	3125 171,5	3121 170,5	3116 170	3112 169	3107 168,5	3103 167,5
20°	3468 + 170,5	3462 + 170	3456 + 168,5	3450 + 167,5	3444 + 166,5	3438 + 166
22°	3809 170,5	3802 168,5	3793 168	3785 166,5	3777 165,5	3770 164
24°	4150 169	4139 168	4129 166,5	4118 165,5	4108 164	4098 162,5
26°	4488 168,5	4475 167	4462 165,5	4449 163,5	4436 162	4423 160,5
28°	4825 168	4809 166	4793 163,5	4776 162	4760 160	4744 158,5
30°	5161 + 166,5	5141 + 164,5	5120 + 163	5100 + 160,5	5080 + 158	5061 + 156
32°	5494 166	5470 163,5	5446 161	5421 158,5	5396 156,5	5373 154
34°	5826 164,5	5797 162,5	5768 159,5	5738 156,5	5709 154	5681 151,5
36°	6155 164	6122 161	6087 158	6051 155	6017 152	5984 149
38°	6483 162,5	6444 159,5	6403 156	6361 153	6321 149,5	6282 146,5
40°	6808 + 162	6763 + 158	6715 + 154,5	6667 + 151	6620 + 147	6575 + 143,5
42°	7132 160,5	7079 157	7024 153	6969 148,5	6914 145	6862 141
44°	7453 159,5	7393 155,5	7330 151,5	7266 147	7204 142	7144 137,5
46°	7772 158,5	7704 154	7633 149	7560 144,5	7488 140	7419 135,5
48°	8089 157,5	8012 152,5	7931 148	7849 142,5	7768 137	7690 132
50°	8404 + 156	8317 + 151,5	8227 + 145,5	8134 + 140	8042 + 134,5	7954 + 129
52°	8716 155	8620 149,5	8518 144	8414 138	8311 132	8212 126
54°	9026 154,5	8919 148,5	8806 142,5	8690 136	8575 129,5	8464 123
56°	9335 153	9216 147	9091 140,5	8962 134	8834 127	8710 120
58°	9641 152	9510 145,5	9372 139	9230 131,5	9088 124	8950 117
60°	9945 + 150,5	9801 + 144,5	9650 + 137	9493 + 129,5	9336 + 122	9184 + 114
62°	*0246 150,5	*0090 143	9924 135,5	9752 127,5	9580 119	9412 111
64°	0547 149	0376 142	*0195 134	*0007 125,5	9818 117	9634 108
66°	0845 148	0660 140,5	0463 132,5	0258 124	*0052 114,5	9850 105,5
68°	1141 147,5	0941 140	0728 131	0506 122	0281 112,5	*0061 102,5
70°	1436 + 146,5	1221 + 138,5	0990 + 130	0750 + 120,5	0506 + 110,5	0266 + 100,5
72°	1729 146	1498 137,5	1250 128,5	0991 118,5	0727 108,5	0467 97,5
74°	2021 145,5	1773 137	1507 127,5	1228 117,5	0944 107	0662 96
76°	2312 144,5	2047 136	1762 124,5	1463 116	1158 105	0854 93,5
78°	2601 144,5	2319 135,5	2015 125,5	1695 115,5	1368 104	1041 92
80°	2890 + 143,5	2590 + 134,5	2266 + 125	1926 + 114	1576 + 102,5	1225 + 90,5
82°	3177 143,5	2859 134,5	2516 124,5	2154 113,5	1781 101,5	1406 89
84°	3464 143,5	3128 134	2765 123,5	2381 112,5	1984 101	1584 88,5
86°	3751 143	3396 134	3012 124	2606 112,5	2186 100	1761 87,5
88°	4037 143	3664 133,5	3260 123	2831 112	2386 100,5	1936 87,5
90°	4323 1,	3931 1,	3506 1,	3055 1,	2587 1,	2111 1,

Продолжение табл. 28

φ	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0°	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745
2°	03490 1743,5	03490 1743	03490 1743	03490 1743	03490 1743	03490 1743
4°	06977 1739,5	06976 1739,5	06976 1739	06976 1738,5	06976 1738,5	06976 1738,5
6°	10456 1734,5	10455 1734	10454 1733	10453 1733	10453 1732,5	10453 1732
8°	13925 1728	13923 1726	13920 1725,5	13919 1724!	13918 1723,5!	13917 1724!
10°	1738 + 172	1738 + 171,5	1737 + 171,5	1737 + 171,5	1737 + 171	1736 + 171,5
12°	2082 171	2081 170,5	2080 170,5	2080 170	2079 170	2079 170
14°	2424 169,5	2422 169,5	2421 169	2420 168,5	2419 169	2419 168,5
16°	2763 168	2761 167,5	2759 167,5	2757 167,5	2757 167	2756 167
18°	3099 167	3096 166,5	3094 165,5	3092 165	3091 165	3090 165
20°	3433 + 165	3429 + 164	3425 + 163,5	3422 + 163,5	3421 + 163	3420 + 163
22°	3763 163,5	3757 162,5	3752 162	3749 161	3747 160,5	3746 160,5
24°	4090 161	4082 160	4076 159	4071 159	4068 158,5	4067 158,5
26°	4412 159	4402 158	4394 157	4389 156	4385 155,5	4384 155,5
28°	4730 157	4718 155,5	4708 154	4701 153	4696 153	4695 152,5
30°	5044 + 154	5029 + 152,5	5016 + 151,5	5007 + 150,5	5002 + 149,5	5000 + 149,5
32°	5352 152	5334 150	5319 148,5	5308 147,5	5301 147	5299 146,5
34°	5656 149	5634 147	5616 145,5	5603 144	5595 143	5592 143
36°	5954 146,5	5928 144	5907 142	5891 140,5	5881 139,5	5878 139,5
38°	6247 143	6216 140,5	6191 138,5	6172 137	6160 136	6157 135,5
40°	6533 + 140,5	6497 + 137,5	6468 + 135	6446 + 133	6432 + 132,5	6428 + 131,5
42°	6814 137	6772 134	6738 131	6712 129,5	6697 128	6691 128
44°	7088 134	7040 130,5	7000 127,5	6971 125	6953 123,5	6947 123
46°	7356 131	7301 127	7255 123,5	7221 121,5	7200 120	7193 119
48°	7618 127	7555 123	7502 119,5	7464 116,5	7440 115	7431 114,5
50°	7872 + 124	7801 + 119	7741 + 115,5	7697 + 112,5	7670 + 110,5	7660 + 110
52°	8120 120,5	8039 117,5	7972 111	7922 107,5	7891 105,5	7880 105
54°	8361 117	8270 111,5	8194 107	8137 103,5	8102 101	8090 100
56°	8595 113,5	8493 107	8408 102	8344 98	8304 96	8290 95
58°	8822 110	8707 103,5	8612 98	8540 94	8496 90,5	8480 90
60°	9042 + 106	8914 + 99,5	8808 + 93,5	8728 + 88,5	8677 + 86	8660 + 84,5
62°	9254 103	9113 95,5	8995 89	8905 83,5	8849 80	8829 79,5
64°	9460 99,5	9304 91,5	9173 84	9072 79	9009 75	8988 73,5
66°	9659 96,5	9487 87,5	9341 80	9230 73,5	9159 70	9135 68,5
68°	9852 93	9662 84	9501 75,5	9377 68,5	9299 64	9272 62,5
70°	*0038 + 90	9830 + 80	9652 + 71	9514 + 64	9427 + 58,5	9397 + 57
72°	0218 87	9990 76,5	9794 67	9642 58,5	9544 53	9511 51
74°	0392 84,5	*0143 73,5	9928 62,5	9759 54	9650 47,5	9613 45
76°	0561 81,5	0290 70	*0053 59	9867 49	9745 42	9703 39
78°	0724 80	0430 67,5	0171 55,5	9965 44,5	9829 36,5	9781 33,5
80°	0884 + 78	0565 + 65	0282 + 52,5	*0054 + 40,5	9902 + 31,5	9848 + 27,5
82°	1040 76	0695 63	0387 49,5	0135 37	9965 26	9903 21
84°	1192 75	0821 61,5	0486 47,5	0209 34	*0017 21,5	9945 15,5
86°	1342 74,5	0944 60	0581 46	0277 31,5	0060 17,5	9976 9
88°	1491 73,5	1064 60	0673 45,5	0340 30,5	0095 16	9994 3
90°	1638 1,	1184 1,	0764 1,	0401 1,	0127 1,	*0000 1,

В таблицах 27 и 28 для нормальной формы действительных интегралов $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ аргументами выбраны φ и α , где α определяется через модули по формулам: $k = \sin \alpha$, $k' = \cos \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$).

Если φ и α оба очень близки к 90° , то при вычислении $F(\varphi, k)$ целесообразно пользоваться формулой

$$F(\varphi, k) = K(k) - F(\varphi^*, k),$$

где φ^* определяется из условия $k' \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi^* = 1$. Значение $K(k)$ берется из таблицы 30 полных интегралов в нормальной форме.

1.2. Имеют место следующие формулы:

$$F\left(\frac{\pi}{2} + i\chi, k\right) = K(k) + iF\left(\operatorname{arcsin} \frac{\operatorname{th} \chi}{k'}, k'\right) \quad \left(1 < \operatorname{ch} \chi \leq \frac{1}{k}\right),$$

$$F\left(\frac{\pi}{2} + i\chi, k\right) = F\left(\operatorname{arcsin} \frac{1}{k \operatorname{ch} \chi}, k\right) + iK'(k) \quad \left(\frac{1}{k} \leq \operatorname{ch} \chi < \infty\right),$$

$$F(+i\infty, k) = iK'(k), \quad F\left(\frac{\pi}{2} + i \operatorname{Arch} \frac{1}{k}, k\right) = K(k) + iK'(k).$$

2. Функциональные уравнения

$$F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k), \quad F(n\pi \pm \varphi, k) = 2nK(k) \pm F(\varphi, k),$$

$$E(-\varphi, k) = -E(\varphi, k), \quad E(n\pi \pm \varphi, k) = 2nE(k) \pm E(\varphi, k).$$

Дифференцирование и интегрирование по модулю k приводят к следующим соотношениям (все функции F , E , D от аргументов φ , k):

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{k}{k'^2} \left(F - D - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)} \right), \quad \frac{\partial E}{\partial k} = -kD,$$

$$\frac{\partial D}{\partial k} = \frac{1}{kk'^2} \left(F - D - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)} \right) - \frac{D}{k},$$

$$\int Fk dk = E - k'^2 F - [1 - \Delta(\varphi, k)] \operatorname{ctg} \varphi, \quad \int Dk dk = -E.$$

С. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ПОЛНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Полные интегралы (рис. 49—56) получаются из неполных при определенном выборе пределов интегрирования.

1. Представления

1.1. При $k^2 \ll 1$ пригодны следующие степенные ряды для K , E и D :

$$\frac{2}{\pi} K = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 k^{2n} = 1 + 2 \frac{k^2}{8} + 9 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 + 50 \left(\frac{k^2}{8} \right)^3 + \frac{1225}{4} \left(\frac{k^2}{8} \right)^4 + \dots,$$

$$\frac{2}{\pi} E = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} = 1 - 2 \frac{k^2}{8} - 3 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 - 10 \left(\frac{k^2}{8} \right)^3 - \frac{175}{4} \left(\frac{k^2}{8} \right)^4 - \dots,$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} D &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 \frac{n}{2n-1} k^{2n-2} = \\ &= 1 + 3 \frac{k^2}{8} + 15 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 + \frac{175}{2} \left(\frac{k^2}{8} \right)^3 + \frac{2205}{4} \left(\frac{k^2}{8} \right)^4 + \dots, \end{aligned}$$

где принято обозначение $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$.

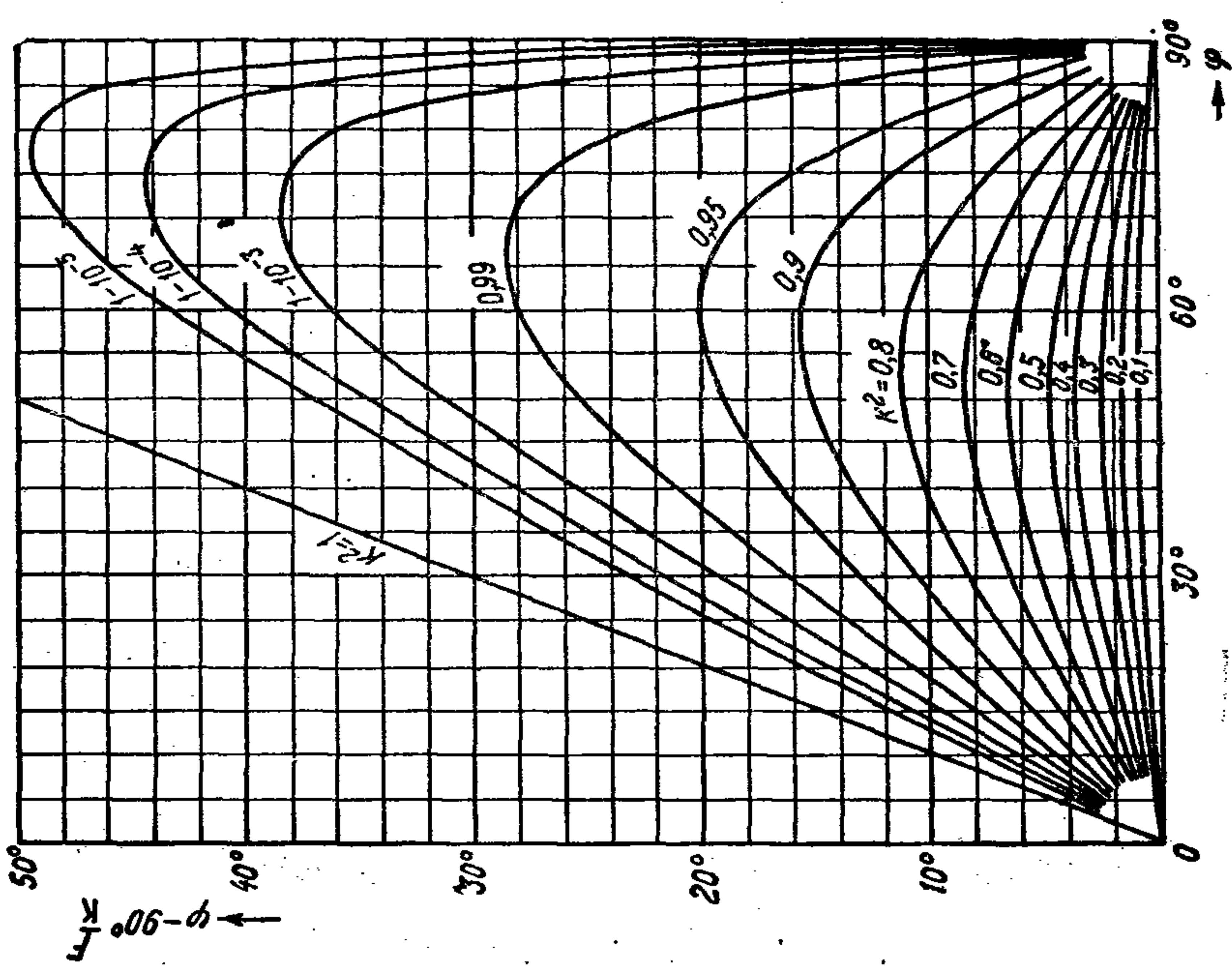


Рис. 49. $90^\circ \frac{F}{K} = \varphi$ — периодическая функция.

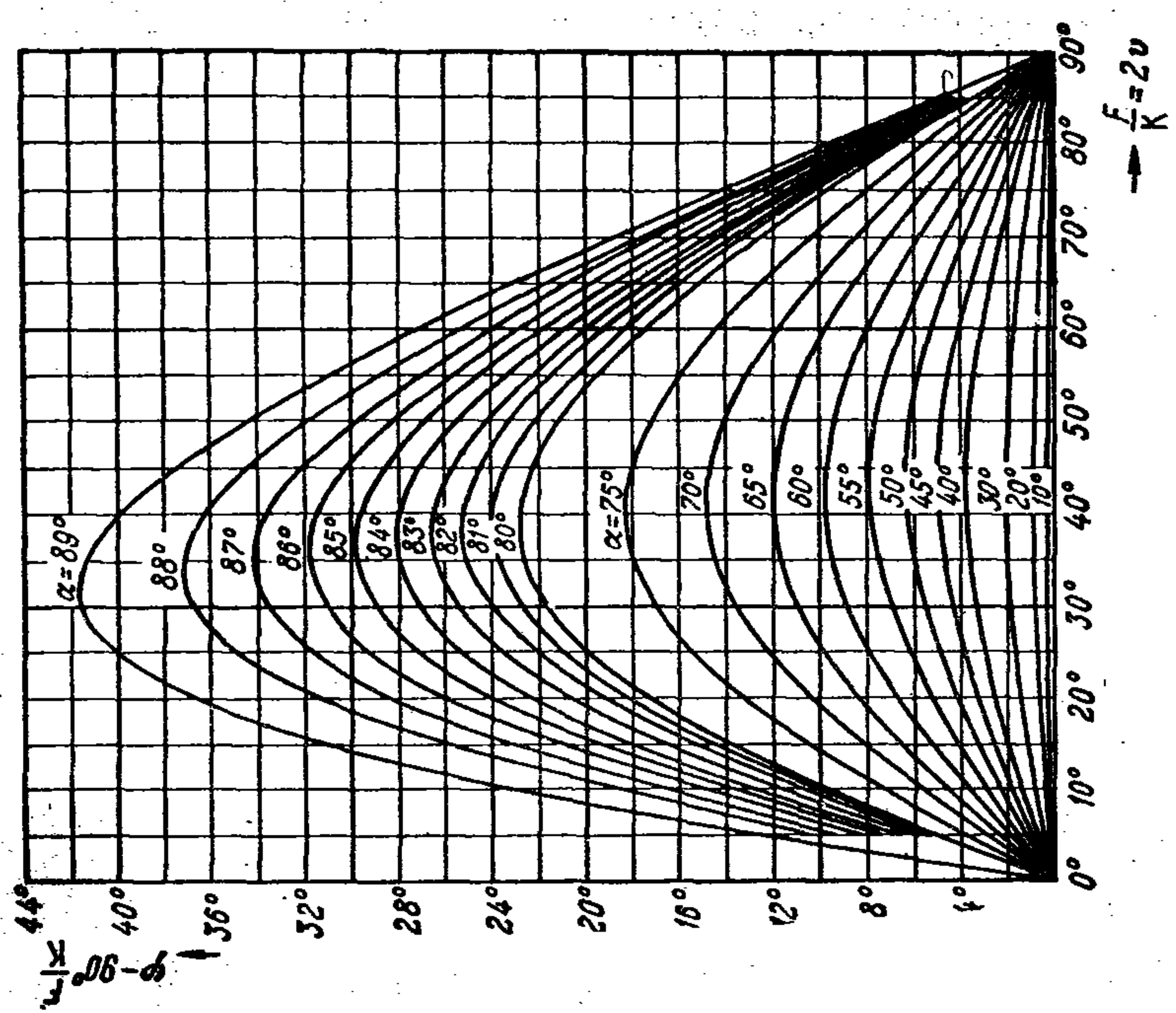


Рис. 50. $90^\circ \frac{F}{K} + 2v$ — периодическая функция.

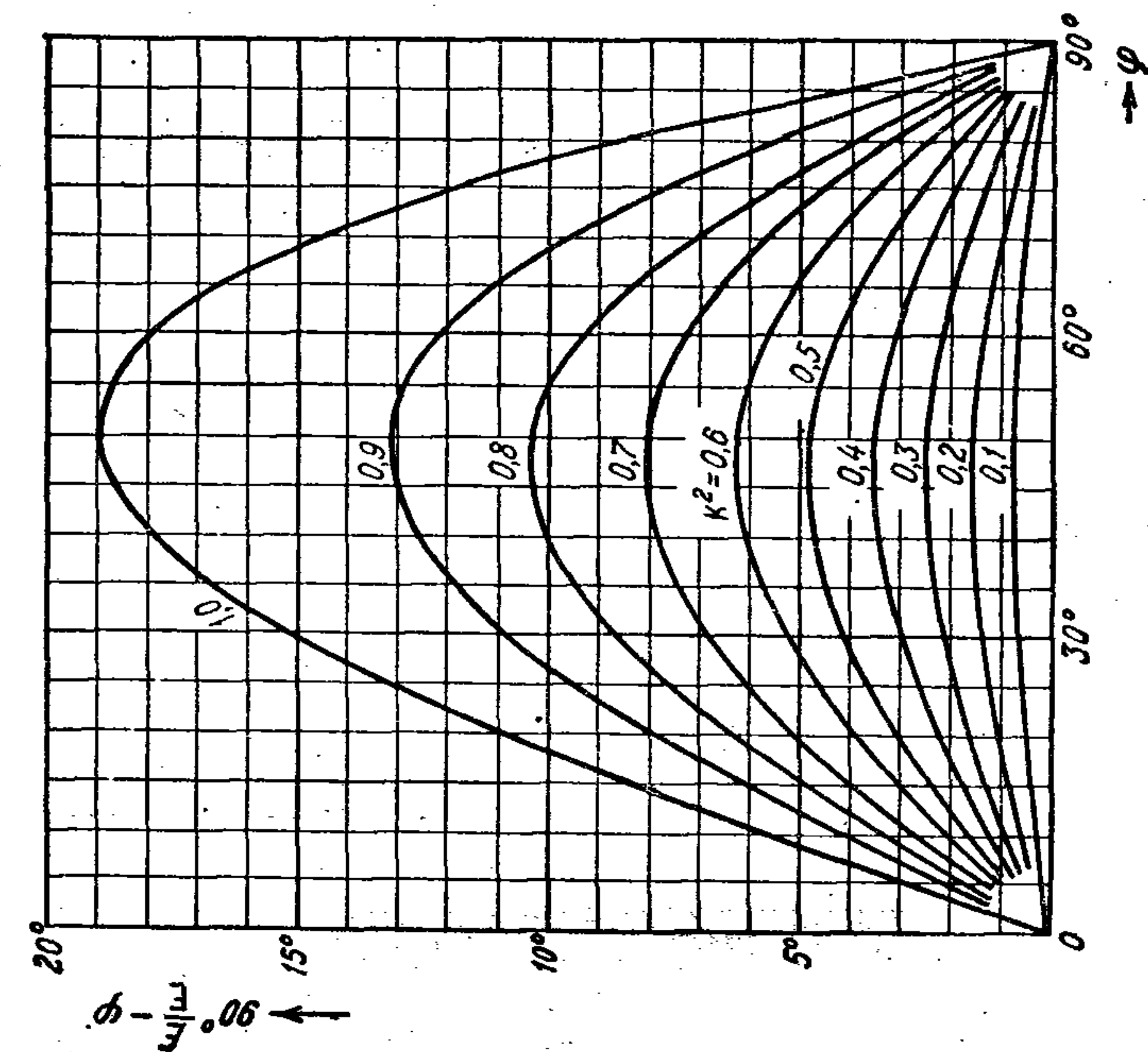


Рис. 52. $90^\circ \frac{E}{E} = \varphi + \text{периодическая функция}$.

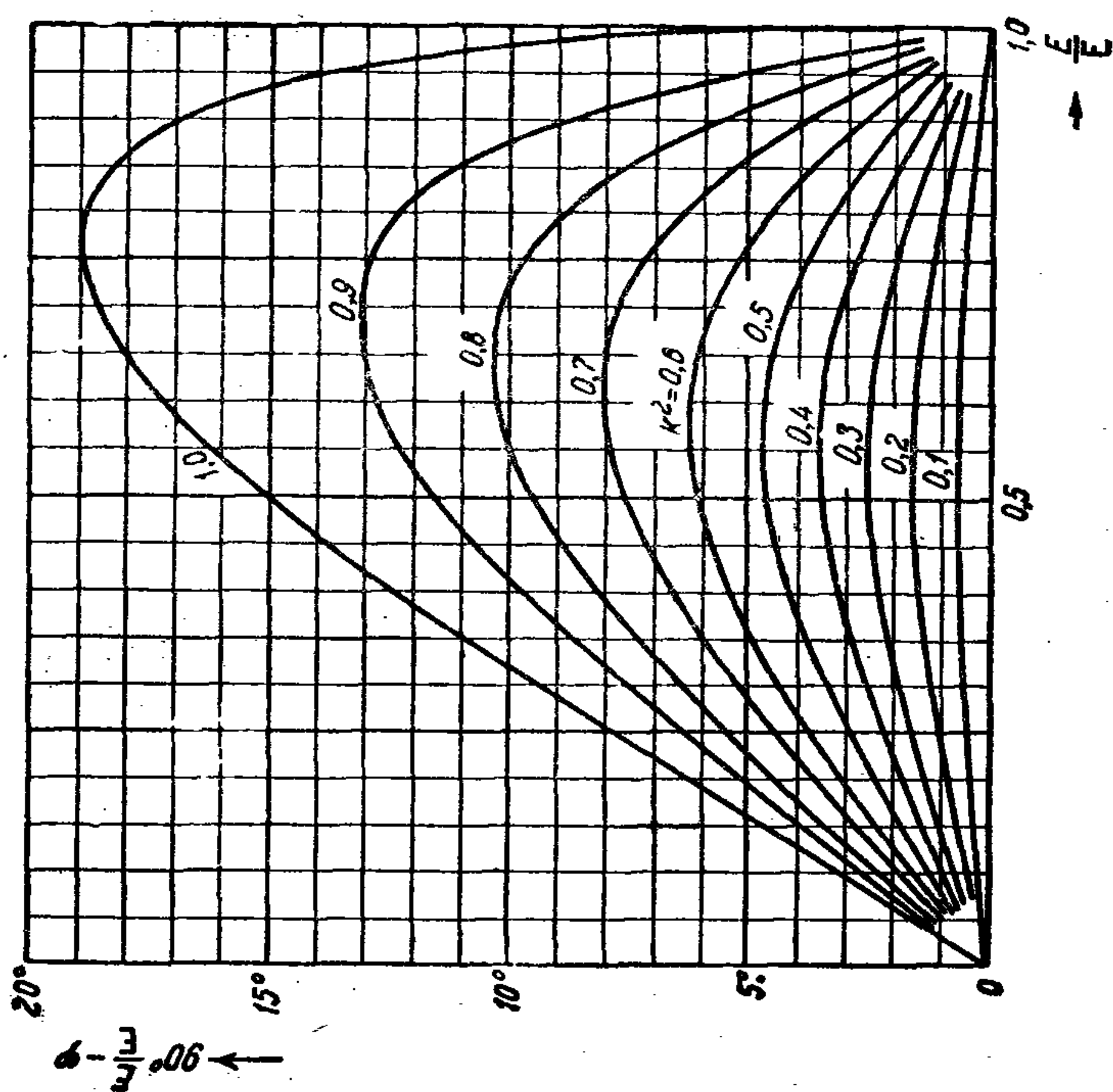


Рис. 51. $90^\circ \frac{E}{E} = \varphi - \text{периодическая функция}$.

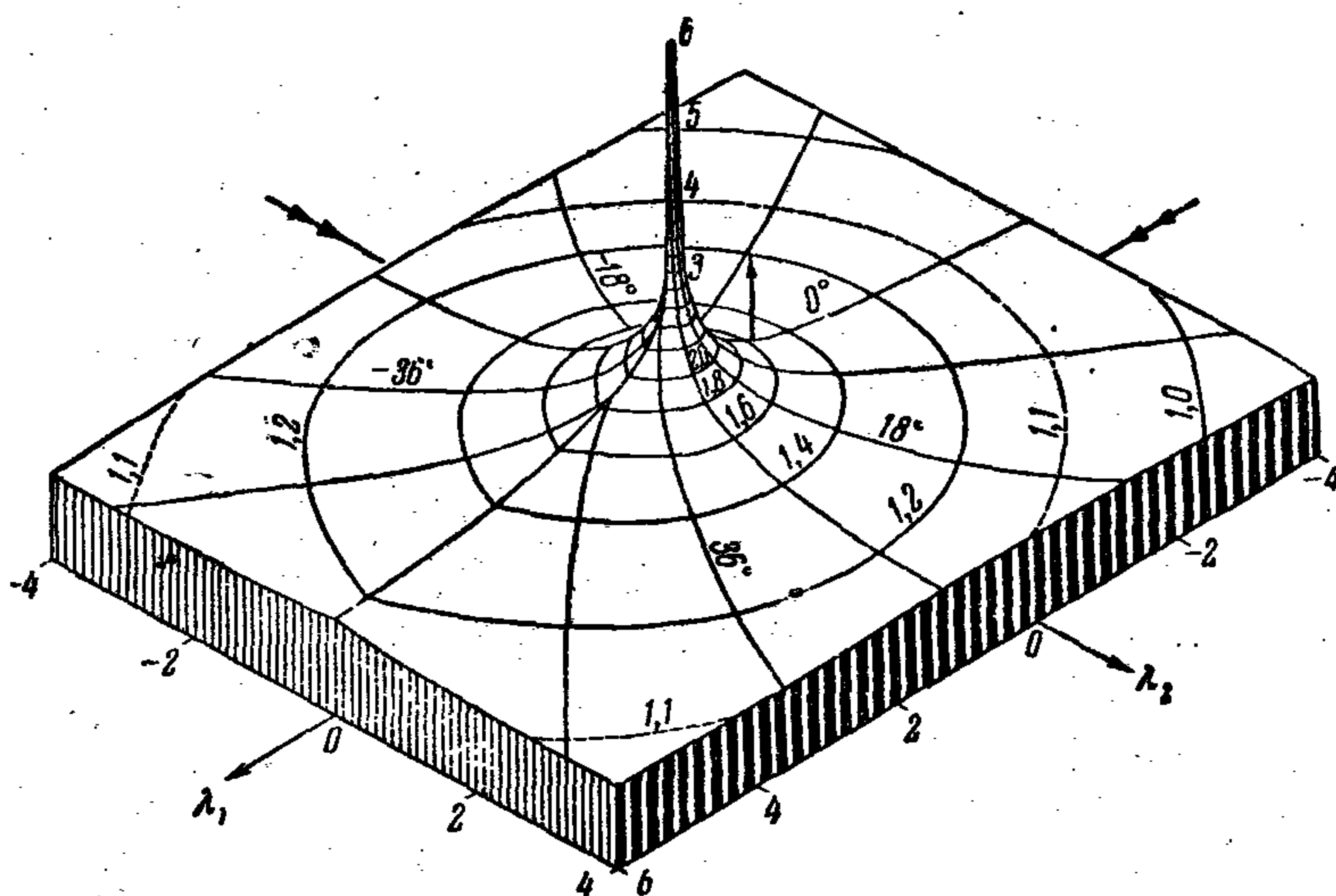


Рис. 53. Рельеф полного эллиптического интеграла K как функции $k^2 = \lambda_1 + i\lambda_2$.

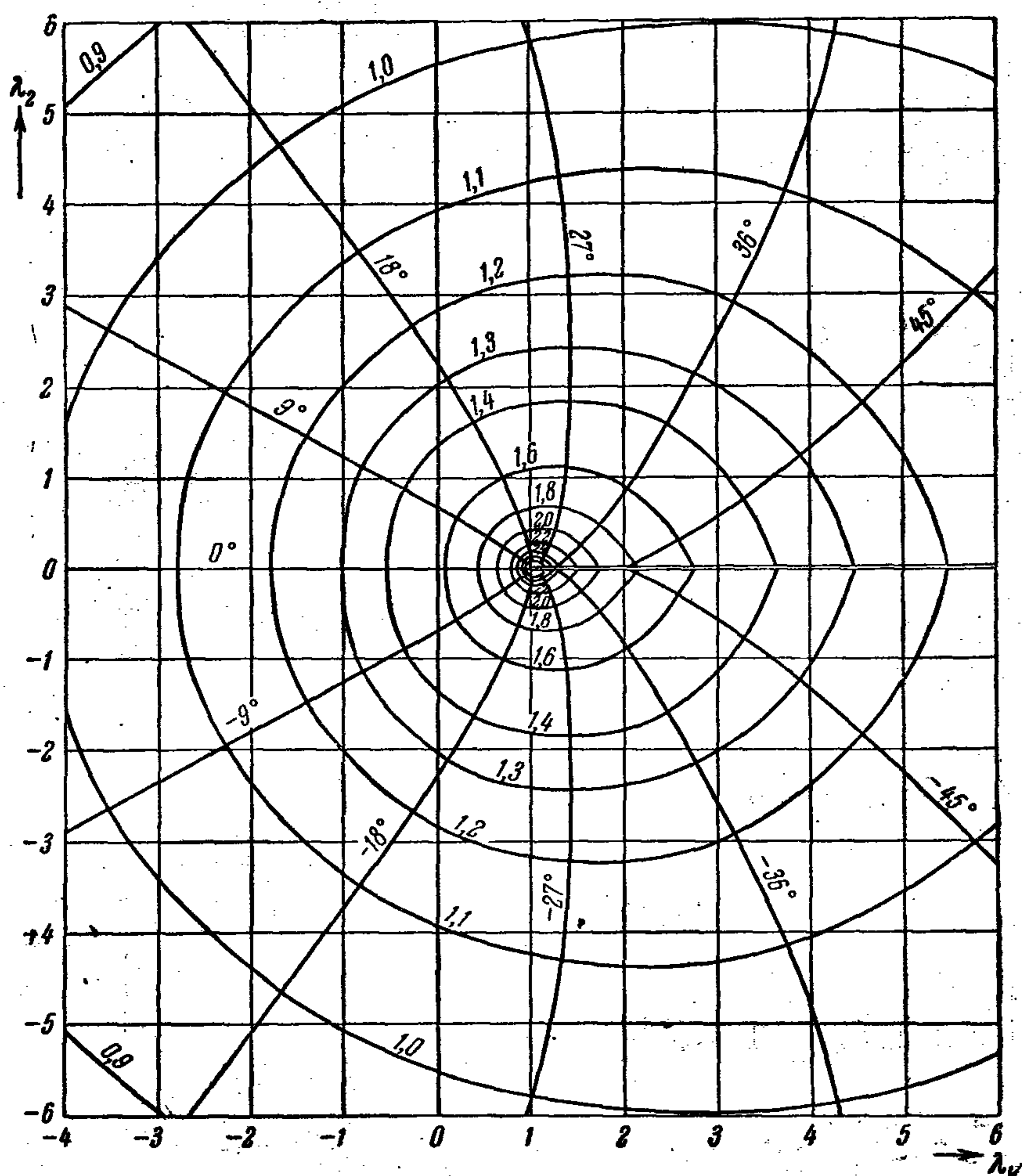


Рис. 54. Карта горизонталей рельефа полного эллиптического интеграла K .

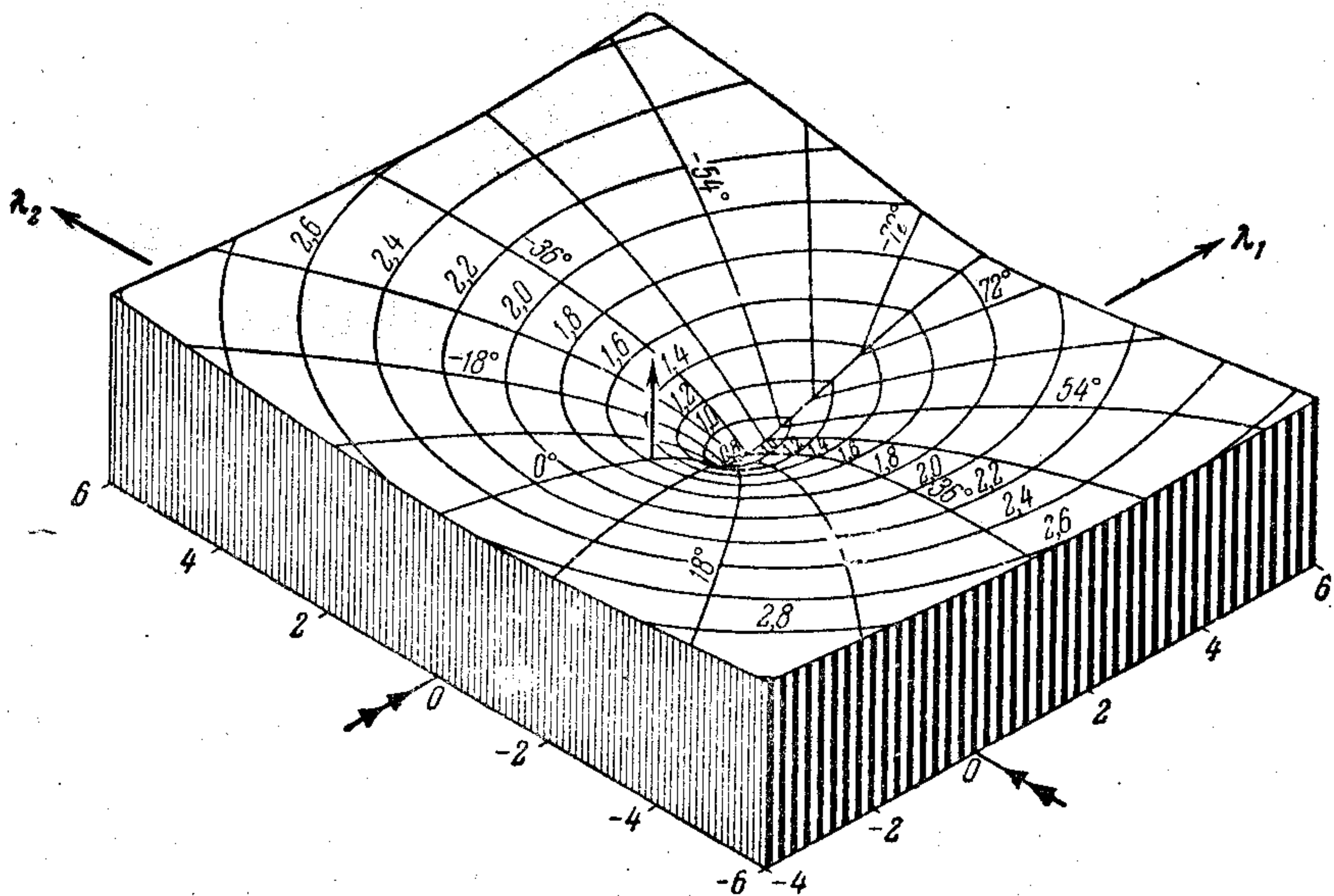


Рис. 55. Рельеф полного эллиптического интеграла E как функции $k^2 = \lambda_1 + i\lambda_2$.

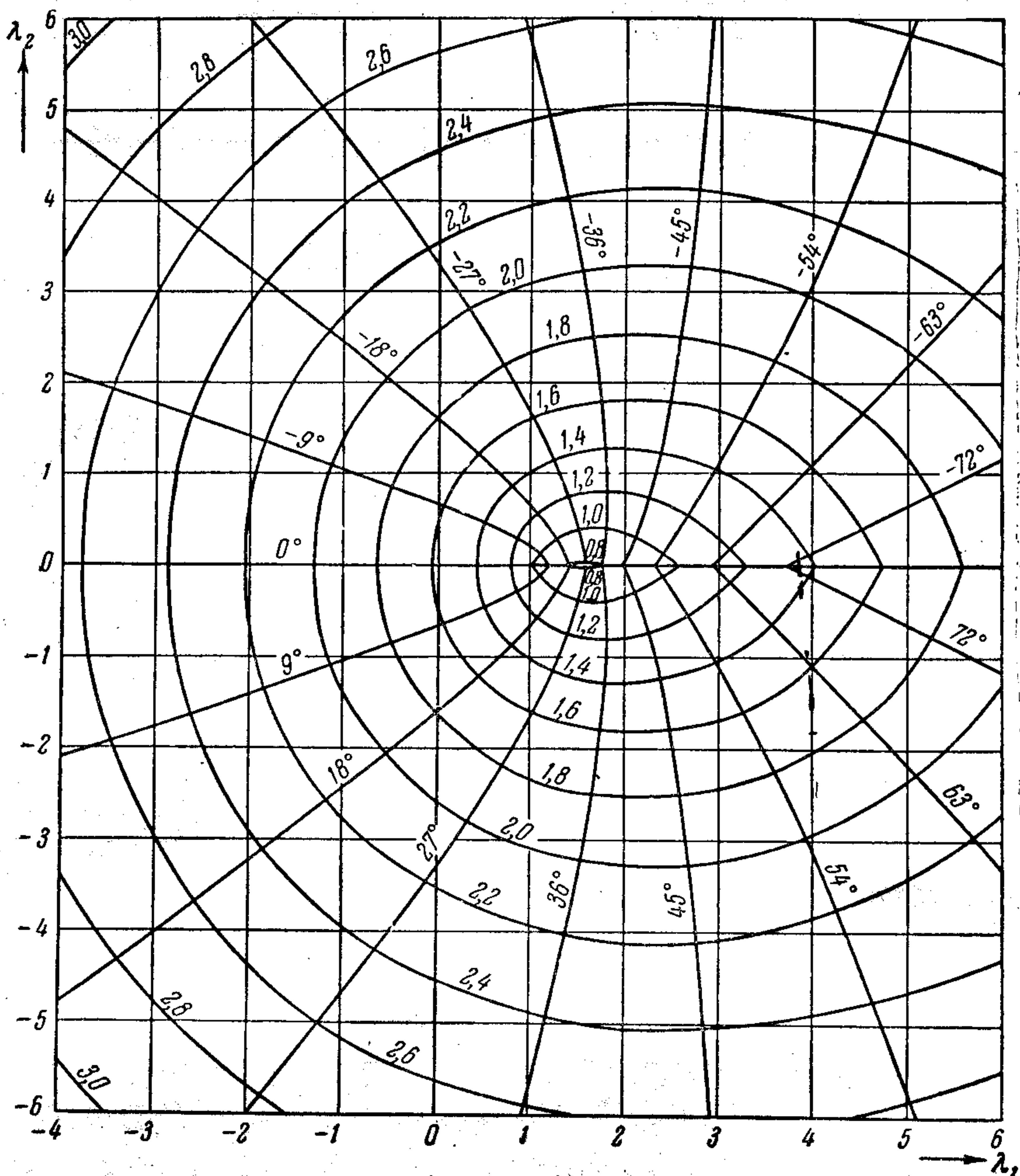


Рис. 56. Карта горизонталей рельефа полного эллиптического интеграла E .

Если $k^2 \approx 1$ и, следовательно, $k'^2 \ll 1$, пользуются рядами

$$K = \Lambda + \frac{\Lambda-1}{4} k'^2 + \frac{9}{64} \left(\Lambda - \frac{7}{6} \right) k'^4 + \frac{25}{256} \left(\Lambda - \frac{37}{30} \right) k'^6 + \dots,$$

$$E = 1 + \frac{1}{2} \left(\Lambda - \frac{1}{2} \right) k'^2 + \frac{3}{16} \left(\Lambda - \frac{13}{12} \right) k'^4 + \frac{15}{128} \left(\Lambda - \frac{6}{5} \right) k'^6 + \dots,$$

$$D = \Lambda - 1 + \frac{3}{4} \left(\Lambda - \frac{4}{3} \right) k'^2 + \frac{45}{64} \left(\Lambda - \frac{41}{30} \right) k'^4 + \frac{175}{256} \left(\Lambda - \frac{289}{210} \right) k'^6 + \dots,$$

где $\Lambda = \ln \frac{4}{k'}$ или, иначе, $k' = 4e^{-\Lambda}$ (рис. 57).

Некоторые разложения для K и E можно получить с помощью тэта-функций (см. X, C).

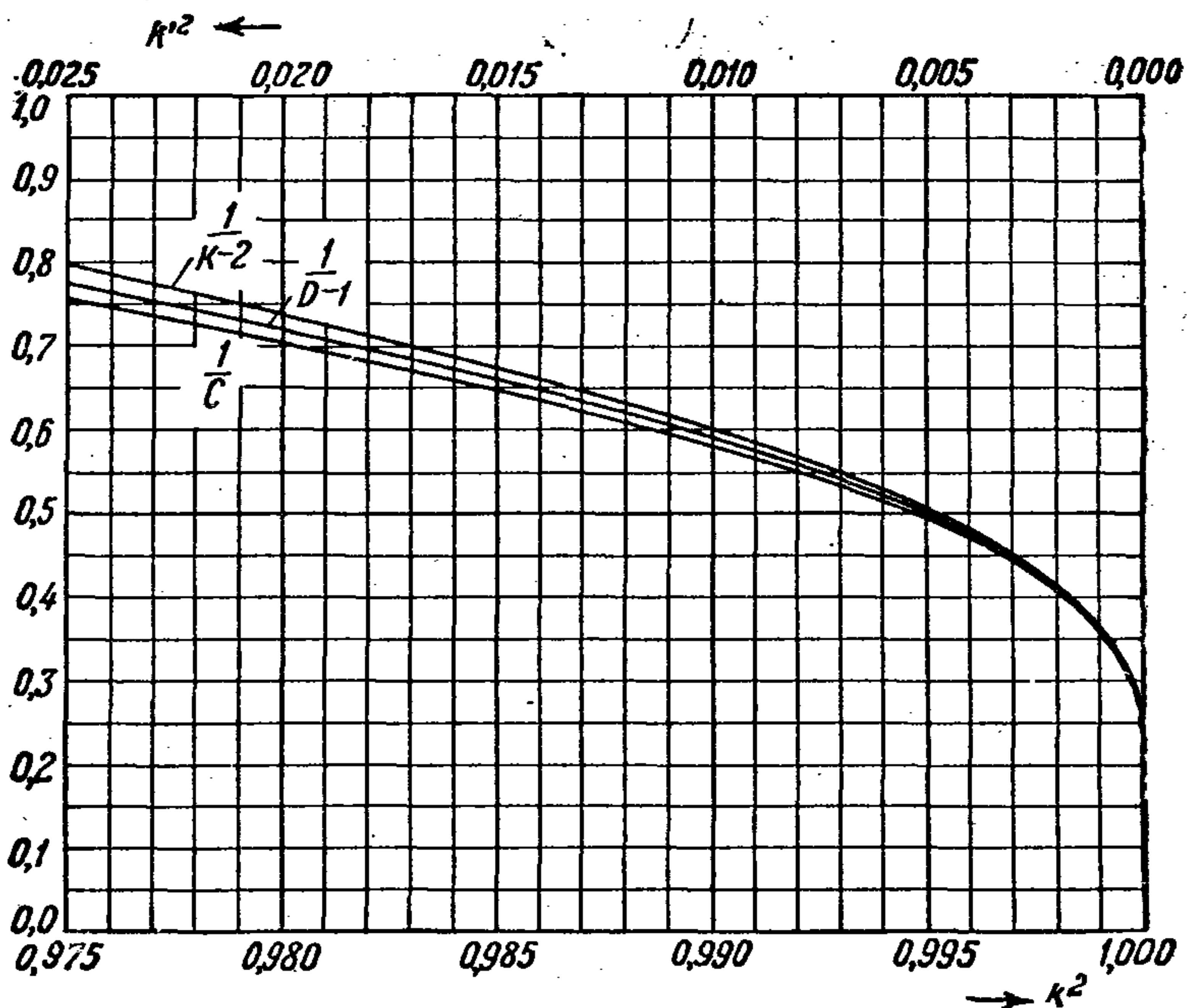


Рис. 57. Поведение эллиптических интегралов K , D и C при $k^2 \rightarrow 1$.

Таблицы нормальных форм полных эллиптических интегралов дают значения K , E в зависимости от аргумента α , где $k = \sin \alpha$ (таблица 29), или в зависимости от аргумента k^2 (таблица 30).

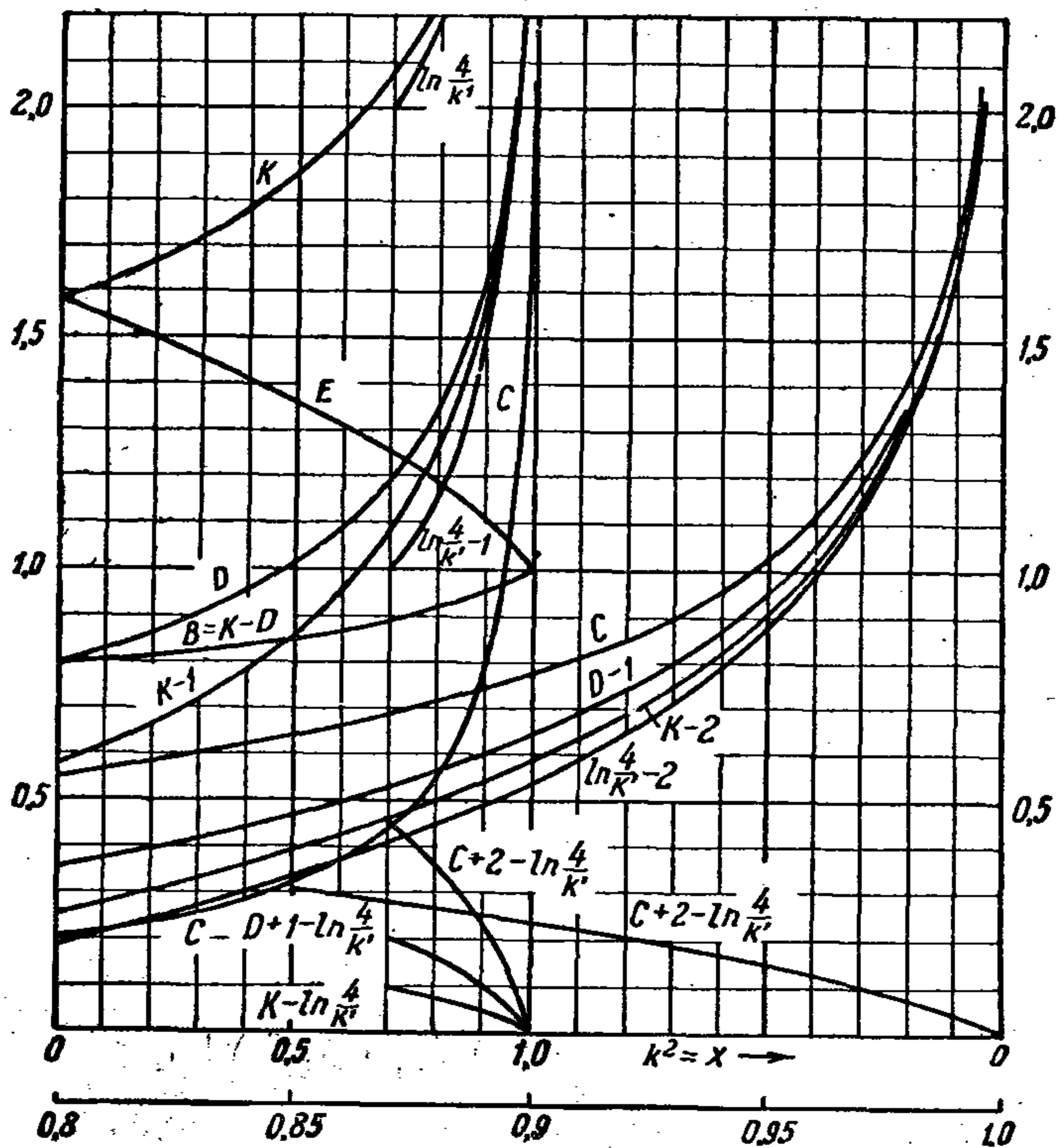
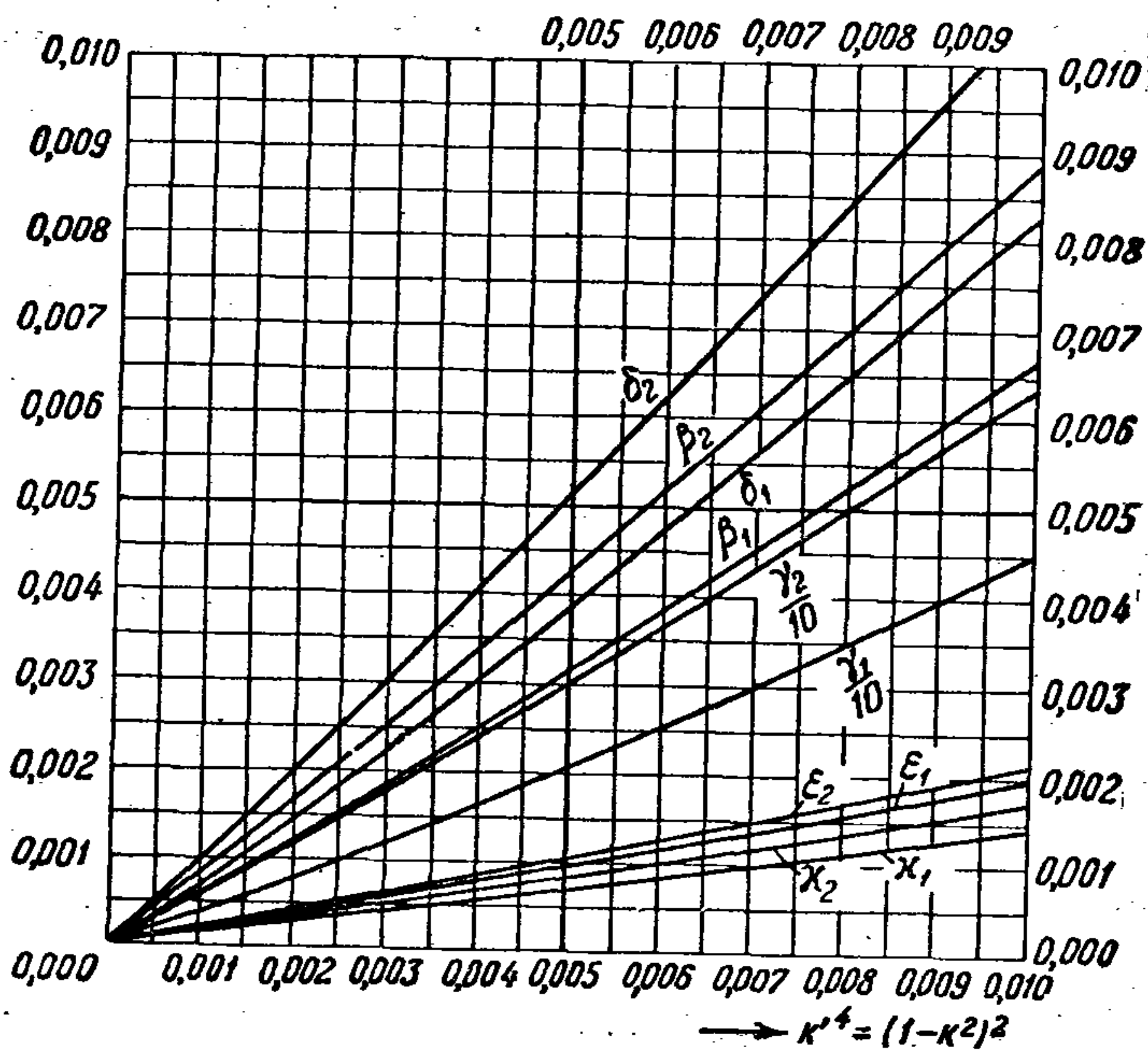
При вычислениях иногда бывает выгодно (особенно чтобы избежать не точности, появляющейся для малых разностей) пользоваться, кроме K и E , также следующими интегралами *) (таблица 31, рис. 58):

$$B(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi, \quad C(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \psi}{[\Delta(\psi, k)]^3} d\psi, \quad D(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi.$$

Между этими интегралами имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} K &= D + B, & 2D &= K + k^2 C, & E &= (1 + k'^2) B + k'^2 k^2 C, \\ K &= 2B + k^2 C, & E &= k'^2 D + B, & (1 + k'^2) K &= 2E + k^4 C, \\ D &= B + k^2 C, & E &= k'^2 K + k^2 B, & (1 + k'^2) D &= E + k^2 C. \end{aligned}$$

*) Введенными F. E m d e, Arch. fur Elektrotechnik, т. 30 (1936), стр. 243—250.

Рис. 58. Полные эллиптические интегралы действительного аргумента $x=k^2$.Рис. 59. $E-1 = (0,5k'^2 + \varepsilon_1) \ln \frac{4}{k'} - (0,25k'^2 + \varepsilon_2)$,

$$1-B = (0,5k'^2 + \beta_1) \ln \frac{4}{k'} - (0,75k'^2 + \beta_2), \quad h = (0,25k'^2 + \kappa_1) \ln \frac{4}{k'} - (0,25k'^2 + \kappa_2),$$

$$d = (0,75k'^2 + \delta_1) \ln \frac{4}{k'} - (k'^2 + \delta_2), \quad c = (2,25k'^2 + \gamma_1) \ln \frac{4}{k'} - (3,75k'^2 + \gamma_2).$$

Так как $K(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 1$, то значения аргумента в таблице 29 выбираются вблизи $\alpha = 90^\circ$ через малые интервалы. Таблица 32 для функции (рис. 59)

$$h(k) = K(k) - \ln 4/k'$$

используется для улучшения точности вычислений при значениях модуля k , близких к единице. Величина $K(k)$ легко получается, если взять $\ln(4/k')$ по таблице логарифмов и прибавить значения $h(k)$, получаемые по таблице 32.

Таблица 32 для функций (рис. 59)

$$c(k) = C(k) + 2 - \ln 4/k', \quad d(k) = D(k) + 1 - \ln 4/k'$$

позволяет получать значения $\dot{C}(k)$ и $\dot{D}(k)$ вблизи $k=1$ аналогичным приемом.

1.2. Для нормальной формы полного интеграла 3-го рода при больших значениях модуля, точнее, когда $k'/\lambda' \ll 1$, имеем *):

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda^2, k\right) - \frac{k^2}{\lambda^2} K(k) = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos^2 \psi + k'^2 \sin^2 \psi}}{\cos^2 \psi + \lambda'^2 \sin^2 \psi} d\psi = \sqrt{\lambda'^2 - k'^2} \left(\frac{\arccos \frac{1}{\lambda'}}{\lambda' \sqrt{\lambda'^2 - 1}} + R \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R = \frac{k'^2}{2} \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\lambda'^3} + \frac{k'^4}{16} \left[-1 + \left(\Lambda + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\lambda'^3} \left(1 + \frac{6}{\lambda'^2} \right) \right] + \\ + \frac{k'^6}{16} \left[-\frac{7}{16} - \frac{1}{\lambda'^2} + \left(\Lambda + \frac{1}{6} \right) \frac{1}{\lambda'^3} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{5}{\lambda'^4} \right) \right] + \\ + \frac{15k'^8}{256} \left[-\frac{37}{144} - \frac{21}{40\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda'^4} + \left(\Lambda + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{\lambda'^3} \left(\frac{5}{24} + \frac{9}{20\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda'^4} + \frac{14}{3\lambda'^6} \right) \right] + \dots, \\ \lambda'^2 = 1 + \lambda^2, \quad \Lambda = \ln 4/k', \quad k' = 4e^{-\Lambda}. \end{aligned}$$

2. Функциональные уравнения

2.1. Соотношение Лежандра:

$$E(k)K'(k) + E'(k)K(k) - K(k)K'(k) = \pi/2.$$

2.2. Формулы перехода к другому модулю:

$$\begin{aligned} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) &= \frac{1+k'}{2} K(k), \quad K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = (1+k)K(k), \quad K\left(i\frac{k}{k'}\right) = k'K(k), \\ E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) &= \frac{1}{1+k'} [E(k) + k'K(k)], \quad E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} [2E(k) - k'^2K(k)], \\ K'i\left(\frac{k}{k'}\right) &= k' [K'(k) - iK(k)], \quad K\left(\frac{1}{k}\right) = kK(k) + iK'(k). \end{aligned}$$

2.3. Производные и интегралы:

$$\int_0^1 K(k) dk = 2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \right) = 2G, \quad G = 0,915965594\dots$$

(G — постоянная Каталана).

*) См. G. Hamel, S.-Ber. Berliner Math. Ges., т. 31 (1932), стр. 17—22 и M. Kolscher, Z. Angew. Math. Mech., т. 31 (1951), стр. 114—120.

Таблица 29. Полные эллиптические интегралы $K(\sin \alpha)$ и $E(\sin \alpha)$

α	K		E		α	K		E		α	K		E	
0°	1,	5708	1,	5708	50°	1,9356	+ 183	3055	- 92	$82^\circ,0$	3,3699	+ 123,5	0278	- 5,5
1°	5709	+ 1	5707	- 1	51°	1,9539	+ 190	2963	- 93	$82^\circ,2$	3,3946	+ 126,5	0267	- 5,5
2°	5713	4	5703	4	52°	1,9729	198	2870	94	$82^\circ,4$	3,4199	130,5	0256	5,5
3°	5719	6	5697	6	53°	1,9927	206	2776	95	$82^\circ,6$	3,4460	134	0245	5,5
4°	5727	8	5689	8	54°	2,0133	214	2681	96	$82^\circ,8$	3,4728	138	0234	5,5
5°	5738	11	5678	11	55°	2,0347	+ 224	2587	- 95	$83^\circ,0$	3,5004	+ 142	0223	- 5
6°	5751	+ 13	5665	- 13	56°	2,0571	233	2492	- 95	$83^\circ,2$	3,5288	+ 146,5	0213	- 5,5
7°	5767	16	5649	16	57°	2,0804	243	2397	96	$83^\circ,4$	3,5581	151,5	0202	5
8°	5785	18	5632	17	58°	2,1047	253	2301	95	$83^\circ,6$	3,5884	156	0192	5
9°	5805	20	5611	21	59°	2,1300	265	2206	95	$83^\circ,8$	3,6196	161,5	0182	5
10°	5828	23	5589	22	60°	2,1565	+ 277	2111	- 96	$84^\circ,0$	3,6519	+ 166,5	0172	- 4,5
11°	5854	+ 26	5564	- 25	61°	2,1842	+ 290	2015	- 95	$84^\circ,2$	3,6852	+ 173	0163	- 5
12°	5882	28	5537	27	62°	2,2132	303	1920	94	$84^\circ,4$	3,7198	179,5	0153	4,5
13°	5913	31	5507	30	63°	2,2435	319!	1826	94	$84^\circ,6$	3,7557	186,5	0144	4,5
14°	5946	33	5476	31	64°	2,2754	334!	1732	94	$84^\circ,8$	3,7930	193,5	0135	4
15°	5981	35	5442	34	65°	2,3088	+ 351!	1638	- 93	$85^\circ,0$	3,8317	+ 16	0127	- 4,5
16°	6020	+ 39	5405	- 37	66°	2,3439	+ 370!	1545	- 92	$85^\circ,2$	3,8721	17	0118	- 4
17°	6061	41	5367	38	67°	2,3809	379!	1453	92	$85^\circ,4$	3,9142	19	0110	4
18°	6105	44	5326	41	68°	2,4198	389!	1362	91	$85^\circ,6$	3,9583	21	0102	4
19°	6151	46	5283	43	69°	2,4610	412!	1272	90	$85^\circ,8$	4,0044	23	0094	4
20°	6200	49	5238	45	70°	2,5046	436!	1184	88	$86^\circ,0$	4,0528	+ 25	0086	- 3,5
21°	6252	+ 52	5191	- 47	$70^\circ,5$	2,5273	+ 45,4	1140	- 8,8	$86^\circ,2$	4,1037	+ 28	0079	- 3,5
22°	6307	55	5141	50	71°	2,5507	46,8	1096	8,8	$86^\circ,4$	4,1574	31	0072	3,5
23°	6365	58	5090	51	$71^\circ,5$	2,5749	48,4	1053	8,6	$86^\circ,6$	4,2142	35	0065	3
24°	6426	61	5037	53	72°	2,5998	49,8	1011	8,4	$86^\circ,8$	4,2744	39	0059	3
25°	6490	64	4981	56	$72^\circ,5$	2,6256	51,6	0968	8,6	$87^\circ,0$	4,3387	+ 44	0053	- 3
26°	6557	+ 67	4924	- 57	73°	2,6521	+ 53,0	0927	- 8,2	$87^\circ,2$	4,4073	+ 51	0047	- 3
27°	6627	70	4864	60	$73^\circ,5$	2,6796	55,0	0885	8,4	$87^\circ,4$	4,4811	59	0041	2,5
28°	6701	74	4803	61	74°	2,7081	57,0	0844	8,2	$87^\circ,6$	4,5609	69	0036	2,5
29°	6777	76	4740	63	$74^\circ,5$	2,7375	58,8	0804	8,0	$87^\circ,8$	4,6477	82	0031	2,5
30°	6858	81	4675	65	75°	2,7681	61,2	0764	8,0	$88^\circ,0$	4,7427	+ 100	0026	- 2,5
31°	6941	+ 83	4608	- 67	$75^\circ,5$	2,7998	+ 63,4	0725	- 7,8	$88^\circ,2$	4,8478	+ 123	0021	- 2
32°	7028	87	4539	69	76°	2,8327	65,8	0686	7,8	$88^\circ,4$	4,9654	155	0017	2
33°	7119	89	4469	70	$76^\circ,5$	2,8669	68,4	0648	7,6	$88^\circ,6$	5,0988	201	0014	1,5
34°	7214	91	4397	72	77°	2,9026	71,4	0611	7,4	$88^\circ,8$	5,2527	273	0010	2
35°	7312	95	4323	74	$77^\circ,5$	2,9397	74,2!	0574	7,4	$89^\circ,0$	5,4349	+ 388	0008	1
36°	7415	+ 103	4248	- 75	78°	2,9786	+ 77,8!	0538	- 7,2	$89^\circ,1$	5,5402	+ 388	0006	- 2
37°	7522	107	4171	77	$78^\circ,5$	3,0192	81,2!	0502	- 7,2	$89^\circ,2$	5,6579	1	0005	1
38°	7633	111	4092	79	79°	3,0617	85,0!	0468	6,8	$89^\circ,3$	5,7914	1	0004	1
39°	7748	115	4013	79	$79^\circ,5$	3,1064	89,4!	0434	6,8	$89^\circ,4$	5,9455	1	0003	1
40°	7868	120	3931	82	$80^\circ,0$	3,1534	94,0!	0401	6,6	$89^\circ,5$	6,1278	1	0002	1
41°	7992	+ 124	3849	- 82	$80^\circ,2$	3,1729	+ 97,5	0388	- 6,5	$89^\circ,6$	6,3509	1	0001	- 1
42°	8122	130	3765	84	$80^\circ,4$	3,1928	99,5	0375	- 6,5	$89^\circ,7$	6,6385	0	0001	0
43°	8256	134	3680	85	$80^\circ,6$	3,2132	102	0363	6	$89^\circ,8$	7,0440	1	0000	1
44°	8396	140	3594	86	$80^\circ,8$	3,2340	104	0350	6,5	$89^\circ,9$	7,7371	0	0000	0
45°	8541	145	3506	88	$81^\circ,0$	3,2553	106,5	0338	6	90°	∞	0	0000	0
46°	8691	+ 150	3418	- 88	$81^\circ,2$	3,2771	+ 109	0326	- 6				1,	
47°	8848	157	3329	89	$81^\circ,4$	3,2995	112	0314	6					
48°	9011	163	3238	91	$81^\circ,6$	3,3223	114	0302	6					
49°	9180	169	3147	91	$81^\circ,8$	3,3458	117,5	0290	6					
50°	9356	176	3055	92	$82^\circ,0$	3,3699	120,5	0278	6					
	1,		1,					1,						

Таблица 30 Полные эллиптические интегралы $K(k)$ и $E(k)$

k^2	K		E		k^2	K		E	
	1,		1,					1,	
0.00	5708	+ 39,5	5708	- 39,5	0.50	1,8541	+ 86,5	3506	- 50,5
02	5787	41	5629	39,5	52	1,8714	90,5	3405	51,5
04	5869	41,5	5550	40	54	1,8895	95	3302	52
06	5952	42,5	5470	40,5	56	1,9085	100	3198	53
08	6037	43,5	5389	40,5	58	1,9285	105,5	3092	54
0.10	6174	+ 45	5308	- 41	0.60	1,9496	+ 111	2984	- 54,5
12	6214	46	5226	41,5	62	1,9718	117,5	2875	56
14	6306	47	5143	42	64	1,9953	125	2763	56,5
16	6400	48,5	5059	42	66	2,0203	133	2650	57,5
18	6497	49,5	4975	42,5	68	2,0469	142,5	2535	59
0.20	6596	+ 51,5	4890	- 42,5	0.70	2,0754		2417	- 60,5
22	6699	52,5	4805	43,5	72	2,1059		2296	61,5
24	6804	54	4718	43,5	74	2,1390		2173	63
26	6912	56	4631	44	76	2,1748		2047	64,5
28	7024	57,5	4543	44,5	78	2,2140		1918	66,5
0.30	7139	+ 59,5	4454	- 45	0.80	2,2572		1785	- 68,5
32	7258	61,5	4364	45,5	82	2,3052		1648	70,5
34	7381	63,5	4273	46	84	2,3593		1507	73,5
36	7508	65,5	4181	46,5	86	2,4209		1360	76,5
38	7639	68	4088	47	88	2,4926		1207	79,5
0.40	7775	+ 71	3994	- 47,5	0.90	2,5781		1048	- 84,5
42	7917	73	3899	48	92	2,6836		0879	89,5
44	8063	76,5	3803	49	94	2,8208		0700	97,5
46	8216	79,5	3705	49,5	96	3,0161		0505	109,5
48	8375	83	3606	50	98	3,3541		0286	
0.50	8541		3506		1.00	∞		0000	
	1,		1,					1,	

Таблица 31. Полные эллиптические интегралы $B(k)$, $C(k)$ и $D(k)$

k^2	B		C		D		k^2	B		C		D	
	0,		0,		0,								
0.00	7854	+ 10	19635	+ 149,5	7854	+ 29,5	0.50	8472	+ 16	0,3193	+ 43	1,0069	+ 70,5
02	7874	10	19934	154,5	7913	11	52	8504	16,5	0,3279	45,5	1,0210	74
04	7894	10	20243	159,5	7975	11,5	54	8537	17	0,3370	48,5	1,0358	78
06	7914	10,5	20562	165	8038	12	56	8571	18	0,3467	52	1,0514	82
08	7935	10,5	20892	170,5	8102	13	58	8607	18,5	0,3571	55,5	1,0678	87
0.10	7956	+ 10,5	21233	+ 176,5	8168	+ 14,5	0.60	8644	+ 18,5	0,3682	+ 59,5	1,0852	+ 92,5
12	7977	11	21586	182,5	8237	15	62	8681	19	0,3801	64	1,1037	98,5
14	7999	11	21951	189,5	8307	16	64	8719	20,5	0,3929	69	1,1234	104,5
16	8021	11,5	22330	196,5	8379	17	66	8760	20,5	0,4067	75	1,1443	112,5
18	8044	11,5	22723	204	8453	18	68	8801	21,5	0,4217	81,5	1,1668	121
0.20	8067	+ 11,5	23131	+ 212	8529	+ 19,5	0.70	8844	+ 22	0,4380		1,1910	
22	8090	12	23555	220	8608	21	72	8888	23,5	0,4559		1,2171	
24	8114	12	23995	229	8690	22	74	8935	24	0,4757		1,2455	
26	8138	12,5	24453	239	8774	23,5	76	8983	25,5	0,4975		1,2765	
28	8163	12,5	24931	249	8861	24,5	78	9034	27	0,5219		1,3106	
0.30	8188	+ 13	2543	+ 26	8951	+ 26,5	0.80	9088	+ 28	0,5495		1,3484	
32	8214	13	2595	27	9044	27,5	82	9144	30,5	0,5809		1,3908	
34	8240	13,5	2649	28,5	9141	29	84	9205	31,5	0,6171		1,4388	
36	8267	13,5	2706	29,5	9241	30,5	86	9268	34	0,6596		1,4941	
38	8294	14	2765	31,5	9345	32	88	9336	37,5	0,7106		1,5590	
0.40	8322	+ 14	2828	+ 33	9453	+ 34,5	0.90	9411	+ 40,5	0,7733		1,6370	
42	8350	15	2894	34,5	9566	36,5	92	9492	45,5	0,8535		1,7344	
44	8380	15	2963	36	9683	39,5	94	9583	51,5	0,9620		1,8625	
46	8410	15,5	3035	38,5	9806	43,5	96	9686	57,5	1,1235		2,0475	
48	8441	15,5	3112	40,5	9934	48,5	98	9811		1,4203		2,3730	
0.50	8472		3193		*0069		1.00	*0000		∞		∞	

Таблица 32. Вспомогательные функции $h(k)$, $c(k)$ и $d(k)$

$h = K - \ln \frac{4}{k'}$				$c = C + 2 - \ln \frac{4}{k'}$				$d = D + 1 - \ln \frac{4}{k'}$			
k^2	h			c				k^2	h		
	0,0			0,		0,2			0,0		0,1
0,70	871	-20		4497	-81	027	-41	0,85	542	-26	3027
71	851	19		4416	85	*986	43	86	516	27	2902
72	832	20		4331	85	943	43	87	489	27	2775
73	812	21		4246	87	900	43	88	462	28	2642
74	791	20		4159	90	857	45	89	434	29	2503
0,75	771	-21		4069	-93	812	-46	0,90	405	-30	236
76	750	22		3976	93	766	46	91	375	31	220
77	728	21		3883	98	720	48	92	344	33	204
78	707	23		3785	98	672	48	93	311	33	187
79	684	22		3687	102	624	50	94	278	36	169
0,80	662	-23		3585	-106	574	-51	0,95	242	-38	149
81	639	24		3479	107	523	52	96	204	41	128
82	615	24		3372	112	471	54	97	163	45	105
83	591	24		3260	115	417	55	98	118	50	078
84	567	25		3145	118	362	56	99	068		046
0,85	542			3027		306		1,00	000		000
	0,0			0,		0,1			0,0		0,

Если рассматривать интегралы K , E как функции аргумента $x = k^2$, то получим (аргументы опущены):

$$\begin{aligned}
 2 \frac{dK}{dx} &= \frac{E}{x(1-x)} - \frac{K}{x}, & 2 \frac{dE}{dx} &= \frac{E-K}{x}, & \int K dx &= 2 [E - (1-x)K] = 2x(K-D), \\
 \int E dx &= \frac{2}{3} [(1+x)E - (1-x)K], & \int D dx &= -2E, & \int (K+D) dx &= -2(1-x)K, \\
 \int Kx dx &= \frac{2}{9} [(4+x)E + (3x^2+x-4)K], \\
 \int Ex dx &= \frac{2}{45} [(9x^2+x+4)E + (3x^2+x-4)K], \\
 (2n+3)^2 \int Kx^{n+1} dx - 4(n+1)^2 \int Kx^n dx &= 2x^{n+1} [E - (2n+3)(1-x)K], \\
 4(n+1)^2 \int Ex^n dx - (2n-3)(2n+5) \int Ex^{n+1} dx &= \\
 &= 2x^{n+1} \{ [(2n+1) - (2n+3)x]E + (1-x)K \} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \\
 \int \frac{K}{x\sqrt{x}} dx &= -2 \frac{E}{\sqrt{x}}, & \int \frac{D}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x}(K-D), \\
 \int \frac{E}{x\sqrt{x}} dx &= -\frac{2}{\sqrt{x}} [2E + (x-1)K], & \int \frac{E}{x^2\sqrt{x}} dx &= -\frac{2}{9x\sqrt{x}} [(4-2x)E + (x-1)K], \\
 \int \frac{E}{1-x} dx &= 2(K-E) = 2xD, & \int \frac{E}{(1-x)\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x}K.
 \end{aligned}$$

2.4. K , E и D удовлетворяют гипергеометрическим дифференциальным уравнениям [в которых принято обозначение аргумента $x = k^2$]:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}K &= \frac{d}{dx} \left[x(1-x) \frac{dK}{dx} \right], & x(1-x) \frac{d^2K}{dx^2} + (1-2x) \frac{dK}{dx} - \frac{1}{4}K &= 0, \\
 -\frac{1}{4}E &= (1-x) \frac{d}{dx} \left(x \frac{dE}{dx} \right), & x(1-x) \frac{d^2E}{dx^2} + (1-x) \frac{dE}{dx} + \frac{1}{4}E &= 0, \\
 -\frac{1}{4}D &= \frac{d}{dx} \left[(1-x) \frac{dD}{dx} \right], & x(1-x) \frac{d^2D}{dx^2} + (2-3x) \frac{dD}{dx} - \frac{3}{4}D &= 0.
 \end{aligned}$$

Х. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определения и обозначения

Эллиптическими функциями называются функции, обратные к эллиптическим интегралам.

Эллиптическая функция является двоякопериодической мероморфной функцией комплексного переменного. Все ее периоды можно представить в виде $2m\omega_1 + 2n\omega_2$ (m, n — целые числа), где $2\omega_1, 2\omega_2$ называются *парой основных периодов*. Отношение основных периодов $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ является комплексной величиной, и можно считать, что $\text{Im } \tau > 0$.

Начиная из произвольной точки u_0 , можно покрыть всю плоскость комплексного аргумента сеткой параллелограммов периодов, вершинами которых будут точки $u_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ (m, n — целые числа). В силу своей двоякопериодичности функция принимает одно и то же значение в соответствующих (гомологических) точках всех параллелограммов периодов.

А. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ

1. Амплитуда Якоби $\text{am}(u, k)$

Если

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)}$$

—неполный эллиптический интеграл 1-го рода, то φ называется *амплитудой* u :

$$\varphi = \text{am}(u, k).$$

Она является бесконечнозначной периодической функцией от $u = u_1 + iu_2$ (рис. 60, 61) с точками ветвления*) $u = 2mK + (2n+1)K'i$ (m, n — целые числа) и с периодом $4K'i$:

$$\text{am}(u + 4K'i, k) = \text{am}(u, k).$$

Далее, имеют место свойства

$$\begin{aligned} \text{am}(u + 2K, k) &= \pi + \text{am}(u, k), \quad \text{am}(u + 2K'i, k) = \pi - \text{am}(u, k), \\ \text{am}(-u, k) &= -\text{am}(u, k); \end{aligned}$$

при u близких к нулю верно представление

$$\text{am}(iK' - iu, k) \approx i \ln \frac{2}{ku}.$$

*) Здесь K означает полный эллиптический интеграл 1-го рода $K = K(k)$, $K' = K(k')$, где $k' = \sqrt{1-k^2}$. — Прим. ред.

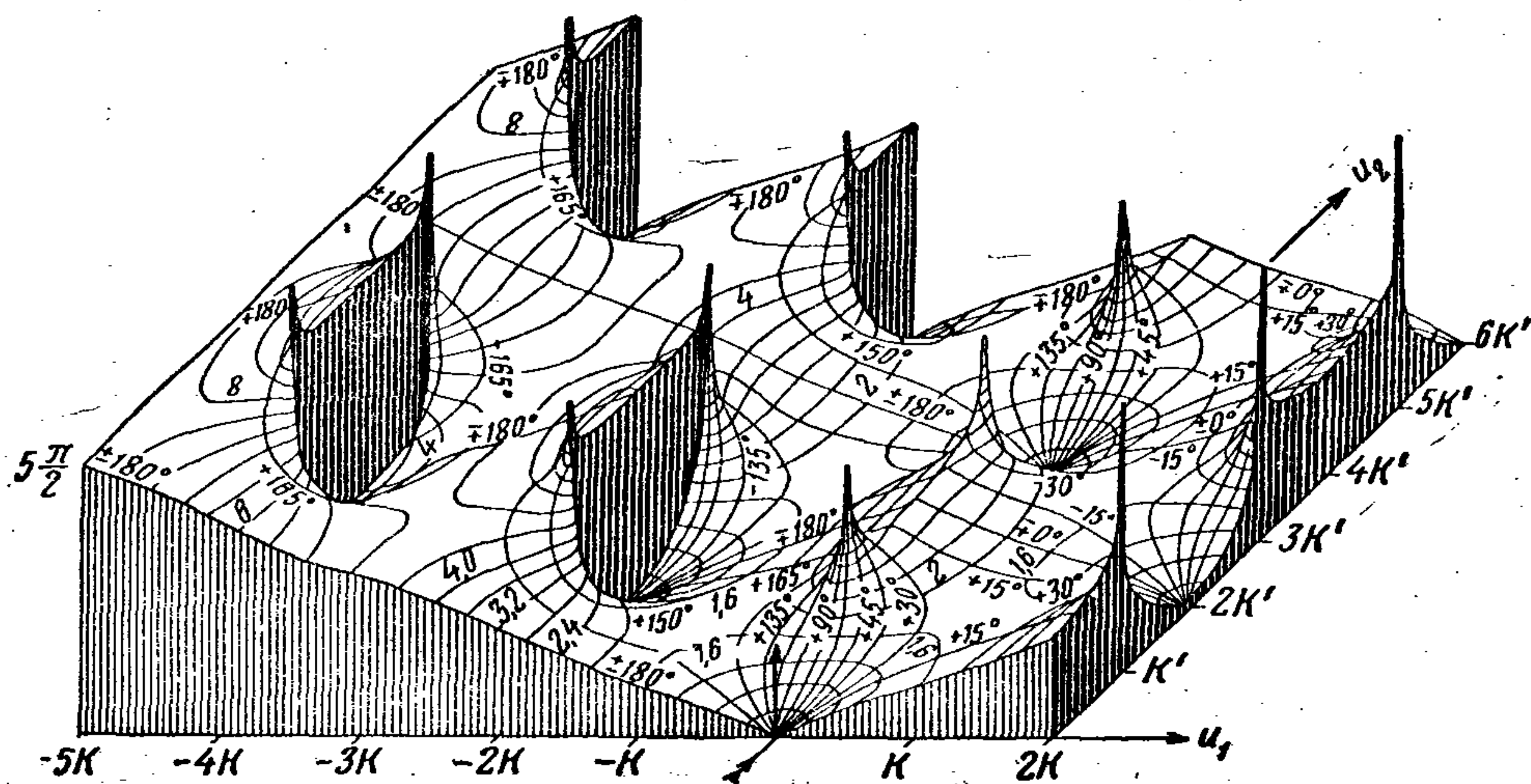


Рис. 60. Рельеф амплитуды Якоби $\text{am}(u, k)$ при $k=0,8$. Четыре заштрихованные поверхности слева означают линии ветвления.

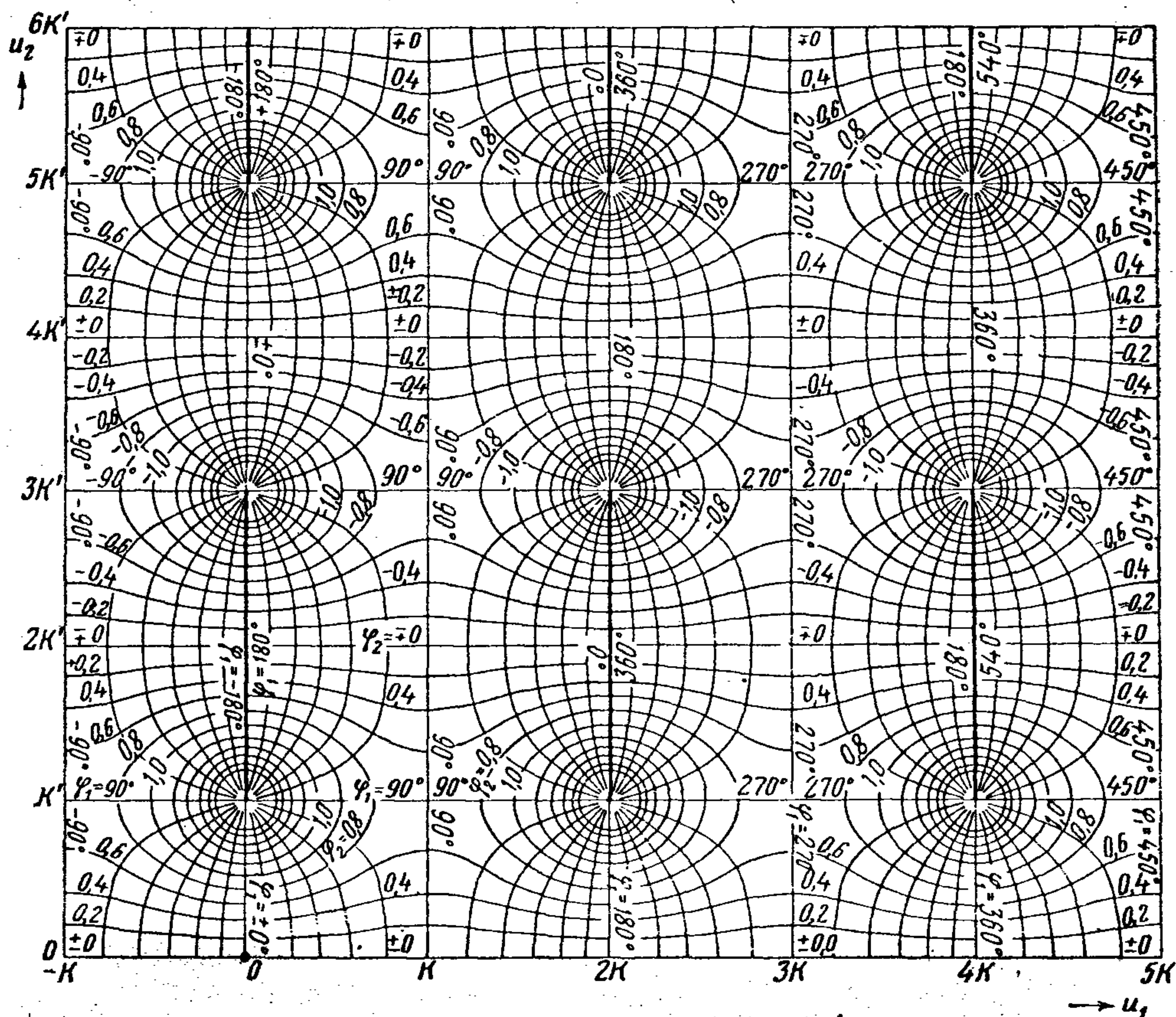


Рис. 61. Карта горизонталей рельефа амплитуды Якоби $\varphi_1 + i\varphi_2 = \text{am}(u, k)$ при $k=0,8$ ($K=2,00$, $K'=1,75$). Обратите внимание на линии ветвления!

2. Функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

Двойкопериодические функции Якоби получаются из $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$ посредством формул

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u, k) &= \sin \varphi = \sin \operatorname{am}(u, k), \\ \operatorname{cn}(u, k) &= \cos \varphi = \cos \operatorname{am}(u, k), \\ \operatorname{dn}(u, k) &= \Delta(\varphi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(u, k)}.\end{aligned}$$

Парами основных периодов являются соответственно

$$4K, 2K'i; \quad 4K, 2K + 2K'i; \quad 2K, 4K'i.$$

Если эти функции рассматриваются как функции только одного аргумента

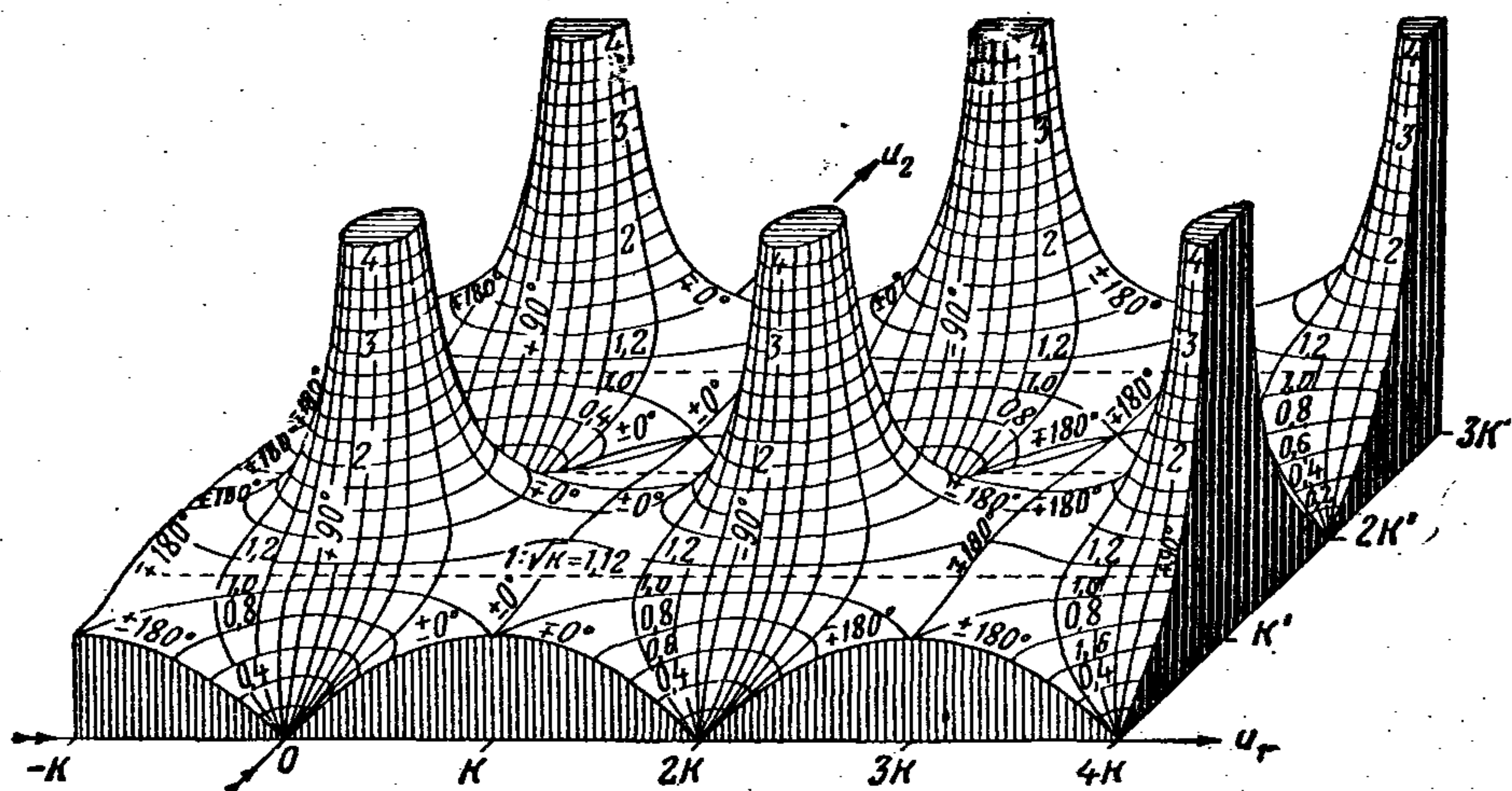


Рис. 62. Рельеф функции Якоби $\operatorname{sn} u$ при $k=0,8$.

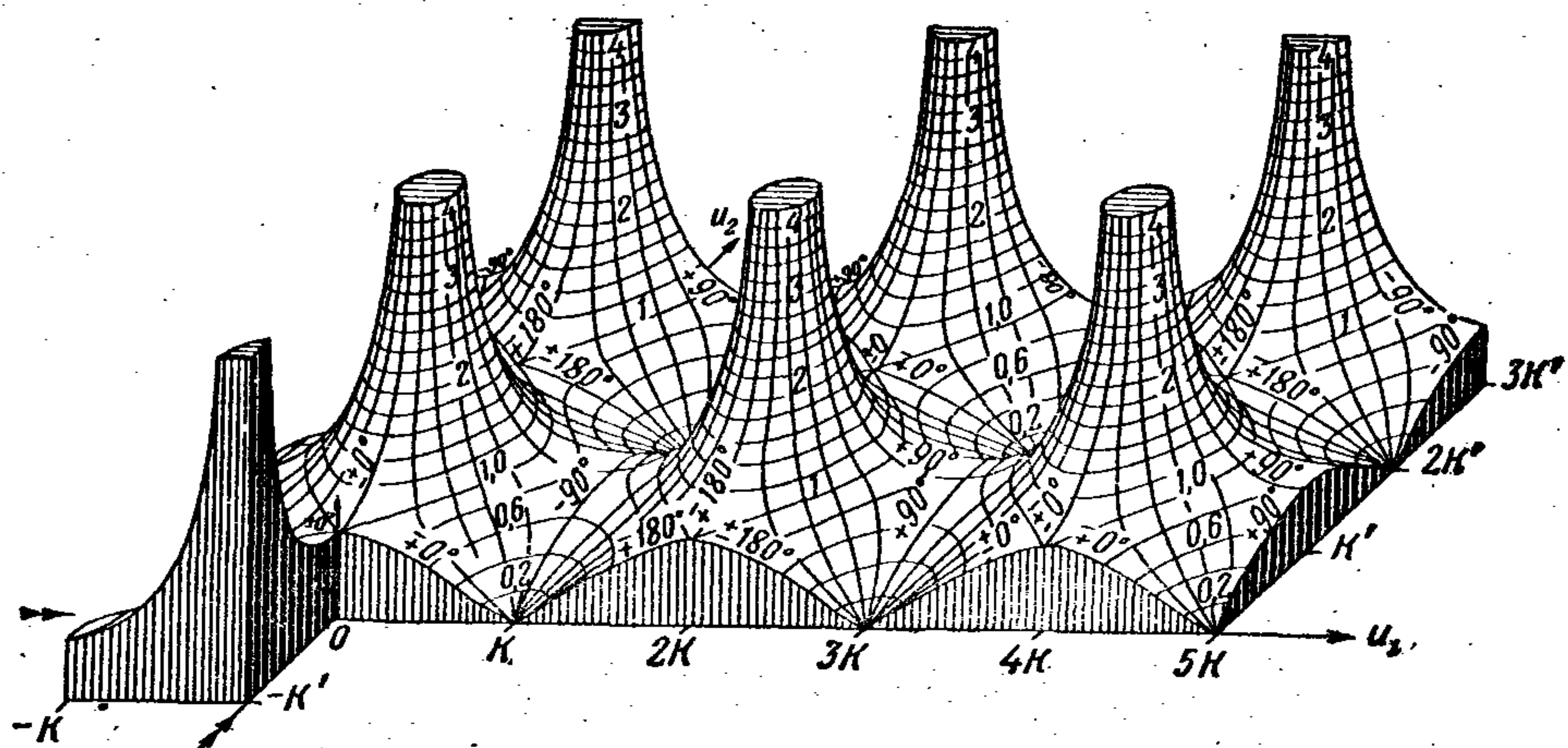


Рис. 63. Рельеф функции Якоби $\operatorname{cn} u$ при $k=0,8$.

$u = u_1 + iu_2$ при постоянном модуле k , то пишут для краткости $\operatorname{sn} u$ (рис. 62,65), $\operatorname{cn} u$ (рис. 63,66) $\operatorname{dn} u$ (рис. 64,67). Представления этих функций через тэта-функции см. в С, 4.3.

Отметим два исключительных случая:

$$k=0, k'=1: \quad \operatorname{sn} u = \sin u, \quad \operatorname{cn} u = \cos u, \quad \operatorname{dn} u = 1,$$

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} e^{-\pi K'/K} = \frac{1}{16};$$

$$k=1, k'=0: \quad \varphi = \operatorname{gd} u, \quad \operatorname{sn} u = \operatorname{th} u, \quad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u},$$

$$K = \infty, \quad K' = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow 1} \frac{1}{1-k^2} e^{-\pi K/K'} = \frac{1}{16}.$$

3. Частные значения

$$\operatorname{sn}(0) = 0, \quad \operatorname{cn}(0) = 1, \quad \operatorname{dn}(0) = 1.$$

	Нули	Полюсы	Вычеты
$\operatorname{sn} u$	$2mK + 2nK'i$	$2mK + (2n+1)K'i$	$(-1)^m 1/k$
$\operatorname{cn} u$	$(2m+1)K + 2nK'i$	$2mK + (2n+1)K'i$	$(-1)^{m+n-1} i/k$
$\operatorname{dn} u$	$(2m+1)K + (2n+1)K'i$	$2mK + (2n+1)K'i$	$(-1)^{n-1} i$

Если $u = u_1 + iu_2$ и $k > 0$, то

$$\left| \operatorname{sn} \left(\frac{1}{2} K'i + u_1 + 0i \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \left| \operatorname{dn} \left(\frac{1}{2} K + 0 + u_2 i \right) \right| = \sqrt{k'}.$$

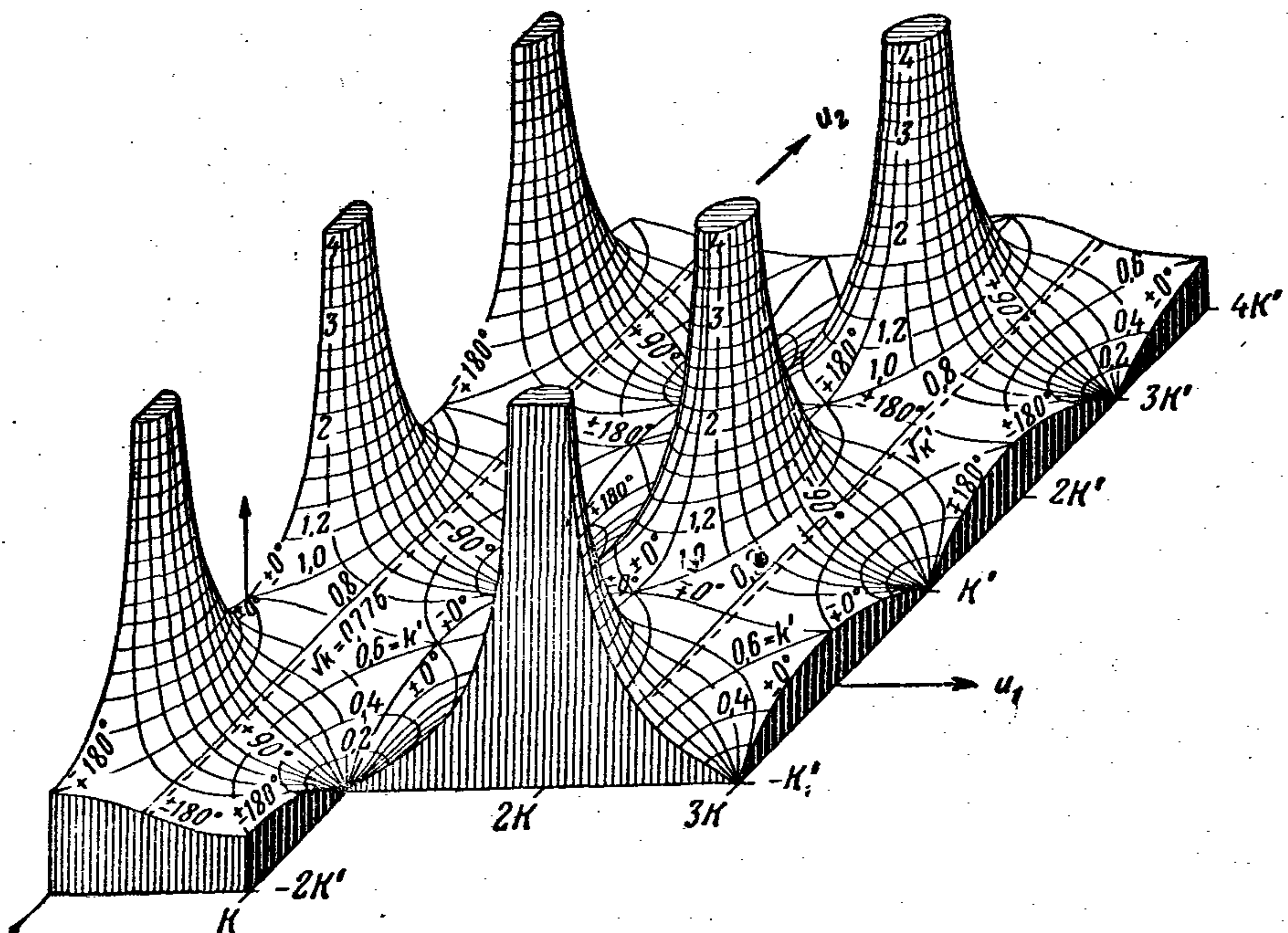


Рис. 64. Рельеф функции Якоби $\operatorname{dn} u$ при $k=0,8$.

4. Функциональные уравнения

4.1. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(-u) &= -\operatorname{sn} u, & \operatorname{cn}(-u) &= \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(-u) &= \operatorname{dn} u, & \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u = k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u = \operatorname{cn}^2 u + k'^2 \operatorname{sn}^2 u, \\ \operatorname{sn}^2 u &= \frac{1 - \operatorname{cn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u}, & \operatorname{cn}^2 u &= \frac{\operatorname{cn} 2u + \operatorname{dn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u}, & \operatorname{dn}^2 u &= \frac{\operatorname{dn} 2u + k^2 \operatorname{cn} 2u + k'^2}{1 + \operatorname{dn} 2u}, \\ \operatorname{sn}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \pm \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, & \operatorname{sn}(iu, k) &= i \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}, \\ \operatorname{cn}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \mp \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, & \operatorname{cn}(iu, k) &= \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}, \\ \operatorname{dn}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \mp k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, & \operatorname{dn}(iu, k) &= \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}, \\ (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v) \times & \begin{cases} \operatorname{sn}(u + v) \operatorname{sn}(u - v) = \operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v, \\ \operatorname{cn}(u + v) \operatorname{cn}(u - v) = \operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u, \\ \operatorname{dn}(u + v) \operatorname{dn}(u - v) = \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u. \end{cases} \end{aligned}$$

4.2. Изменение функций при возрастании аргумента u на четверть- и полу-период берется из следующих таблиц, в которых для краткости написано s, c, d вместо $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$:

$\operatorname{sn}(mK + nK'i + u)$				
	$-K$	0	$+K$	$\pm 2K$
$\pm iK'$	$-\frac{d}{kc}$	$\frac{1}{ks}$	$\frac{d}{kc}$	$-\frac{1}{ks}$
0	$-\frac{c}{d}$	s	$\frac{c}{d}$	$-s$

$\operatorname{dn}(mK + nK'i + u)$		
	0	$\pm K$
$\pm 2iK'$	$-d$	$-\frac{k'}{d}$
$+iK$	$\frac{c}{is}$	$ik' \frac{s}{c}$
0	d	$\frac{k'}{d}$
$-iK$	$\frac{ic}{s}$	$\frac{k's}{is}$

$\operatorname{cn}(mK + nK'i + u)$				
	$-K$	0	$+K$	$\pm 2K$
$+iK'$	$\frac{ik'}{kc}$	$\frac{d}{iks}$	$\frac{k'}{ikc}$	$\frac{id}{ks}$
0	$k' \frac{s}{d}$	c	$-k' \frac{s}{d}$	$-c$
$-iK'$	$\frac{k'}{ikc}$	$\frac{id}{ks}$	$\frac{ik'}{kc}$	$\frac{d}{iks}$

4.3. Функции $\operatorname{sn} u, \operatorname{dn} u$ выражаются через $\operatorname{sn} u$ посредством соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u, k) &= \operatorname{sn}\left(k'K + k'u, \frac{ik}{k'}\right), \\ \operatorname{dn}(u, k) &= k' \operatorname{sn}(K' - iK + iu, k'). \end{aligned}$$

Для перехода от одного модуля к другому имеем таблицу, где для краткости вместо $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ пишем соответственно s , c , d :

u_1	k_1	$\operatorname{sn}(u_1, k_1)$	$\operatorname{cn}(u_1, k_1)$	$\operatorname{dn}(u_1, k_1)$
ku	$\frac{1}{k}$	ks	d	c
iu	k'	$\frac{is}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{d}{c}$
$k'u$	$\frac{ik}{k'}$	$\frac{k's}{d}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{1}{d}$
iku	$\frac{ik'}{k}$	$\frac{iks}{d}$	$\frac{1}{d}$	$\frac{c}{d}$
$ik'u$	$\frac{1}{k'}$	$\frac{ik's}{c}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
$(1+k)u$	$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$\frac{(1+k)s}{1+ks^2}$	$\frac{cd}{1+ks^2}$	$\frac{1-ks^2}{1+ks^2}$
$(1+k')u$	$\frac{1-k'}{1+k'}$	$(1+k')\frac{sc}{d}$	$\frac{1-(1+k')s^2}{d}$	$\frac{1-(1-k')s^2}{d}$
$\frac{(1+\sqrt{k'})^2 u}{2}$	$\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$	$\frac{k^2 sc}{\sqrt{k_1}(1+d)(k'+d)}$	$\frac{d-\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \sqrt{\frac{2}{1+d k'+d}}$	$\frac{\sqrt{1+k_1}(d+\sqrt{k'})}{\sqrt{1+d}\sqrt{k'+d}}$

4.4. Формулы дифференцирования и дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{am} u}{du} &= \operatorname{dn} u, \quad \frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \\ \left(\frac{d \operatorname{sn} u}{du}\right)^2 &= (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u), \quad \left(\frac{d \operatorname{cn} u}{du}\right)^2 = (1 - \operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u), \\ \left(\frac{d \operatorname{dn} u}{du}\right)^2 &= (1 - \operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u - k'^2). \end{aligned}$$

4.5. Формулы интегрирования:

$$\begin{aligned} k \int_0^u \operatorname{sn} u \, du &= \ln \frac{\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u}{1-k} = -\ln \frac{\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u}{1+k} = \operatorname{Arch} \left(\frac{\operatorname{dn} u - k^2 \operatorname{cn} u}{1-k^2} \right) = \\ &= \operatorname{Arch} \frac{1}{k'} - \operatorname{Arch} \frac{d}{k'} = \operatorname{Arsh} \left(k \frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{1-k^2} \right) = \operatorname{Arsh} \frac{k}{k'} - \operatorname{Arsh} \frac{k \operatorname{cn} u}{k'}, \\ k \int_0^u \operatorname{cn} u \, du &= \arccos(\operatorname{dn} u) = \arcsin(k \operatorname{sn} u), \quad \int_0^u \operatorname{dn} u \, du = \arcsin(\operatorname{sn} u) = \operatorname{am} u, \\ \int_0^K \frac{du}{\operatorname{sn} u} &= \ln \frac{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}{k' \operatorname{sn} u}, \quad k' \int_0^u \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \ln \frac{\operatorname{dn} u + k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du = E(\operatorname{am} u, k), \\ k' \int_0^u \frac{du}{\operatorname{dn} u} &= \arccos \left(\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right) = \arcsin \left(k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \right), \quad k' \int_0^u \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \, du = \ln \frac{\operatorname{dn} u + k'}{(1+k') \operatorname{cn} u}, \\ \int_0^K \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \, du &= \ln \frac{1+\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \int_u^K \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} - k', \quad k'^2 \int_0^u \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - 1, \\ k'^2 \int_0^u \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u} \, du &= 1 - \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \int_u^K \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \int_0^u \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \int_0^u \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}. \end{aligned}$$

5. Дзета-функция Якоби $\text{zn}(u, k)$

Дзета-функция Якоби (рис. 68) определяется так:

$$\text{zn}(u, k) = E(\text{am } u, k) - \frac{E}{K} u = \int_0^u \text{dn}^2(u, k) du - \frac{E}{K} u.$$

Она является периодической мероморфной функцией от u (модуль k считается постоянным) с одним периодом $2K$:

$$\text{zn } u = -\text{zn}(2K - u) = \text{zn}(2K + u) = -\text{zn}(-u).$$

Нули этой функции лежат в точках nK ($n = 0, \pm 1, \dots$). О ее представлении с помощью тэта-функций см. С, 4.3.

В. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

1. Функции Вейерштрасса $\wp u$, ζu , σu

Нормальной формой Вейерштрасса эллиптического интеграла 1-го рода называется

$$u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3).$$

Обратная функция называется *эллиптической функцией Вейерштрасса* и обозначается через

$$s = \wp u = \wp(u; g_2, g_3).$$

Она является двоякопериодической функцией комплексного аргумента $u = u_1 + iu_2$ (рис. 69) с основными периодами 2ω , $2\omega'$, которые для действительных $e_1 > e_2 > e_3$ даются равенствами

$$2\omega = 2 \int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad 2\omega' = 2i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-S}}.$$

Величины g_2 , g_3 называются *инвариантами* функции. Инварианты g_2 , g_3 , нули e_1 , e_2 , e_3 полинома S и периоды ω , ω' связаны равенствами ($\sum'$ означает суммирование по всем отличным от нуля периодам $\omega = 2m\omega + 2n\omega'$; $m, n = 0, \pm 1, \dots$):

$$g_2 = -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = 60 \sum' \frac{1}{\omega^4}; \quad g_3 = 4e_1 e_2 e_3 = 140 \sum' \frac{1}{\omega^6};$$

$$e_1 = \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega + \omega), \quad e_3 = \wp(\omega'); \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

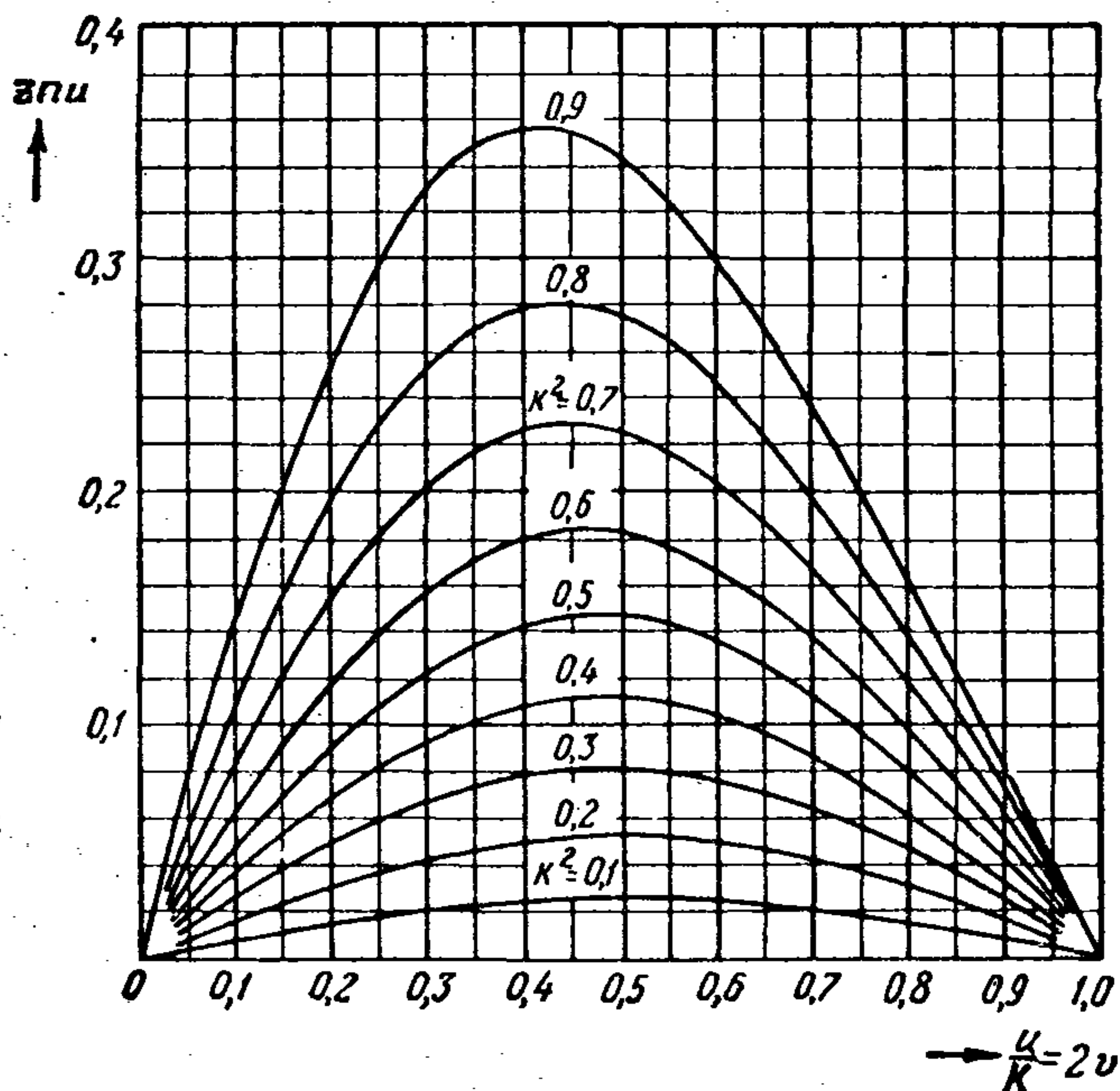


Рис. 68. $\text{zn}(K \cdot 2v)$ как функция $2v$.

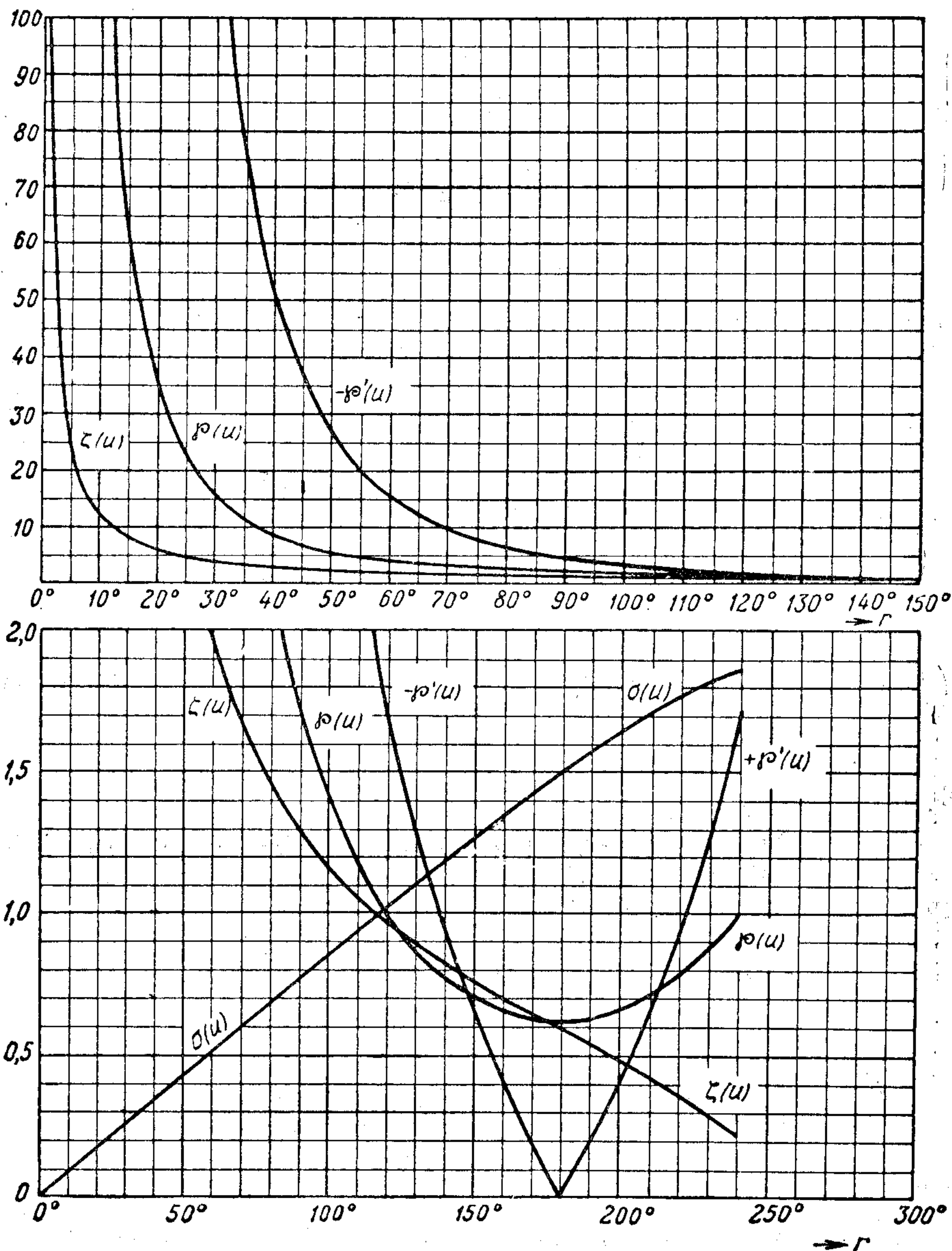


Рис. 70 и 71. Функции Вейерштрасса как функции $r = 180^\circ \frac{u}{\omega_2}$ при $g_2 = 0$, $g_3 = 1$.

2. Представления

В окрестности $u = 0$ справедливы разложения в степенные ряды

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2 u}{10} + \frac{g_3 u^3}{7} + \frac{g_2^2 u^5}{200} + \frac{3g_2 g_3 u^7}{770} + \dots,$$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{20} + \frac{g_3 u^4}{28} + \frac{g_2^2 u^6}{1200} + \frac{3g_2 g_3 u^8}{6160} + \dots,$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{60} - \frac{g_3 u^5}{140} - \frac{g_2^2 u^7}{8400} - \dots, \quad \sigma(u) = u - \frac{g_2 u^5}{240} - \frac{g_3 u^7}{840} - \frac{g_2^2 u^9}{161280} - \dots$$

3. Функциональные уравнения

3.1. Формулы интегрирования:

$$\begin{aligned}\int \wp u \, du &= -\zeta u, \quad \int \wp^2 u \, du = \frac{1}{6} \wp' u + \frac{1}{12} g_2 u, \\ \int \wp^3 u \, du &= \frac{1}{120} \wp''' u - \frac{3}{20} g_2 \cdot \zeta u + \frac{1}{10} g_3 u, \\ \wp' v \int \frac{du}{\wp u - \wp v} &= 2u \cdot \zeta v + \ln \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)}, \\ \frac{1}{2} [\wp' v]^2 \int \frac{du}{[\wp u - \wp v]^2} + \frac{1}{2} \wp'' v \int \frac{du}{\wp u - \wp v} + u \cdot \wp v &= -\frac{1}{2} \zeta(u-v) - \frac{1}{2} \zeta(u+v), \\ \int \frac{\alpha \wp u + \beta}{\gamma \wp u + \delta} du &= \frac{\alpha u}{\gamma} - \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{\gamma^2 \wp' v} \left[\ln \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} + 2u \cdot \zeta v \right] \quad \left(\wp v = -\frac{\delta}{\gamma} \right).\end{aligned}$$

3.2. Дифференциальные уравнения, приводящие к функциям Вейерштрасса:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{du}\right)^2 &= 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad x = \wp(u; g_2, g_3); \\ \left(\frac{dx}{du}\right)^2 &= x^2(x-a)^2, \quad x = \frac{a}{2} + \frac{27}{16} \wp' \left(\frac{u}{2}; 0, g_3\right), \quad g_3 = -\frac{64}{729} a^2; \\ \left(\frac{dx}{du}\right)^2 &= (x^2 - 3ax^2 + 3x)^2, \quad x = \frac{2}{a - 3\wp'(u; 0, g_3)}, \quad g_3 = \frac{4 - 3a^2}{27}; \\ \left(\frac{dx}{du}\right)^4 &= \frac{128}{3} (x + a^2)(x + b)^2, \quad x = 6\wp^2(u; g_2, 0) - b, \quad g_2 = \frac{2}{3}(a - b).\end{aligned}$$

4. Соотношения между функциями Якоби и Вейерштрасса

Функции Якоби, соответствующие модулю

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad (0 < k^2 < 1 \text{ для действительных } e_1 > e_2 > e_3)$$

могут быть выражены через $\wp u$

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) &= \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp u - e_3}}, \quad \operatorname{cn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{\wp u - e_3}}, \\ \operatorname{dn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) &= \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_3}}.\end{aligned}$$

Наоборот,

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u \sqrt{e_1 - e_3})}.$$

Для периодов имеем соотношения:

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega' = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{iK'}{K}.$$

C. ТЭТА-ФУНКЦИИ

1. Определение и представления

Тэта-функции для комплексного переменного v и комплексного параметра κ при $\operatorname{Re} \kappa > 0$ определяются посредством рядов

$$\begin{aligned}\vartheta_1(v, \kappa) &= 2q^{\frac{1}{4}} (\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v - \dots) = \\ &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi v i},\end{aligned}$$

$$\vartheta_2(v, \kappa) = 2q^{\frac{1}{4}} (\cos \pi v + q^2 \cos 3\pi v + q^6 \cos 5\pi v + \dots) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi v i},$$

$$\vartheta_3(v, \kappa) = 1 + 2(q \cos 2\pi v + q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v + \dots) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\pi v i},$$

$$\vartheta_4(v, \kappa) = 1 - 2(q \cos 2\pi v - q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v - \dots) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi v i}.$$

Здесь $q = e^{-\pi\kappa}$, а под $q^{1/4}$ понимают однозначно определенное значение $e^{-\frac{1}{4}\pi\kappa}$; можно также представить $q = e^{i\pi\tau}$, где $\tau = \tau_1 + i\tau_2 = i\kappa$ ($\tau_2 > 0$).

Если параметр κ фиксирован, то вместо $\vartheta_n(v, \kappa)$ пишут сокращенно $\vartheta_n(v)$. Функцию $\vartheta_4(v)$ обозначают также через $\vartheta(v)$ или $\vartheta_0(v)$. Тэта-функции являются целыми трансцендентными функциями.

Логарифмическими производными по v будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln \vartheta_3(v)}{dv} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln \vartheta_4(v)}{dv} \end{aligned} \right\} = \mp \frac{\sin 2\pi v}{\operatorname{sh} \pi\kappa} + \frac{\sin 4\pi v}{\operatorname{sh} 2\pi\kappa} \mp \frac{\sin 6\pi v}{\operatorname{sh} 3\pi\kappa} + \dots,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln \vartheta_2}{dv} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi v \\ \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln \vartheta_1}{dv} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \pi v \end{aligned} \right\} = \mp \frac{\sin 2\pi v}{\operatorname{sh} \pi\kappa} + q^2 \frac{\sin 4\pi v}{\operatorname{sh} 2\pi\kappa} \mp q^3 \frac{\sin 6\pi v}{\operatorname{sh} 3\pi\kappa} + \dots$$

2. Частные значения

2.1. Нули тэта-функций даны в таблице (m, n — целые числа)

$\vartheta_1(v, \kappa)$	$\vartheta_2(v, \kappa)$	$\vartheta_3(v, \kappa)$	$\vartheta_4(v, \kappa)$
$m + n\kappa i$	$m + \frac{1}{2} + n\kappa i$	$m + \frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\kappa i$	$m + \left(n + \frac{1}{2}\right)\kappa i$

2.2. Значения тэта-функций $\vartheta_n(v)$ и их производных $\vartheta'_n(v)$ по v при $v=0$ обозначаются без указания аргумента: $\vartheta_n(0) = \vartheta_n$; $\vartheta'_n(0) = \vartheta'_n$.

Имеют место формулы:

$$\vartheta'_1 = 2\pi q^{\frac{1}{4}} (1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \dots), \quad \vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots,$$

$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots), \quad \vartheta_4 = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots,$$

$$\vartheta_2^4 = \vartheta_4^4 = \vartheta_3^4, \quad \frac{\vartheta_2'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}, \quad \vartheta_1' = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4.$$

$$-\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \pi^2 \frac{1 - 3^3 q^2 + 5^3 q^6 - \dots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots}, \quad -\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = 8\pi^2 \frac{q + 4q^4 + 9q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots},$$

$$-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \pi^2 \frac{1 + 3^2 q^2 + 5^2 q^6 + \dots}{1 + q^2 + q^6 + \dots}, \quad +\frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4} = 8\pi^2 \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}.$$

3. Функциональные уравнения

3.1. Тэта-функции удовлетворяют соотношениям симметрии

$$\begin{aligned}\vartheta_1(-v) &= -\vartheta_1(v), \\ \vartheta_n(-v) &= \vartheta_n(v)\end{aligned} \quad (n=2, 3, 4).$$

3.2. Тэта-функции являются периодическими функциями: для $\vartheta_1(v)$ и $\vartheta_2(v)$ период равен 2, для $\vartheta_3(v)$ и $\vartheta_4(v)$ равен 1. Если обозначить

$$\frac{1}{M} = q^{\frac{1}{2}} e^{\pi v i}, \quad \frac{1}{N} = q e^{2\pi v i},$$

то следующая таблица показывает изменение ϑ -функций при сдвигах аргумента v и их связь между собой:

v_1	$\vartheta_3(v_1)$	$\vartheta_4(v_1)$	$\vartheta_2(v_1)$	$\vartheta_1(v_1)$
$-v$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$	$\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_1(v)$
$v \pm \frac{1}{2}$	$\vartheta_4(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\mp \vartheta_1(v)$	$\pm \vartheta_2(v)$
$v + \frac{i\kappa}{2}$	$M\vartheta_2(v)$	$iM\vartheta_1(v)$	$M\vartheta_3(v)$	$iM\vartheta_4(v)$
$v + \frac{1}{2} + \frac{i\kappa}{2}$	$iM\vartheta_1(v)$	$M\vartheta_2(v)$	$-iM\vartheta_4(v)$	$M\vartheta_3(v)$
$v \pm 1$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$	$-\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_1(v)$
$v + i\kappa$	$N\vartheta_3(v)$	$-N\vartheta_4(v)$	$N\vartheta_2(v)$	$-N\vartheta_1(v)$
$v - 1 - i\kappa$	$N\vartheta_3(v)$	$-N\vartheta_4(v)$	$-N\vartheta_2(v)$	$-N\vartheta_1(v)$

3.3. Обозначим для краткости

$$F = \kappa^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi v^2}{\kappa}}, \quad G = \kappa^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi v^2}{\kappa} + i}.$$

Тэта-функции как функции v и κ следующим образом изменяются при переходе от одних значений аргументов v, κ к другим:

v_1	κ	$\vartheta_3(v_1, \kappa_1)$	$\vartheta_4(v_1, \kappa_1)$	$\vartheta_2(v_1, \kappa_1)$	$\vartheta_1(v_1, \kappa_1)$
$\frac{v}{\kappa i}$	$\frac{1}{\kappa}$	$F\vartheta_3(v, \kappa)$	$F\vartheta_2(v, \kappa)$	$F\vartheta_4(v, \kappa)$	$-iF\vartheta_1(v, \kappa)$
$\frac{v}{1-i\kappa}$	$\frac{\kappa}{1-i\kappa}$	$G\vartheta_2(v, \kappa)$	$\sqrt{i} G\vartheta_4(v, \kappa)$	$G\vartheta_3(v, \kappa)$	$\sqrt{i} G\vartheta_1(v, \kappa)$
v	$1+i\kappa$	$\vartheta_4(v, \kappa)$	$\vartheta_3(v, \kappa)$	$\sqrt{i} \vartheta_2(v, \kappa)$	$\sqrt{i} \vartheta_1(v, \kappa)$

3.4. Тэта-функции являются решениями дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 \vartheta_n(v, \kappa)}{\partial v^2} = 4\pi \frac{\partial \vartheta_n(v, \kappa)}{\partial \kappa}.$$

4. Связь с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами.

Модулярная функция

4.1. Между модулем k и отношением $\frac{K'(k)}{K(k)}$ соответствующих нормальных форм полных эллиптических интегралов существует соотношение, которое с помощью значений тэта-функций в нуле записывается в виде

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_4^4}, \quad \text{где} \quad q = e^{-\pi\kappa}, \quad \kappa = \frac{K'}{K}.$$

Функцию $k^2 = \lambda(\tau)$, получаемую после подстановки $\tau = i\kappa = \tau_1 + i\tau_2$ в правую часть, называют *эллиптической модулярной функцией* (рис. 72—74). Для $|q| \ll 1$ получим:

$$k^2 \approx 16q \frac{1 + 4q^2}{1 + 8q + 24q^2}.$$

В таблице 33 тэта-функции $\vartheta_n(2\sigma)$ и их производные даны прямо как функции α ($k = \sin \alpha$) (рис. 75—78).

Первые члены рядов, определяющих ϑ -функции, дают приближенные значения, которые могут быть вычислены с помощью таблицы 35 и таблицы тригонометрических функций. Соответствующие поправки даны во вспомогательной таблице 34, которая допускает линейную интерполяцию.

Вычисление q для данного модуля k (рис. 79, таблица 35) может быть произведено посредством соответствующих нормальных форм интегралов K, K' (таблицы 29, 30). Соответствующие значения q получаются и непосредственно из ряда

$$q = 2e + 2e^5 + 15e^9 + 150e^{13} + 1707e^{17} + \dots,$$

$$2e = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \quad (k = \sin \alpha, \quad k' = \cos \alpha).$$

4.2. Нормальные формы полных эллиптических интегралов могут быть представлены через значения тэта-функций в нуле, причем величина q для данного модуля k должна быть вычислена согласно 4.1. Для $k^2 < \frac{1}{2}$ приближенно

$$\frac{2}{\pi} K = \vartheta_2^2 \approx 1 + 4q, \quad \frac{2}{\pi} kK = \vartheta_2^2 \approx 4\sqrt{q}, \quad \frac{2}{\pi} k'K = \vartheta_4^2 \approx 1 - 4q,$$

$$\frac{2}{\pi} E = -\frac{1}{\pi^2} \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2^2} \frac{1}{\vartheta_2^2} = \frac{1 + 9q^2 + 25q^4 + \dots}{(1 + q^2 + q^4 + \dots)(1 + 2q + 2q^4 + \dots)^2} \approx 1 - 4q,$$

$$\frac{4}{\pi} D = \frac{2}{\pi^2} \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_4^4} \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4^2} = \frac{(1 + 2q + 2q^4 + \dots)^2 (1 - 4q^2 + 9q^4 - \dots)}{(1 + q^2 + q^4 + \dots)^4 (1 - 2q + 2q^4 - \dots)} \approx 1 + 6q.$$

Если $k^2 > \frac{1}{2}$, то найдем q для модуля k' и положим $-\ln q = \Lambda$. Тогда при соответствующих значениях тэта-функций

$$K = \frac{\Lambda}{2} \vartheta_2^2,$$

$$E = \frac{1}{\vartheta_2^2} \left(1 + \frac{\Lambda}{2} \frac{1}{\pi^2} \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4^2} \right),$$

$$D = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_4^4} \left[-1 + \frac{\Lambda}{2} \left(\vartheta_2^4 - \frac{1}{\pi^2} \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4^2} \right) \right].$$

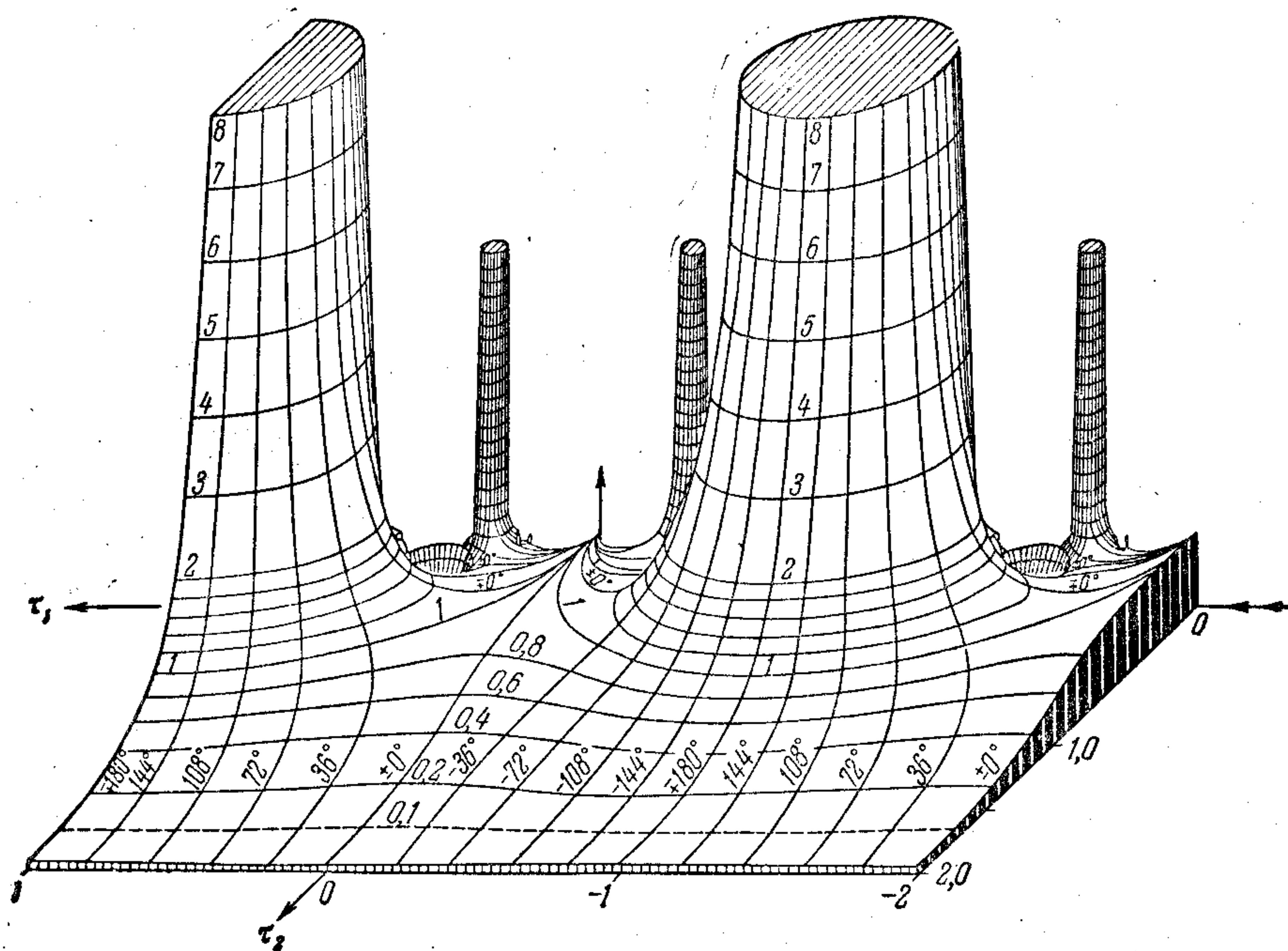
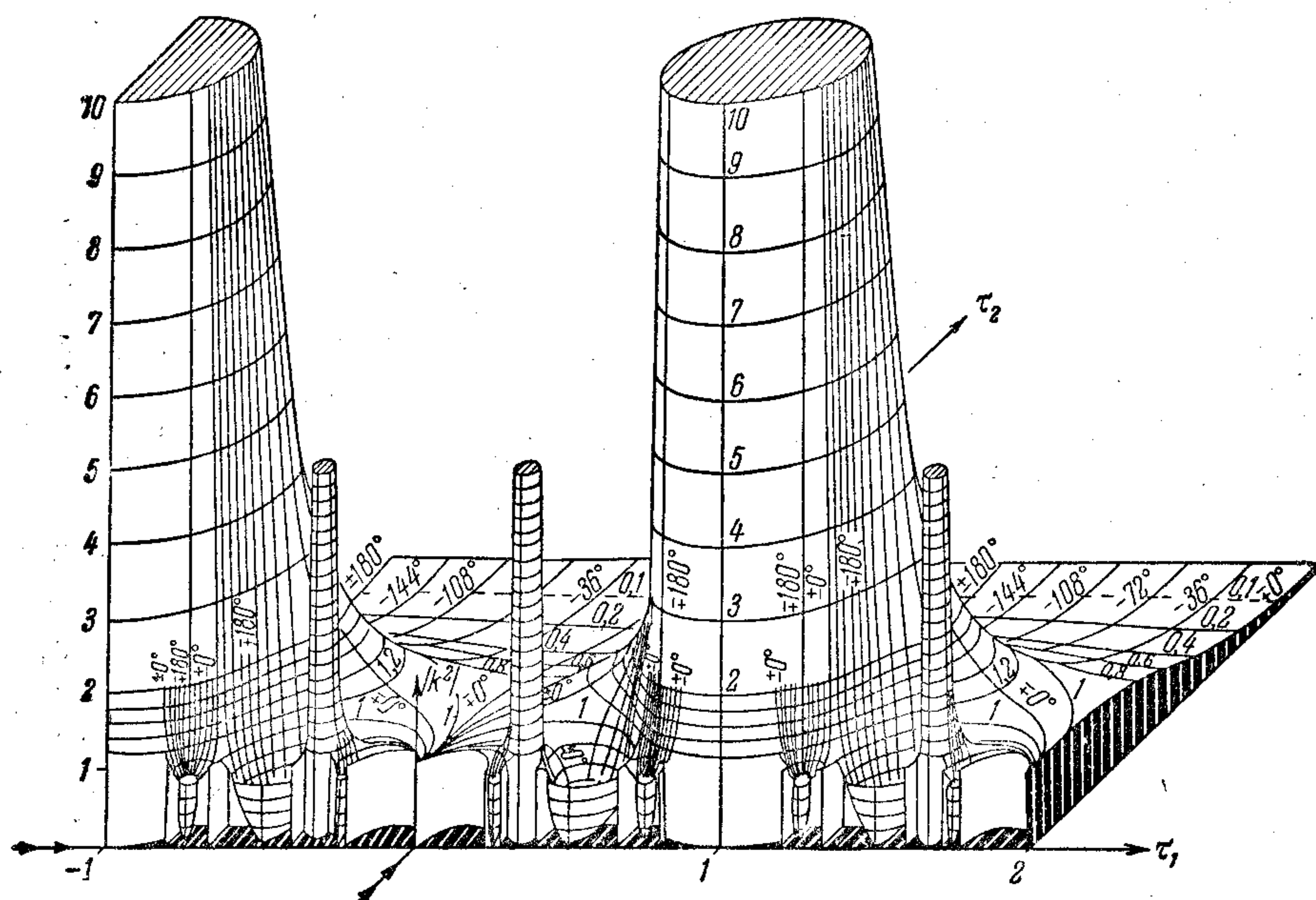


Рис. 72 и 73. Рельеф эллиптической модулярной функции $k^2 = \lambda(\tau)$.

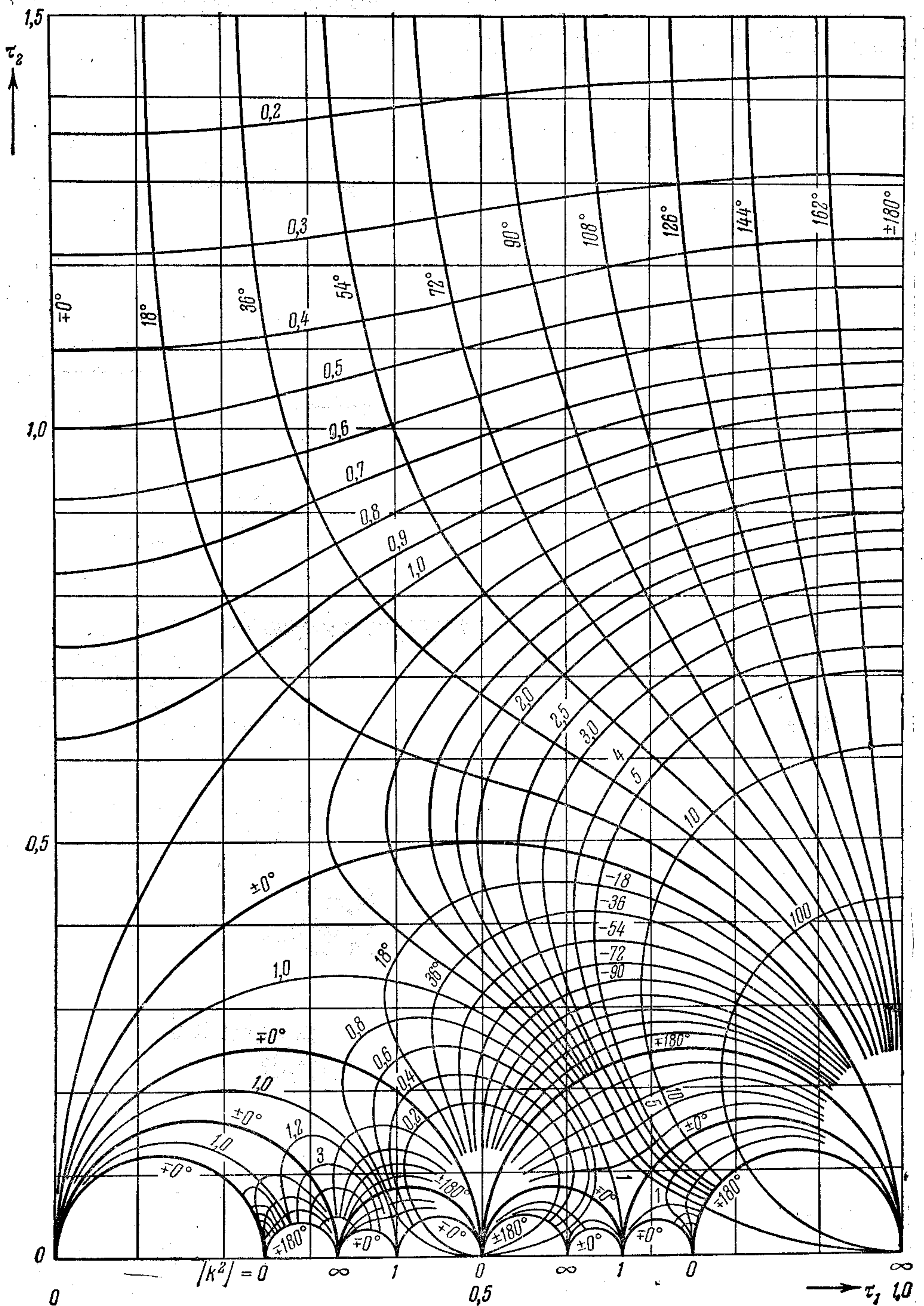
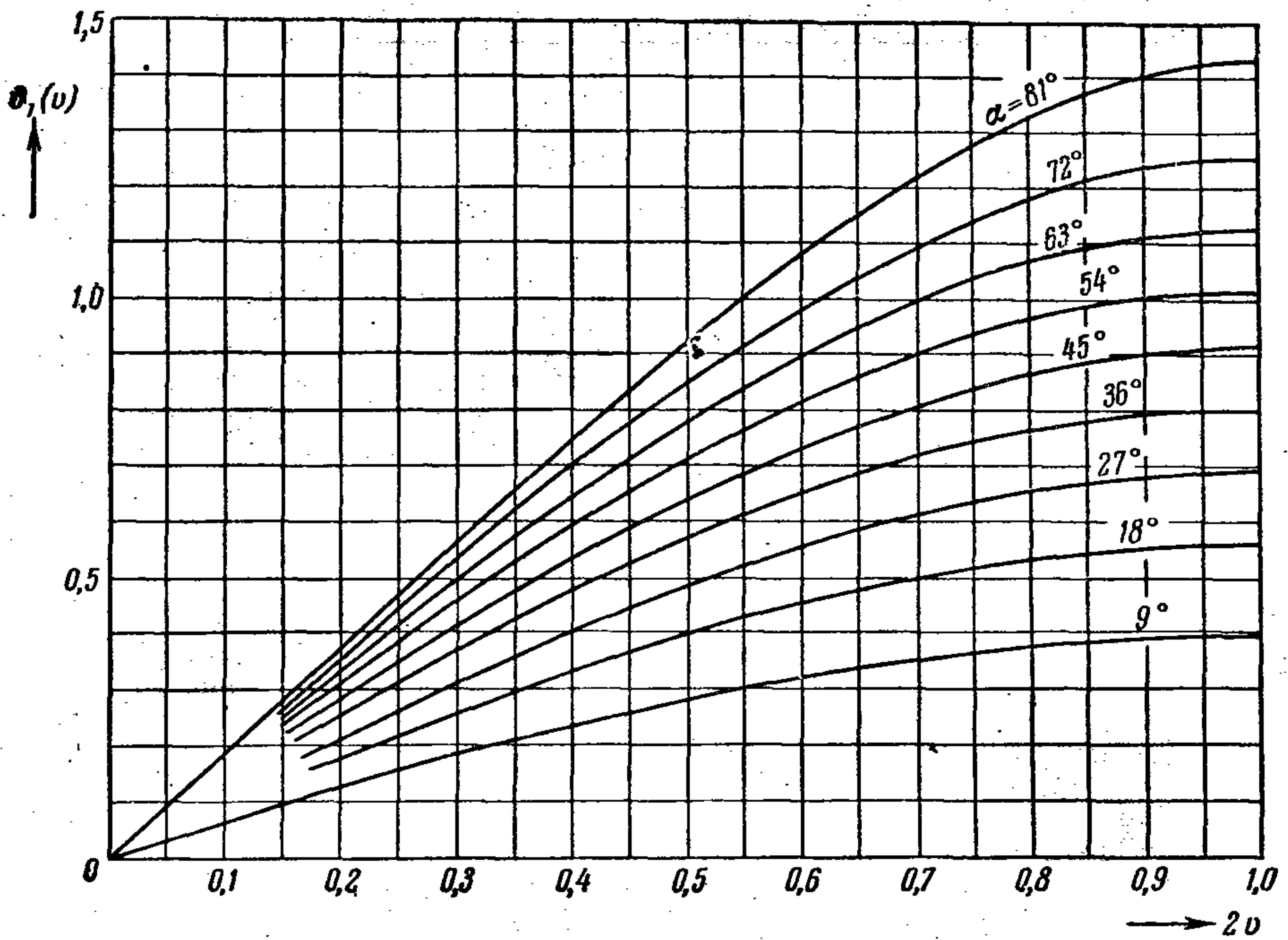
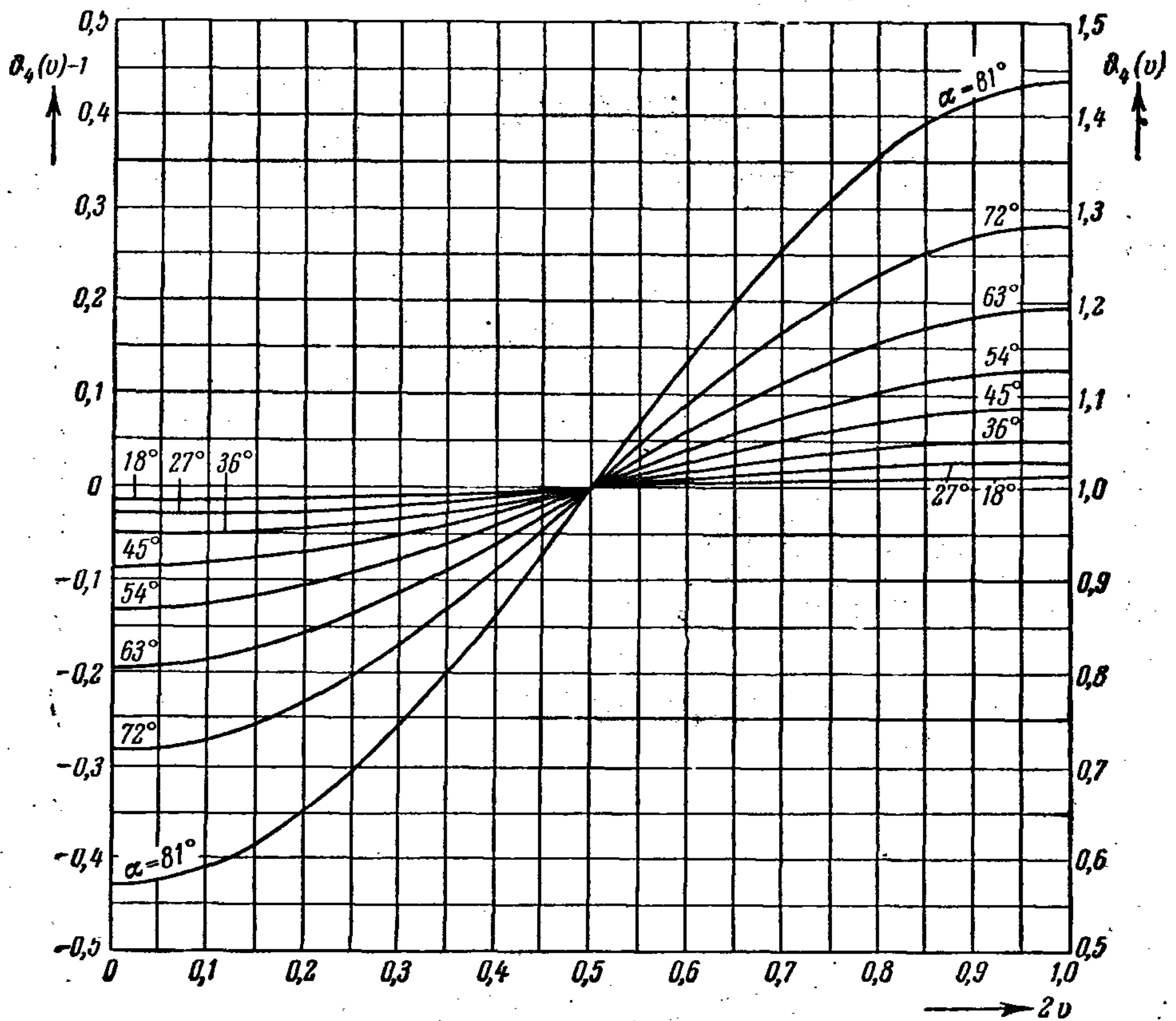


Рис. 74. Карта горизонталей рельефа эллиптической модулярной функции $k^2 = \lambda(\tau)$.

Рис. 75. Функции $\vartheta_1(v) = \vartheta_2(v_1)$, $2v + 2v_1 = 1$.Рис. 76. Функции $\vartheta_4(v) = \vartheta_2(v_1)$, $2v + 2v_1 = 1$.

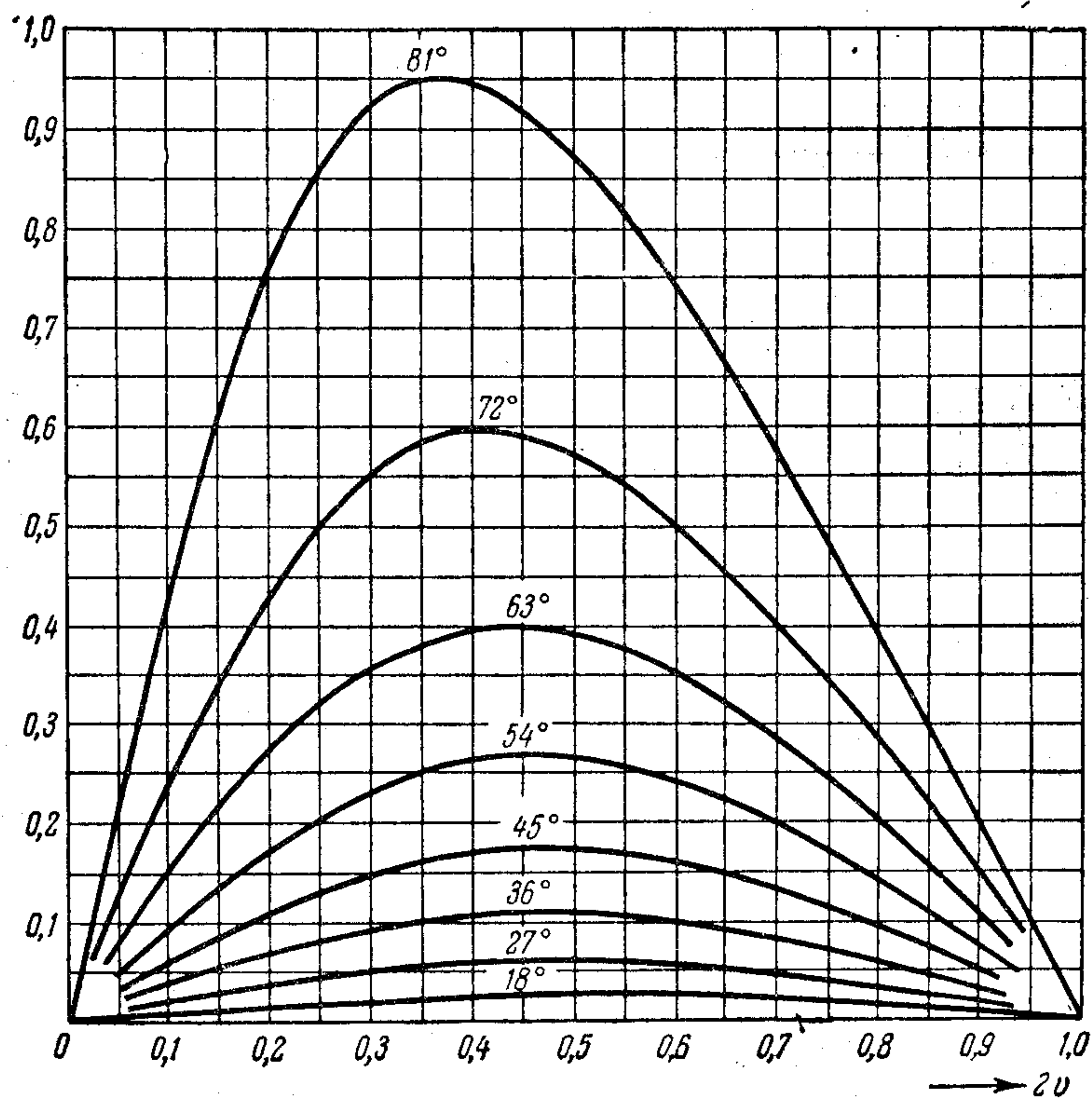


Рис. 77. Функции $\frac{1}{\pi} \frac{d \ln \vartheta_1(v)}{dv} = -\frac{1}{\pi} \frac{d \ln \vartheta_2(v)}{dv_1}$, $2v + 2v_1 = 1$.

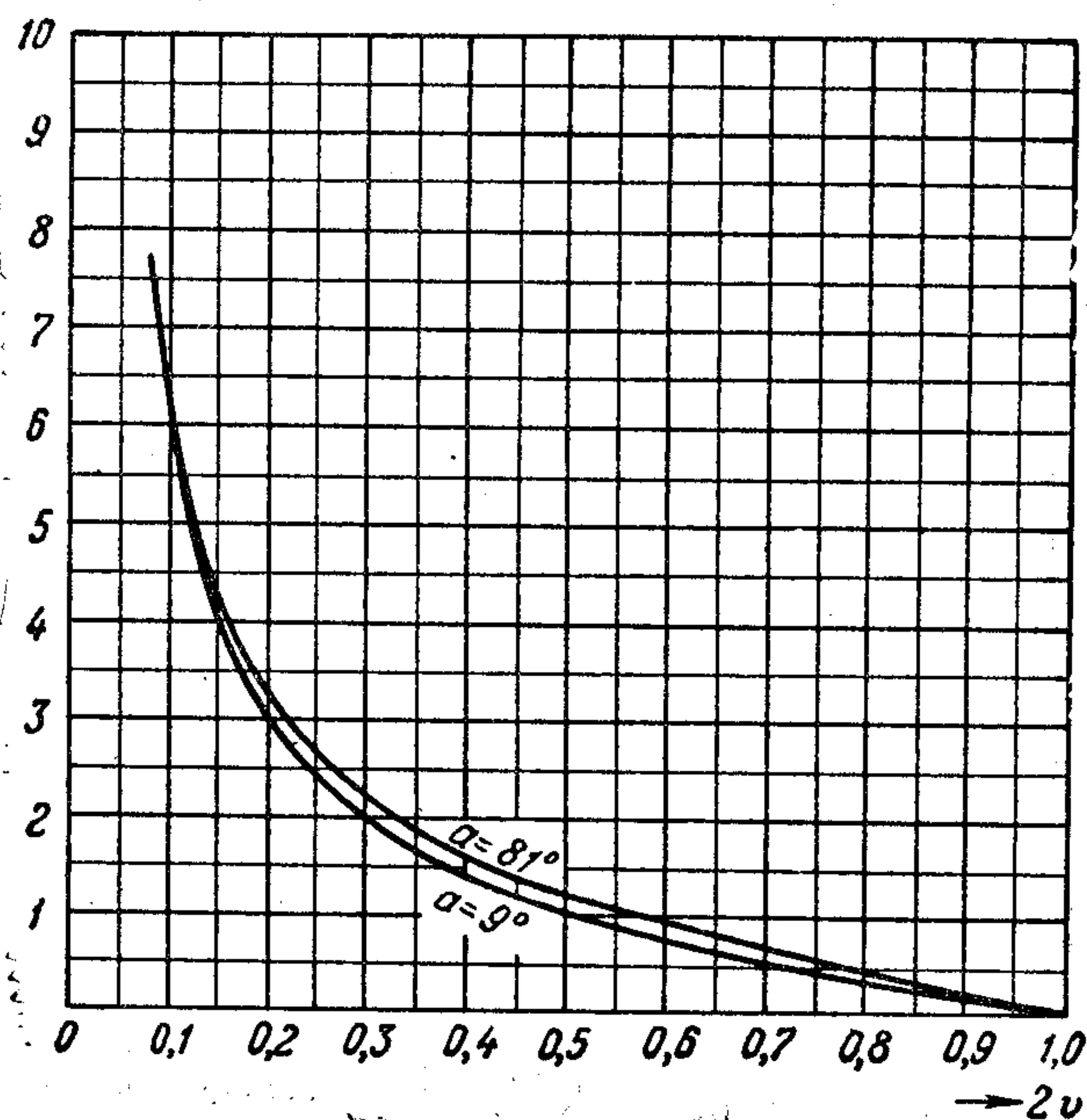


Рис. 78. Функции $\frac{1}{\pi} \frac{d \ln \vartheta_4(v)}{dv} = -\frac{1}{\pi} \frac{d \ln \vartheta_3(v_1)}{dv_1}$, $2v + 2v_1 = 1$.

Таблица 33. Тета-функции и их производные

$2v$	$\alpha = 0^\circ$	9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	$2v_1$	
0,0	1,0000	0,9970	0,9874	0,9712	0,9471	0,9135	0,8680	0,8052	0,7152	0,5694	1,0	$\vartheta_3(v) = \vartheta_3(v_1)$
1	1,0000	0,9970	0,9881	0,9725	0,9497	0,9178	0,8744	0,8147	0,7290	0,5898	0,9	
2	1,0000	0,9975	0,9899	0,9766	0,9572	0,9300	0,8931	0,8424	0,7691	0,6494	0,8	
3	1,0000	0,9982	0,9927	0,9831	0,9689	0,9493	0,9223	0,8853	0,8318	0,7429	0,7	
4	1,0000	0,9991	0,9961	0,9911	0,9836	0,9732	0,9592	0,9397	0,9110	0,8619	0,6	
0,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9956	0,5	
6	1,0000	1,001	1,004	1,009	1,016	1,027	1,041	1,060	1,088	1,131	0,4	
7	1,0000	1,002	1,007	1,017	1,031	1,051	1,078	1,115	1,168	1,254	0,3	
8	1,0000	1,003	1,010	1,023	1,043	1,070	1,107	1,158	1,231	1,353	0,2	
9	1,0000	1,003	1,012	1,028	1,050	1,082	1,126	1,186	1,272	1,417	0,1	
1,0	1,0000	1,003	1,013	1,029	1,053	1,086	1,132	1,195	1,286	1,439	0,0	
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	$\vartheta_1(v) = \vartheta_2(v_1)$
1	0,0000	0,06206	0,08804	0,1084	0,1260	0,1419	0,1566	0,1700	0,1810	0,1843	0,9	
2	0,0000	0,1226	0,1739	0,2140	0,2488	0,2804	0,3098	0,3368	0,3597	0,3698	0,8	
3	0,0000	0,1801	0,2555	0,3145	0,3657	0,4123	0,4560	0,4968	0,5335	0,5563	0,7	
4	0,0000	0,2332	0,3308	0,4073	0,4736	0,5343	0,5917	0,6467	0,6989	0,7413	0,6	
0,5	0,0000	0,2805	0,3980	0,4900	0,5700	0,6436	0,7139	0,7827	0,8517	0,9200	0,5	
6	0,0000	0,3210	0,4553	0,5607	0,6524	0,7372	0,8188	0,9007	0,9870	1,085	0,4	
7	0,0000	0,3535	0,5015	0,6176	0,7188	0,8129	0,9041	0,9972	1,100	1,227	0,3	
8	0,0000	0,3773	0,5353	0,6592	0,7675	0,8682	0,9669	1,069	1,184	1,337	0,2	
9	0,0000	0,3918	0,5559	0,6847	0,7973	0,9022	1,005	1,113	1,237	1,407	0,1	
1,0	0,0000	0,3967	0,5629	0,6933	0,8074	0,9135	1,018	1,128	1,255	1,431	0,0	
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	$\frac{\pi v_1}{\pi v} = \frac{\ln \vartheta_3(v)}{\ln \vartheta_3(v_1)}$
1	0,0000	0,001920	0,007845	0,01833	0,03444	0,05806	0,09324	0,1473	0,2401	0,4380	0,9	
2	0,0000	0,003650	0,01490	0,03471	0,06502	0,1092	0,1737	0,2712	0,4333	0,7614	0,8	
3	0,0000	0,005020	0,02045	0,04747	0,08839	0,1473	0,2315	0,3555	0,5527	0,9247	0,7	
4	0,0000	0,005897	0,02396	0,05536	0,1024	0,1689	0,2613	0,3942	0,5947	0,9469	0,6	
0,5	0,0000	0,006194	0,02509	0,05769	0,1059	0,1729	0,2642	0,3899	0,5719	0,8742	0,5	
6	0,0000	0,005883	0,02377	0,05438	0,09906	0,1601	0,2415	0,3502	0,5011	0,7411	0,4	
7	0,0000	0,005002	0,02015	0,04589	0,08306	0,1331	0,1984	0,2836	0,3980	0,5748	0,3	
8	0,0000	0,003632	0,01460	0,03314	0,05968	0,09500	0,1404	0,1985	0,2748	0,3906	0,2	
9	0,0000	0,001909	0,007661	0,01735	0,03115	0,04945	0,07260	0,1020	0,1400	0,1972	0,1	
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	
0,0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1,0	$\frac{\pi v_1}{\pi v} = \frac{\ln \vartheta_2(v)}{\ln \vartheta_2(v_1)}$
1	6,3138	6,314	6,314	6,314	6,314	6,316	6,320	6,326	6,340	6,384	0,9	
2	3,0777	3,078	3,078	3,078	3,080	3,082	3,088	3,100	3,128	3,218	0,8	
3	1,9626	1,962	1,963	1,963	1,965	1,969	1,977	1,994	2,031	2,132	0,7	
4	1,3764	1,376	1,377	1,377	1,379	1,384	1,393	1,413	1,457	1,570	0,6	
0,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,001	1,003	1,007	1,017	1,038	1,083	1,198	0,5	
6	0,7265	0,7266	0,7268	0,7273	0,7293	0,7337	0,7432	0,7628	0,8048	0,9099	0,4	
7	0,5095	0,5096	0,5097	0,5102	0,5118	0,5156	0,5236	0,5403	0,5753	0,6619	0,3	
8	0,3249	0,3249	0,3250	0,3254	0,3266	0,3293	0,3351	0,3473	0,3723	0,4336	0,2	
9	0,1584	0,1584	0,1584	0,1586	0,1593	0,1607	0,1638	0,1700	0,1831	0,2148	0,1	
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	
$2v$	$\alpha = 0^\circ$	9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	$2v_1$	

Таблица 34. Вспомогательная таблица для тэта-функций

$$\vartheta_4^*(v) = \vartheta_3^*(v_1)$$

$2v$	$\alpha=63^\circ$	72°	75°	78°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	87.5°	88°	88.5°	89°	$2v_1$
0,00	+0,2	+0,8	+1,4	+2,5	+4,5	+5,6	+7,0	+8,8	+11,5	+15,2	+21	+25	+31	+39	+52	1,00
05	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	29	37	50	0,95
10	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,3	17	20	25	32	42	90
15	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,7	9,0	12	15	18	23	31	85
20	+0,1	+0,3	+0,4	+0,8	+1,4	+1,7	+2,2	+2,7	+3,5	+4,7	+7	+8	+10	+12	+17	80
0,25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0	0	0	0	0,75
30	-0,1	-0,3	-0,4	-0,8	-1,4	-1,7	-2,1	-2,7	-3,5	-4,7	-6	-8	-9	-12	-16	70
35	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,7	8,9	12	15	18	23	31	65
40	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,3	17	20	25	32	42	60
45	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	30	37	50	55
0,50	-0,2	-0,8	-1,4	-2,5	-4,5	-5,6	-7,0	-8,9	-11,5	-15,2	-21	-25	-31	-39	-53	0,50
55	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	30	38	51	45
60	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,4	17	21	25	32	43	40
65	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,8	9,0	12	15	18	23	32	35
70	-0,1	-0,3	-0,4	-0,8	-1,4	-1,7	-2,2	-2,7	-3,6	-4,7	-7	-8	-10	-12	-17	30
0,75	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0	0	0	0	0,25
80	+0,1	+0,3	+0,4	+0,8	+1,4	+1,7	+2,2	+2,7	+3,5	+4,7	+6	+8	+10	+12	+16	20
85	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,7	9,0	12	15	18	23	31	15
90	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,4	17	21	25	32	43	10
95	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	30	38	51	05
1,00	+0,2	+0,8	+1,4	+2,5	+4,5	+5,6	+7,0	+8,9	+11,5	+15,3	+21	+25	+31	+40	+53	0,00

$$\vartheta_1^*(v) = \vartheta_2^*(v_1)$$

$2v$	$\alpha=54^\circ$	63°	72°	75°	78°	81°	82°	83°	83.5°	84°	84.5°	85°	85.5°	86°	86.5°	87°	$2v_1$
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,00
05	-1	-2	-6	-8	-11	-15	-17	-19	-21	-22	-24	-25	-27	-30	-32	-35	0,95
10	2	5	11	15	21	29	33	37	40	43	46	49	53	58	63	69	90
15	3	7	16	22	30	42	47	54	57	61	66	71	76	83	90	99	85
20	4	9	20	27	37	52	59	67	71	76	82	88	95	103	112	123	80
0,25	-4	-10	-23	-31	-43	-60	-67	-76	-81	-87	-94	-101	-109	-118	-129	-141	0,75
30	4	10	25	33	46	64	72	82	87	93	100	108	117	126	138	151	70
35	4	11	25	34	46	64	73	82	88	94	101	109	118	128	140	153	65
40	4	10	24	32	44	61	69	79	84	90	97	104	113	122	134	147	60
45	4	9	21	29	39	55	62	71	76	81	87	94	101	110	120	132	55
0,50	-3	-8	-18	-24	-33	-46	-52	-59	-63	-67	-72	-78	-84	-92	-100	-110	0,50
55	2	6	13	18	24	34	38	44	47	50	54	58	63	68	75	82	45
60	-1	3	8	10	14	20	23	26	28	30	32	35	37	41	45	49	40
65	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-7	-8	-8	-9	-10	-11	-12	-14	35
70	+1	+2	+4	+5	+7	+10	+11	+13	+14	+15	+16	+17	+18	+19	+21	+23	30
0,75	+2	+4	+10	+13	+18	+25	+28	+32	+34	+36	+39	+42	+45	+49	+53	+58	0,25
80	3	6	15	20	27	38	43	49	52	56	60	64	70	76	83	91	20
85	3	8	19	26	35	49	56	63	67	72	78	84	90	98	107	118	15
90	4	9	22	30	41	58	65	74	79	85	91	98	106	115	126	139	10
95	4	10	24	33	45	63	71	81	86	93	99	107	116	126	138	152	05
1,00	+4	+11	+25	+34	+46	+65	+73	+83	+89	+95	+102	+110	+119	+130	+142	+156	0,00

$$\vartheta_1(v) = 2q^{1/4} \sin \pi v + 10^{-3} \vartheta_1^*(v).$$

$$\vartheta_2(v_1) = 2q^{1/4} \cos \pi v_1 + 10^{-3} \vartheta_2^*(v_1).$$

$$\vartheta_4(v) = 1 - 2q \cos 2\pi v + 10^{-3} \vartheta_4^*(v).$$

$$\vartheta_3(v_1) = 1 + 2q \cos 2\pi v_1 + 10^{-3} \vartheta_3^*(v_1).$$

Таблица 35. Функция $\ln q$

α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$
$0^{\circ}.0$	$-\infty$	$5^{\circ}.0$	$\overline{4}$, 6781	$10^{\circ}.0$	$\overline{3}$, 2818	$15^{\circ}.0$	$\overline{3}$, 6368	$20^{\circ}.0$	$\overline{3}$, 8907	$25^{\circ}.0$	$\overline{2}$, 0897
1	$\overline{7}$,2796	1	6953 + 172	1	2905 + 87	1	6427 + 59	1	8951 + 44	1	0933 + 36
2	$\overline{7}$,8817	2	7122 169	2	2991 86	2	6485 58	2	8995 44	2	0969 36
3	$\overline{6}$,2339	3	7288 166	3	3077 86	3	6542 57	3	9039 44	3	1004 35
4	$\overline{6}$,4838	4	7451 163	4	3161 84	4	6600 58	4	9083 44	4	1040 36
$0^{\circ}.5$	$\overline{6}$,6776 — 337	$5^{\circ}.5$	7610 + 157	$10^{\circ}.5$	3245 + 82	$15^{\circ}.5$	6657 + 56	$20^{\circ}.5$	9126 + 43	$25^{\circ}.5$	1075 + 35
6	$\overline{6}$,8359 237	6	7767 154	6	3327 82	6	6713 56	6	9169 43	6	1110 35
7	$\overline{6}$,9698 175	7	7921 151	7	3409 82	7	6769 56	7	9212 43	7	1145 35
8	$\overline{5}$,0858 134	8	8072 149	8	3491 80	8	6825 56	8	9255 43	8	1180 35
9	$\overline{5}$,1881 108	9	8221 146	9	3571 80	9	6881 55	9	9298 42	9	1215 35
$1^{\circ}.0$	$\overline{5}$,2797 — 86	$6^{\circ}.0$	8367 + 144	$11^{\circ}.0$	3651 + 79	$16^{\circ}.0$	6936 + 55	$21^{\circ}.0$	9340 + 42	$26^{\circ}.0$	1250 + 34
1	$\overline{5}$,3624 71	1	8511 142	1	3730 79	1	6991 54	1	9382 42	1	1284 35
2	$\overline{5}$,4380 60	2	8653 139	2	3809 77	2	7045 54	2	9424 42	2	1319 34
3	$\overline{5}$,5076 51	3	8792 137	3	3886 77	3	7099 54	3	9466 42	3	1353 34
4	$\overline{5}$,5719 44	4	8929 135	4	3963 77	4	7153 54	4	9508 41	4	1387 34
$1^{\circ}.5$	$\overline{5}$,6319 — 38	$6^{\circ}.5$	9064 + 133	$11^{\circ}.5$	4040 + 75	$16^{\circ}.5$	7207 + 53	$21^{\circ}.5$	9549 + 42	$26^{\circ}.5$	1421 + 34
6	$\overline{5}$,6879 34	6	9197 131	6	4115 75	6	7260 53	6	9591 41	6	1455 34
7	$\overline{5}$,7406 30	7	9328 129	7	4190 75	7	7313 53	7	9632 41	7	1489 34
8	$\overline{5}$,7903 27	8	9457 127	8	4265 74	8	7366 52	8	9673 40	8	1523 34
9	$\overline{5}$,8372 24	9	9584 125	9	4339 73	9	7418 52	9	9713 41	9	1557 33
$2^{\circ}.0$	$\overline{5}$,8818 — 22	$7^{\circ}.0$	9709 + 124	$12^{\circ}.0$	4412 + 73	$17^{\circ}.0$	7470 + 52	$22^{\circ}.0$	9754 + 40	$27^{\circ}.0$	1590 + 33
1	$\overline{5}$,9242 20	1	9833 121	1	4485 72	1	7522 51	1	9794 41	1	1623 34
2	$\overline{5}$,9646 18	2	9954 121	2	4557 71	2	7573 51	2	9835 40	2	1657 33
3	$\overline{4}$,0032 16	3	*0075 118	3	4628 71	3	7624 51	3	9875 40	3	1690 33
4	$\overline{4}$,0402 15	4	0193 117	4	4699 70	4	7675 51	4	9915 39	4	1723 33
$2^{\circ}.5$	$\overline{4}$,0757 — 14	$7^{\circ}.5$	0310 + 115	$12^{\circ}.5$	4769 + 70	$17^{\circ}.5$	7726 + 50	$22^{\circ}.5$	9954 + 40	$27^{\circ}.5$	1756 + 33
6	$\overline{4}$,1097 + 340	6	0425 114	6	4839 69	6	7776 50	6	9994 39	6	1789 32
7	$\overline{4}$,1425 328	7	0539 113	7	4908 69	7	7826 50	7	*0033 40	7	1821 33
8	$\overline{4}$,1741 316	8	0652 111	8	4977 68	8	7876 49	8	0073 39	8	1854 33
9	$\overline{4}$,1741 305	9	0763 109	9	5045 68	9	7925 49	9	0112 39	9	1887 32
$3^{\circ}.0$	$\overline{4}$,2046 295	$8^{\circ}.0$	0872 + 109	$13^{\circ}.0$	5113 + 67	$18^{\circ}.0$	7974 + 49	$23^{\circ}.0$	0151 + 38	$28^{\circ}.0$	1919 + 32
1	$\overline{4}$,2341 + 285	1	0981 106	1	5180 67	1	8023 49	1	0189 39	1	1951 33
2	$\overline{4}$,2626 276	2	1087 106	2	5247 66	2	8072 48	2	0228 38	2	1984 32
3	$\overline{4}$,2902 267	3	1193 105	3	5313 65	3	8120 49	3	0266 39	3	2016 32
4	$\overline{4}$,3169 259	4	1298 103	4	5378 66	4	8169 47	4	0305 38	4	2048 31
$3^{\circ}.5$	$\overline{4}$,3428 252	$8^{\circ}.5$	1401 + 102	$13^{\circ}.5$	5444 + 64	$18^{\circ}.5$	8216 + 48	$23^{\circ}.5$	0343 + 38	$28^{\circ}.5$	2079 + 32
6	$\overline{4}$,3680 + 245	6	1503 100	6	5508 65	6	8264 48	6	0381 38	6	2111 32
7	$\overline{4}$,3925 238	7	1603 100	7	5573 63	7	8312 47	7	0419 37	7	2143 32
8	$\overline{4}$,4163 232	8	1703 99	8	5636 64	8	8359 47	8	0456 38	8	2175 31
9	$\overline{4}$,4395 226	9	1862 97	9	5700 63	9	8406 46	9	0494 37	9	2206 31
$4^{\circ}.0$	$\overline{4}$,4621 220	$9^{\circ}.0$	1899 + 97	$14^{\circ}.0$	5763 + 62	$19^{\circ}.0$	8452 + 47	$24^{\circ}.0$	0531 + 37	$29^{\circ}.0$	2237 + 32
1	$\overline{4}$,4841 + 215	1	1996 95	1	5825 62	1	8499 46	1	0568 37	1	2269 31
2	$\overline{4}$,5056 209	2	2091 94	2	5887 62	2	8545 46	2	0605 37	2	2300 31
3	$\overline{4}$,5265 205	3	2185 93	3	5949 61	3	8591 46	3	0642 37	3	2331 31
4	$\overline{4}$,5470 200	4	2278 93	4	6010 61	4	8637 45	4	0679 37	4	2362 31
$4^{\circ}.5$	$\overline{4}$,5670 195	$9^{\circ}.5$	2371 + 91	$14^{\circ}.5$	6071 + 60	$19^{\circ}.5$	8682 + 46	$24^{\circ}.5$	0716 + 36	$29^{\circ}.5$	2393 + 31
6	$\overline{4}$,5865 + 191	6	2462 91	6	6131 60	6	8728 45	6	0752 37	6	2424 30
7	$\overline{4}$,6056 187	7	2553 89	7	6191 59	7	8773 45	7	0789 36	7	2454 31
8	$\overline{4}$,6243 183	8	2642 89	8	6250 60	8	8818 44	8	0825 36	8	2485 31
9	$\overline{4}$,6426 180	9	2731 87	9	6310 58	9	8862 45	9	0861 36	9	2516 30
$5^{\circ}.0$	$\overline{4}$,6606 175	$10^{\circ}.0$	2818	$15^{\circ}.0$	6368	$20^{\circ}.0$	8907	$25^{\circ}.0$	0897	$30^{\circ}.0$	2546
			$\overline{3}$,		$\overline{3}$,		$\overline{3}$,		$\overline{2}$,		$\overline{2}$,

В немецком оригинале настоящей книги для натуральных логарифмов употребляется обозначение $\log q$ вместо принятого у нас $\ln q$. — Прим. ред.

Продолжение табл. 35

α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$
$30^{\circ},0$	$\overline{2}, 2546 + 30$	$35^{\circ},0$	$\overline{2}, 3965 + 26$	$40^{\circ},0$	$\overline{2}, 5220 + 24$	$45^{\circ},0$	$\overline{2}, 6356 + 22$	$50^{\circ},0$	$\overline{2}, 7405 + 20$	$55^{\circ},0$	$\overline{2}, 8391 + 19$
1	2576 31	1	3991 27	1	5244 23	1	6378 22	1	7425 21	1	8410 20
2	2607 30	2	4018 26	2	5267 24	2	6400 21	2	7446 20	2	8430 19
3	2637 30	3	4044 26	3	5291 24	3	6421 22	3	7466 20	3	8449 19
4	2667 30	4	4070 27	4	5315 23	4	6443 22	4	7486 20	4	8468 19
$30^{\circ},5$	$\overline{2}, 2697 + 30$	$35^{\circ},5$	$\overline{2}, 4097 + 26$	$40^{\circ},5$	$\overline{2}, 5338 + 24$	$45^{\circ},5$	$\overline{2}, 6465 + 21$	$50^{\circ},5$	$\overline{2}, 7506 + 20$	$55^{\circ},5$	$\overline{2}, 8487 + 19$
6	2727 30	6	4123 26	6	5362 23	6	6486 22	6	7526 21	6	8506 19
7	2757 29	7	4149 26	7	5385 24	7	6508 21	7	7547 20	7	8525 19
8	2786 30	8	4175 26	8	5409 23	8	6529 22	8	7567 20	8	8544 20
9	2816 30	9	4201 26	9	5432 24	9	6551 21	9	7587 20	9	8564 19
$31^{\circ},0$	$\overline{2}, 2846 + 29$	$36^{\circ},0$	$\overline{2}, 4227 + 26$	$41^{\circ},0$	$\overline{2}, 5456 + 23$	$46^{\circ},0$	$\overline{2}, 6572 + 22$	$51^{\circ},0$	$\overline{2}, 7607 + 20$	$56^{\circ},0$	$\overline{2}, 8583 + 19$
1	2875 29	1	4253 26	1	5479 23	1	6594 21	1	7627 20	1	8602 19
2	2904 30	2	4279 26	2	5502 23	2	6615 21	2	7647 20	2	8621 19
3	2934 29	3	4305 25	3	5525 24	3	6636 22	3	7667 20	3	8640 19
4	2963 29	4	4330 26	4	5549 23	4	6658 21	4	7687 20	4	8659 19
$31^{\circ},5$	$\overline{2}, 2992 + 29$	$36^{\circ},5$	$\overline{2}, 4356 + 26$	$41^{\circ},5$	$\overline{2}, 5572 + 23$	$46^{\circ},5$	$\overline{2}, 6679 + 21$	$51^{\circ},5$	$\overline{2}, 7707 + 20$	$56^{\circ},5$	$\overline{2}, 8678 + 19$
6	3021 29	6	4382 25	6	5595 23	6	6700 21	6	7727 19	6	8697 19
7	3050 29	7	4407 26	7	5618 23	7	6721 22	7	7746 20	7	8716 19
8	3079 29	8	4433 25	8	5641 23	8	6743 21	8	7766 20	8	8735 19
9	3108 29	9	4458 25	9	5664 23	9	6764 21	9	7786 20	9	8754 19
$32^{\circ},0$	$\overline{2}, 3137 + 28$	$37^{\circ},0$	$\overline{2}, 4483 + 26$	$42^{\circ},0$	$\overline{2}, 5687 + 23$	$47^{\circ},0$	$\overline{2}, 6785 + 21$	$52^{\circ},0$	$\overline{2}, 7806 + 20$	$57^{\circ},0$	$\overline{2}, 8773 + 18$
1	3165 29	1	4509 25	1	5710 22	1	6806 21	1	7826 20	1	8791 19
2	3194 28	2	4534 25	2	5732 23	2	6827 21	2	7846 19	2	8810 19
3	3222 29	3	4559 25	3	5755 23	3	6848 21	3	7865 20	3	8829 19
4	3251 28	4	4584 26	4	5778 23	4	6869 21	4	7885 20	4	8848 19
$32^{\circ},5$	$\overline{2}, 3279 + 29$	$37^{\circ},5$	$\overline{2}, 4610 + 25$	$42^{\circ},5$	$\overline{2}, 5801 + 22$	$47^{\circ},5$	$\overline{2}, 6890 + 21$	$52^{\circ},5$	$\overline{2}, 7905 + 19$	$57^{\circ},5$	$\overline{2}, 8867 + 19$
6	3308 28	6	4635 25	6	5823 23	6	6911 21	6	7924 20	6	8886 19
7	3336 28	7	4660 24	7	5846 23	7	6932 21	7	7944 20	7	8905 19
8	3364 28	8	4684 25	8	5869 22	8	6953 21	8	7964 19	8	8924 18
9	3392 28	9	4709 25	9	5891 23	9	6974 20	9	7983 20	9	8942 19
$33^{\circ},0$	$\overline{2}, 3420 + 28$	$38^{\circ},0$	$\overline{2}, 4734 + 25$	$43^{\circ},0$	$\overline{2}, 5914 + 22$	$48^{\circ},0$	$\overline{2}, 6994 + 21$	$53^{\circ},0$	$\overline{2}, 8003 + 20$	$58^{\circ},0$	$\overline{2}, 8961 + 19$
1	3448 28	1	4759 25	1	5936 23	1	7015 21	1	8023 19	1	8980 19
2	3476 27	2	4784 24	2	5959 22	2	7036 21	2	8042 20	2	8999 18
3	3503 28	3	4808 25	3	5981 22	3	7057 20	3	8062 19	3	9017 19
4	3531 28	4	4833 25	4	6003 23	4	7077 21	4	8081 20	4	9036 19
$33^{\circ},5$	$\overline{2}, 3559 + 27$	$38^{\circ},5$	$\overline{2}, 4858 + 24$	$43^{\circ},5$	$\overline{2}, 6026 + 22$	$48^{\circ},5$	$\overline{2}, 7098 + 21$	$53^{\circ},5$	$\overline{2}, 8101 + 19$	$58^{\circ},5$	$\overline{2}, 9055 + 19$
6	3586 28	6	4882 24	6	6048 22	6	7119 20	6	8120 20	6	9074 18
7	3614 27	7	4906 25	7	6070 23	7	7139 21	7	8140 19	7	9092 19
8	3641 27	8	4931 24	8	6093 22	8	7160 21	8	8159 20	8	9111 19
9	3668 28	9	4955 25	9	6115 22	9	7181 20	9	8179 19	9	9130 18
$34^{\circ},0$	$\overline{2}, 3696 + 27$	$39^{\circ},0$	$\overline{2}, 4980 + 24$	$44^{\circ},0$	$\overline{2}, 6137 + 22$	$49^{\circ},0$	$\overline{2}, 7201 + 21$	$54^{\circ},0$	$\overline{2}, 8198 + 19$	$59^{\circ},0$	$\overline{2}, 9148 + 19$
1	3723 27	1	5004 24	1	6159 22	1	7222 20	1	8217 20	1	9167 19
2	3750 27	2	5028 24	2	6181 22	2	7242 21	2	8237 19	2	9186 18
3	3777 27	3	5052 24	3	6203 22	3	7263 20	3	8256 19	3	9204 19
4	3804 27	4	5076 24	4	6225 22	4	7283 21	4	8275 20	4	9223 19
$34^{\circ},5$	$\overline{2}, 3831 + 27$	$39^{\circ},5$	$\overline{2}, 5100 + 24$	$44^{\circ},5$	$\overline{2}, 6247 + 22$	$49^{\circ},5$	$\overline{2}, 7304 + 20$	$54^{\circ},5$	$\overline{2}, 8295 + 19$	$59^{\circ},5$	$\overline{2}, 9242 + 18$
6	3858 27	6	5124 24	6	6269 22	6	7324 20	6	8314 19	6	9260 19
7	3885 26	7	5148 24	7	6291 22	7	7344 21	7	8333 20	7	9279 18
8	3911 27	8	5172 24	8	6313 21	8	7365 20	8	8353 19	8	9297 19
9	3938 27	9	5196 24	9	6334 22	9	7385 20	9	8372 19	9	9316 19
$35^{\circ},0$	$\overline{2}, 3965 + 26$	$40^{\circ},0$	$\overline{2}, 5220 + 24$	$45^{\circ},0$	$\overline{2}, 6356 + 22$	$50^{\circ},0$	$\overline{2}, 7405 + 20$	$55^{\circ},0$	$\overline{2}, 8391 + 19$	$60^{\circ},0$	$\overline{2}, 9335 + 18$

Продолжение табл. 35

α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$	α	$\log q$
$60^{\circ},0$	$\overline{2},$ 9335 + 18	$65^{\circ},0$	$\overline{1},$ 0255 + 19	$70^{\circ},0$	$\overline{1},$ 1175 + 18	$75^{\circ},0$	$\overline{1},$ 2123 + 19	$80^{\circ},0$	$\overline{1},$ 3152 + 22	$85^{\circ},0$	$\overline{1},$ 4396 + 30
1	9353 19	1	0274 18	1	1193 19	1	2142 20	1	3174 22	1	4426 29
2	9372 18	2	0292 18	2	1212 18	2	2162 19	2	3196 22	2	4455 30
3	9390 19	3	0310 19	3	1230 19	3	2181 20	3	3218 22	3	4485 31
4	9409 18	4	0329 18	4	1249 19	4	2201 20	4	3240 22	4	4516 31
$60^{\circ},5$	9427 + 19	$65^{\circ},5$	0347 + 18	$70^{\circ},5$	1268 + 18	$75^{\circ},5$	2221 + 19	$80^{\circ},5$	3262 + 23	$85^{\circ},5$	4547 + 31
6	9446 18	6	0365 19	6	1286 19	6	2240 20	6	3285 22	6	4578 31
7	9464 19	7	0384 18	7	1305 19	7	2260 20	7	3307 23	7	4609 32
8	9483 18	8	0402 18	8	1324 18	8	2280 20	8	3330 23	8	4641 32
9	9501 19	9	0420 18	9	1342 19	9	2300 20	9	3353 23	9	4673 32
$61^{\circ},0$	9520 + 18	$66^{\circ},0$	0438 + 19	$71^{\circ},0$	1361 + 19	$76^{\circ},0$	2320 + 20	$81^{\circ},0$	3376 + 22	$86^{\circ},0$	4705 + 33
1	9538 19	1	0457 18	1	1380 18	1	2340 19	1	3398 23	1	4738 34
2	9557 19	2	0475 18	2	1398 19	2	2359 20	2	3421 24	2	4772 34
3	9575 19	3	0493 19	3	1417 19	3	2379 20	3	3445 23	3	4806 34
4	9594 18	4	0512 18	4	1436 18	4	2399 20	4	3468 23	4	4840 35
$61^{\circ},5$	9612 + 19	$66^{\circ},5$	0530 + 18	$71^{\circ},5$	1454 + 19	$76^{\circ},5$	2419 + 20	$81^{\circ},5$	3491 + 23	$86^{\circ},5$	4875 + 35
6	9631 18	6	0548 19	6	1473 19	6	2439 21	6	3514 24	6	4910 36
7	9649 19	7	0567 18	7	1492 19	7	2460 20	7	3538 24	7	4946 36
8	9668 18	8	0585 18	8	1511 19	8	2480 20	8	3562 23	8	4982 37
9	9686 19	9	0603 19	9	1530 18	9	2500 20	9	3585 24	9	5019 38
$62^{\circ},0$	9705 + 18	$67^{\circ},0$	0622 + 18	$72^{\circ},0$	1548 + 19	$77^{\circ},0$	2520 + 20	$82^{\circ},0$	3609 + 24	$87^{\circ},0$	5057 + 38
1	9723 18	1	0640 19	1	1567 19	1	2540 21	1	3633 24	1	5095 39
2	9741 19	2	0659 18	2	1586 19	2	2561 20	2	3657 24	2	5134 40
3	9760 18	3	0677 18	3	1605 19	3	2581 21	3	3681 25	3	5174 41
4	9778 19	4	0695 19	4	1624 19	4	2602 20	4	3706 24	4	5215 41
$62^{\circ},5$	9797 + 18	$67^{\circ},5$	0714 + 18	$72^{\circ},5$	1643 + 19	$77^{\circ},5$	2622 + 21	$82^{\circ},5$	3730 + 25	$87^{\circ},5$	5256 + 43
6	9815 18	6	0732 18	6	1662 19	6	2643 20	6	3755 24	6	5299 43
7	9833 19	7	0750 19	7	1681 19	7	2663 21	7	3779 25	7	5342 45
8	9852 18	8	0769 18	8	1700 19	8	2684 20	8	3804 25	8	5387 46
9	9870 18	9	0787 18	9	1719 19	9	2704 21	9	3829 26	9	5433 47
$63^{\circ},0$	9888 + 19	$68^{\circ},0$	0805 + 19	$73^{\circ},0$	1738 + 19	$78^{\circ},0$	2725 + 21	$83^{\circ},0$	3855 + 25	$88^{\circ},0$	5480 + 48
1	9907 18	1	0824 18	1	1757 19	1	2746 21	1	3880 25	1	5528 50
2	9925 19	2	0842 19	2	1776 19	2	2767 20	2	3905 26	2	5578 52
3	9944 18	3	0861 18	3	1795 19	3	2787 21	3	3931 26	3	5630 53
4	9962 18	4	0879 19	4	1814 19	4	2808 21	4	3957 26	4	5683 55
$63^{\circ},5$	9980 + 19	$68^{\circ},5$	0898 + 18	$73^{\circ},5$	1833 + 19	$78^{\circ},5$	2829 + 21	$83^{\circ},5$	3983 + 26	$88^{\circ},5$	5738 + 53
6	9999 18	6	0916 18	6	1852 19	6	2850 21	6	4009 26	6	5796 60
7	*0017 18	7	0934 19	7	1871 19	7	2871 22	7	4035 27	7	5856 63
8	0035 19	8	0953 18	8	1890 20	8	2893 21	8	4062 26	8	5919 67
9	0054 18	9	0971 19	9	1910 19	9	2914 21	9	4088 27	9	5986 70
$64^{\circ},0$	0072 + 18	$69^{\circ},0$	0990 + 18	$74^{\circ},0$	1929 + 19	$79^{\circ},0$	2935 + 21	$84^{\circ},0$	4115 + 27	$89^{\circ},0$	6056 + 75
1	0090 19	1	1008 19	1	1948 19	1	2956 22	1	4142 28	1	6131 81
2	0109 18	2	1027 18	2	1967 20	2	2978 21	2	4170 27	2	6212 87
3	0127 18	3	1045 19	3	1987 19	3	2999 22	3	4197 28	3	6299 96
4	0145 19	4	1064 18	4	2006 20	4	3021 21	4	4225 28	4	6395 107
$64^{\circ},5$	0164 + 18	$69^{\circ},5$	1082 + 19	$74^{\circ},5$	2026 + 19	$79^{\circ},5$	3042 + 22	$84^{\circ},5$	4253 + 28	$89^{\circ},5$	6502
6	0182 18	6	1101 18	6	2045 19	6	3064 22	6	4281 28	6	6625
7	0200 19	7	1119 19	7	2064 20	7	3086 22	7	4309 29	7	6772
8	0219 18	8	1138 18	8	2084 19	8	3108 22	8	4338 29	8	6957
9	0237 18	9	1156 19	9	2103 20	9	3130 22	9	4367 29	9	7230
$65^{\circ},0$	0255 $\overline{1},$	$70^{\circ},0$	1175 $\overline{1},$	$75^{\circ},0$	2123 $\overline{1},$	$80^{\circ},0$	3152 $\overline{1},$	$85^{\circ},0$	4396 $\overline{1},$	$90^{\circ},0$	*0000 0.

4.3. Эллиптические функции Якоби могут быть выражены через тэта-функции:

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}$$

$$\left(v = \frac{u}{2K}, \quad q = e^{-\pi \kappa}, \quad \kappa = \frac{K'}{K} \right).$$

Если положить $u = u_1 + u_2 i$ и для действительных K, K' в первый раз взять

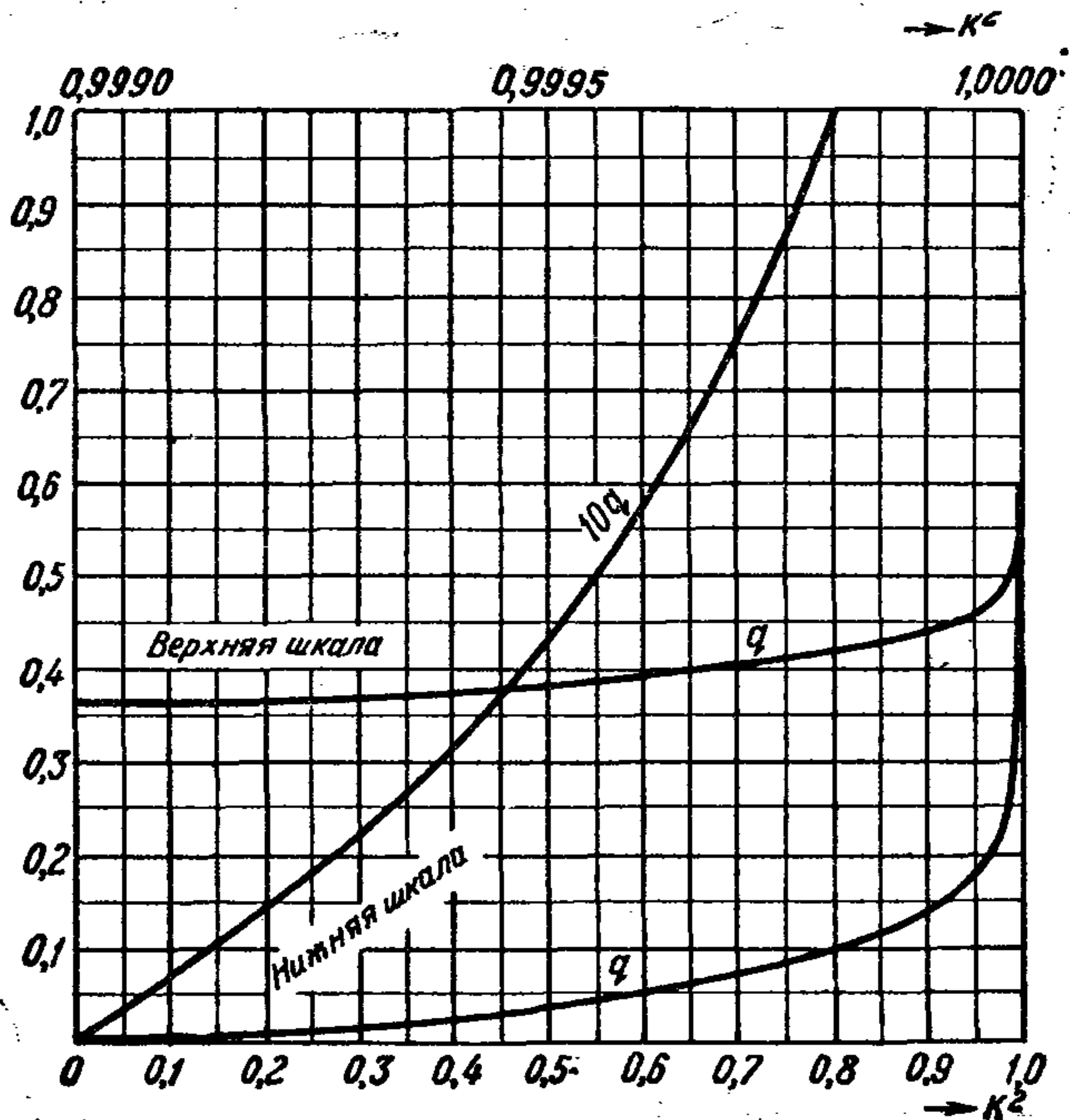


Рис. 79. Величина $q = e^{-\pi \kappa}$ как функция от $k^2 = \sin^2 \alpha$.

— $2K' < u_2 < 2K'$, а во второй раз $u_2 = 0$, то для малых q получим приближенно

$$\operatorname{sn} u \approx \sin y \frac{1 - 4q^2 \cos^2 y}{1 - 4q(1 - 2q) \cos^2 y} \approx \sin y \cdot (1 + 4q \cos^2 y),$$

$$\operatorname{cn} u \approx \cos y \frac{1 - 4q^2 \sin^2 y}{1 - 4q(1 + 2q) \sin^2 y} \approx \cos y \cdot (1 - 4q \sin^2 y) \quad \left(y = \frac{\pi u}{2K} \right),$$

$$\operatorname{dn} u \approx \frac{1 - 4q(1 - 2q) \sin^2 y}{1 + 4q(1 + 2q) \sin^2 y} \approx 1 - 8q \sin^2 y,$$

$$\operatorname{zn} u \approx \frac{1}{\vartheta_3^2} \frac{d \ln \vartheta_4}{dy} \approx \frac{4q \sin 2y}{1 + 2q(2 - \cos 2y) + 4q^2(1 - 2 \cos 2y)}.$$

XI. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

А. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

Полиномы Чебышева 1-го рода $T_n(z)$ и 2-го рода $U_n(z)$ определяют как*)

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) = \frac{1}{2} \left[(z + i\sqrt{1-z^2})^n + (z - i\sqrt{1-z^2})^n \right],$$

$$U_n(z) = \sin(n \arccos z) = \frac{1}{2i} \left[(z + i\sqrt{1-z^2})^n - (z - i\sqrt{1-z^2})^n \right].$$

Они являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - z \frac{dw}{dz} + n^2 z = 0.$$

Имеют место представления:

$$T_n(z) = z^n - \binom{n}{2} z^{n-2} (1-z^2) + \binom{n}{4} z^{n-4} (1-z^2)^2 - \dots =$$

$$= (-1)^n \frac{\sqrt{1-z^2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \frac{d^n}{dz^n} (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

$$U_n(z) = \sqrt{1-z^2} \left[\binom{n}{1} z^{n-1} - \binom{n}{3} z^{n-3} (1-z^2) + \binom{n}{5} z^{n-5} (1-z^2)^2 - \dots \right] =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Производящие функции:

$$\frac{1-t^2}{1-2tz+t^2} = T_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z) t^n,$$

$$\frac{1}{1-2tz+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(z) t^n.$$

Рекуррентные формулы:

$$T_{n+1}(z) - 2zT_n(z) + T_{n-1}(z) = 0,$$

$$U_{n+1}(z) - 2zU_n(z) + U_{n-1}(z) = 0.$$

Функция $U_n(z)$ обращается в нуль при $z = -1$ и $z = 1$. Кроме того, $T_n(z)$ и $U_n(z)$ имеют только действительные простые нули, которые все лежат в интервале $-1 < z < 1$.

*) Иногда употребляется и иная нормировка этих полиномов. — Прим. ред.

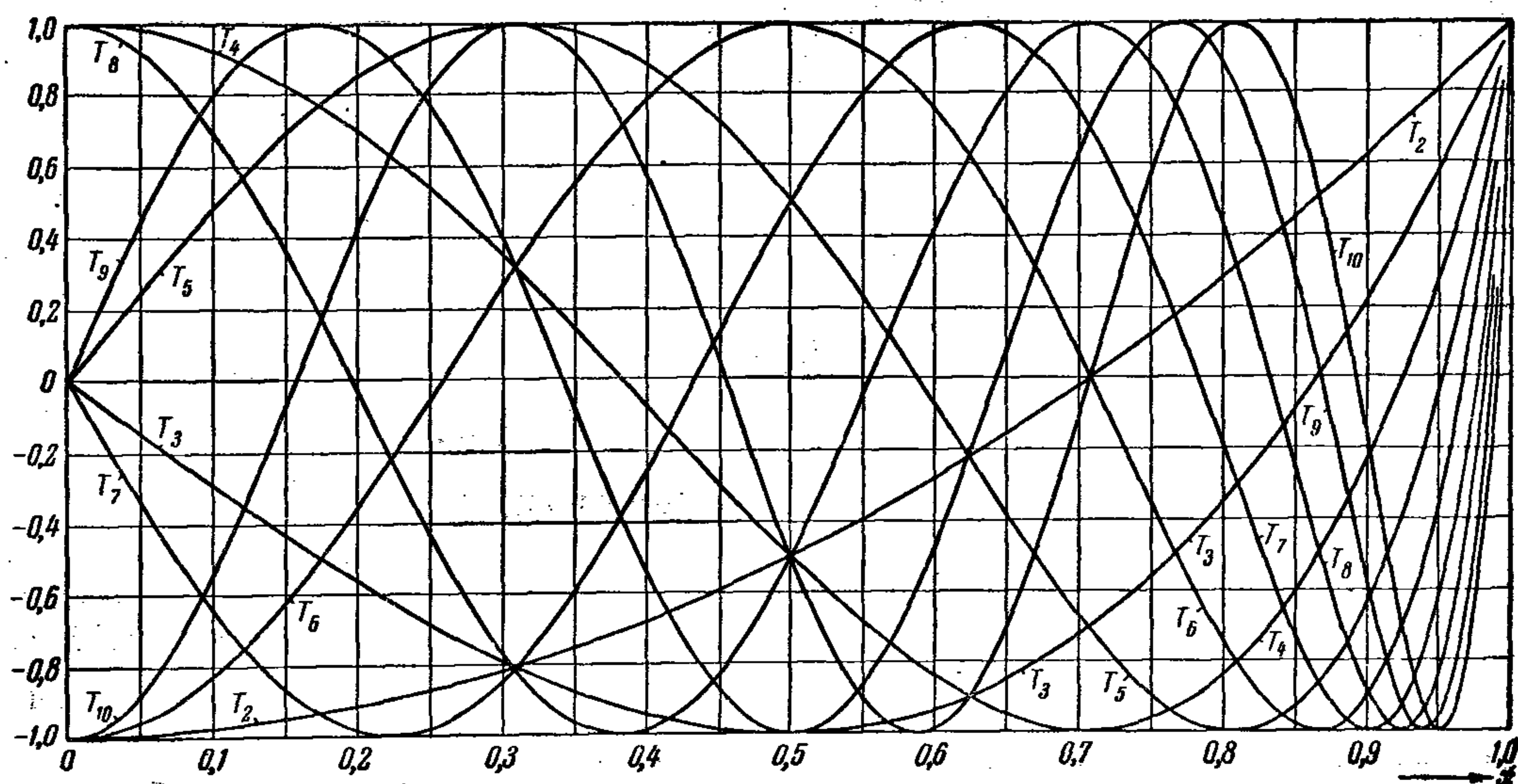


Рис. 80. Полиномы Чебышева $T_n(x)$, $n = 2, 3, \dots, 10$.

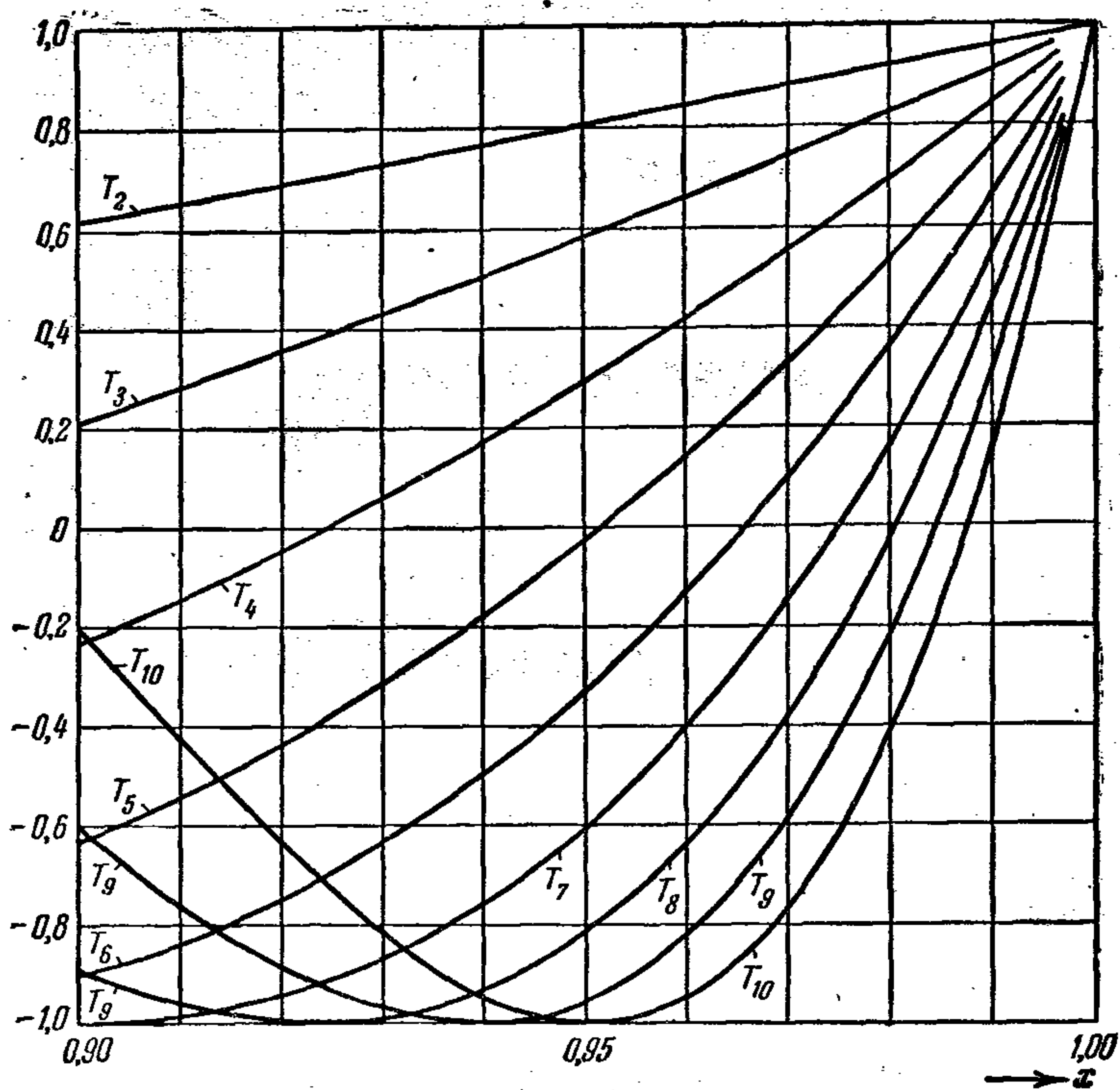


Рис. 81. Полиномы Чебышева $T_n(x)$, $n = 2, 3, \dots, 10$.

Частные значения:

$$T_n(1)=1, \quad T_n(-1)=(-1)^n, \quad T_{2n}(0)=(-1)^n, \quad T_{2n+1}(0)=0, \\ U_n(1)=0, \quad U_n(-1)=0, \quad U_{2n}(0)=0, \quad U_{2n+1}(0)=(-1)^n.$$

Функции $T_n(x)$ действительны при всех действительных значениях аргумента $z=x$ (рис. 80—82), а функции $U_n(x)$ —при $-1 \leq x \leq +1$. На этом отрезке выполняются соотношения ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m=n \neq 0, \\ \pi, & \text{если } m=n=0. \end{cases} \quad \int_{-1}^{+1} \frac{U_m(x) U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m=n \neq 0, \\ 0, & \text{если } m=n=0. \end{cases}$$

Справедливо важное равенство, следующее из определения:

$$T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta.$$

Среди всех полиномов n -й степени с единичным старшим коэффициентом полином $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ выделяется тем, что он меньше всего уклоняется от нуля на отрезке $-1 \leq x \leq +1$.

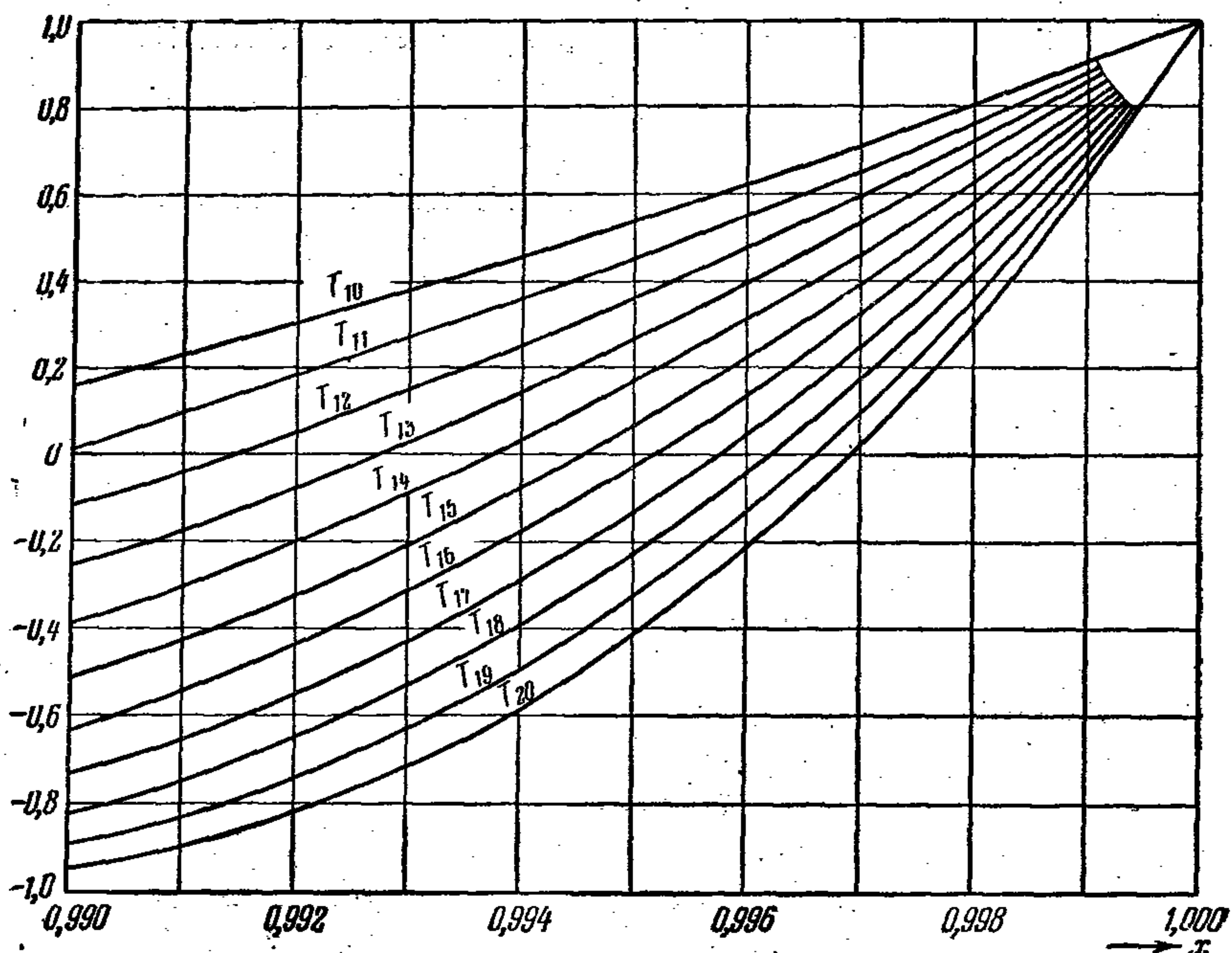


Рис. 82. Полиномы Чебышева $T_n(x)$, $n=10, 11, \dots, 20$.

Полиномы Чебышева низших степеней:

$$\begin{aligned} T_0(z) &= 1, & U_0(z) &= 0, \\ T_1(z) &= z, & U_1(z) &= \sqrt{1-z^2}, \\ T_2(z) &= 2z^2 - 1, & U_2(z) &= \sqrt{1-z^2} 2z, \\ T_3(z) &= 4z^3 - 3z, & U_3(z) &= \sqrt{1-z^2} [4z^2 - 1], \\ T_4(z) &= 8z^4 - 8z^2 + 1, & U_4(z) &= \sqrt{1-z^2} [8z^3 - 4z], \\ T_5(z) &= 16z^5 - 20z^3 + 5z, & U_5(z) &= \sqrt{1-z^2} [16z^4 - 12z^2 + 1]. \end{aligned}$$

В. ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА

Полиномы Лагерра являются решениями дифференциального уравнения

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha + 1 - z) \frac{dw}{dz} + n w = 0,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, а α — произвольное комплексное число. Именно *),

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{e^z z^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+\alpha}).$$

В частности, $L_n(z) = L_n^{(0)}(z) = 1 - \binom{n}{1} \frac{z}{1!} + \binom{n}{2} \frac{z^2}{2!} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \frac{z^n}{n!}$.

Производящие функции:

$$\frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(z) t^n, \quad e^{-zt} (1+t)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(z) t^n \quad (|t| < 1).$$

Рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} n L_n^{(\alpha)}(z) &= (2n + \alpha - 1 - z) L_{n-1}^{(\alpha)}(z) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^{(\alpha)}(z), \\ z \frac{dL_n^{(\alpha)}(z)}{dz} &= n L_n^{(\alpha)}(z) - (n + \alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(z) = -z L_{n-1}^{(\alpha+1)}(z). \end{aligned} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Теоремы сложения:

$$L_n^{(\alpha)}(z_1 + z_2) = e^{z_2} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} z_2^k L_{n-k}^{(\alpha+k)}(z_1),$$

$$L_n^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)}(z_1 + z_2 + \dots + z_m) = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} L_{k_1}^{(\alpha_1)}(z_1) L_{k_2}^{(\alpha_2)}(z_2) \dots L_{k_m}^{(\alpha_m)}(z_m).$$

Если параметр α действителен и $\alpha > -1$, то все нули полинома $L_n^{(\alpha)}(z)$ простые и являются действительными положительными числами.

Если параметр α действителен, то для действительных положительных значений аргумента $z = x$ функции $L_n^{(\alpha)}(x)$ будут действительными. Если, кроме того, $\alpha > -1$, то выполняется соотношение ортогональности:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \Gamma(1 + \alpha) \binom{n + \alpha}{n} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

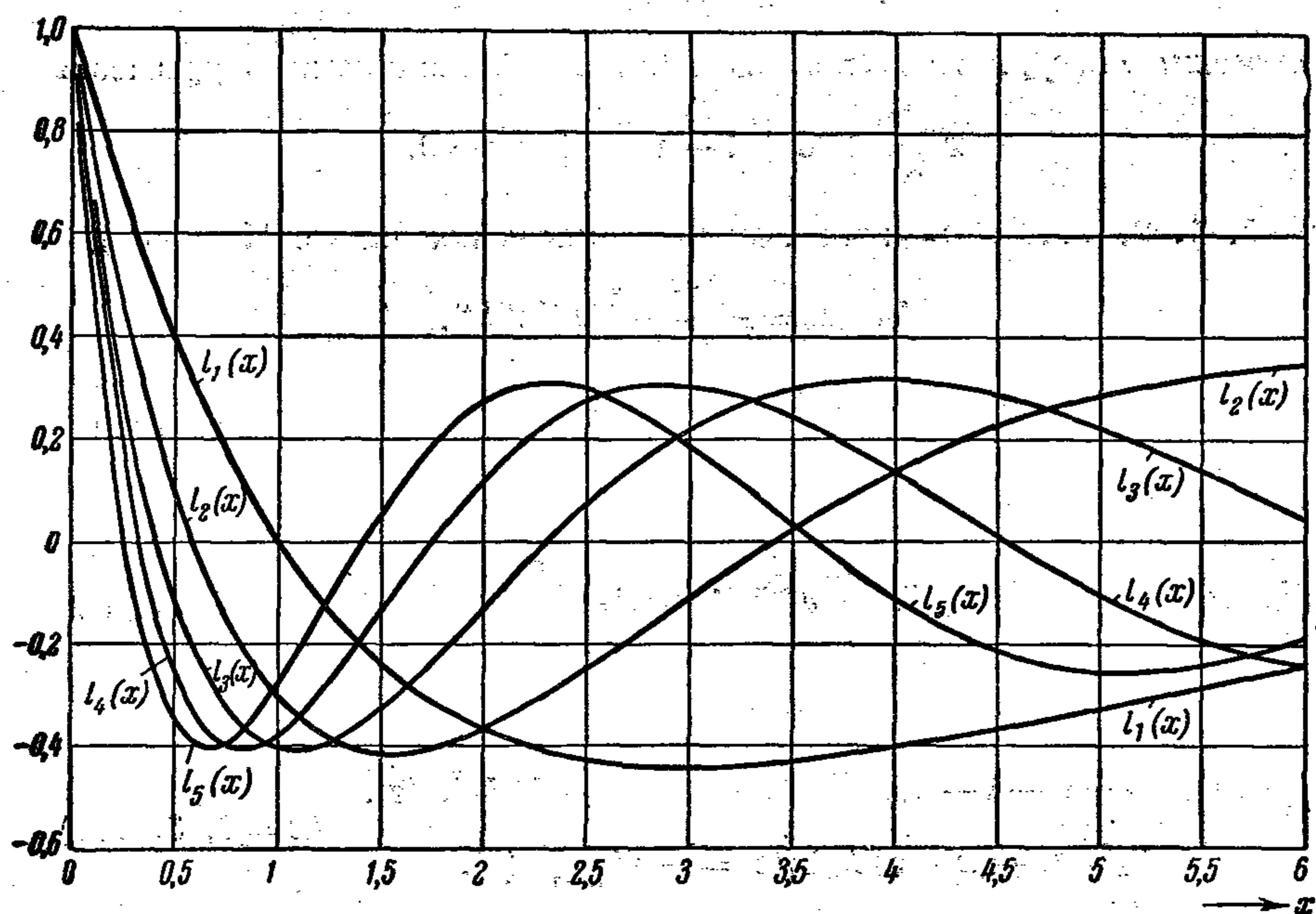
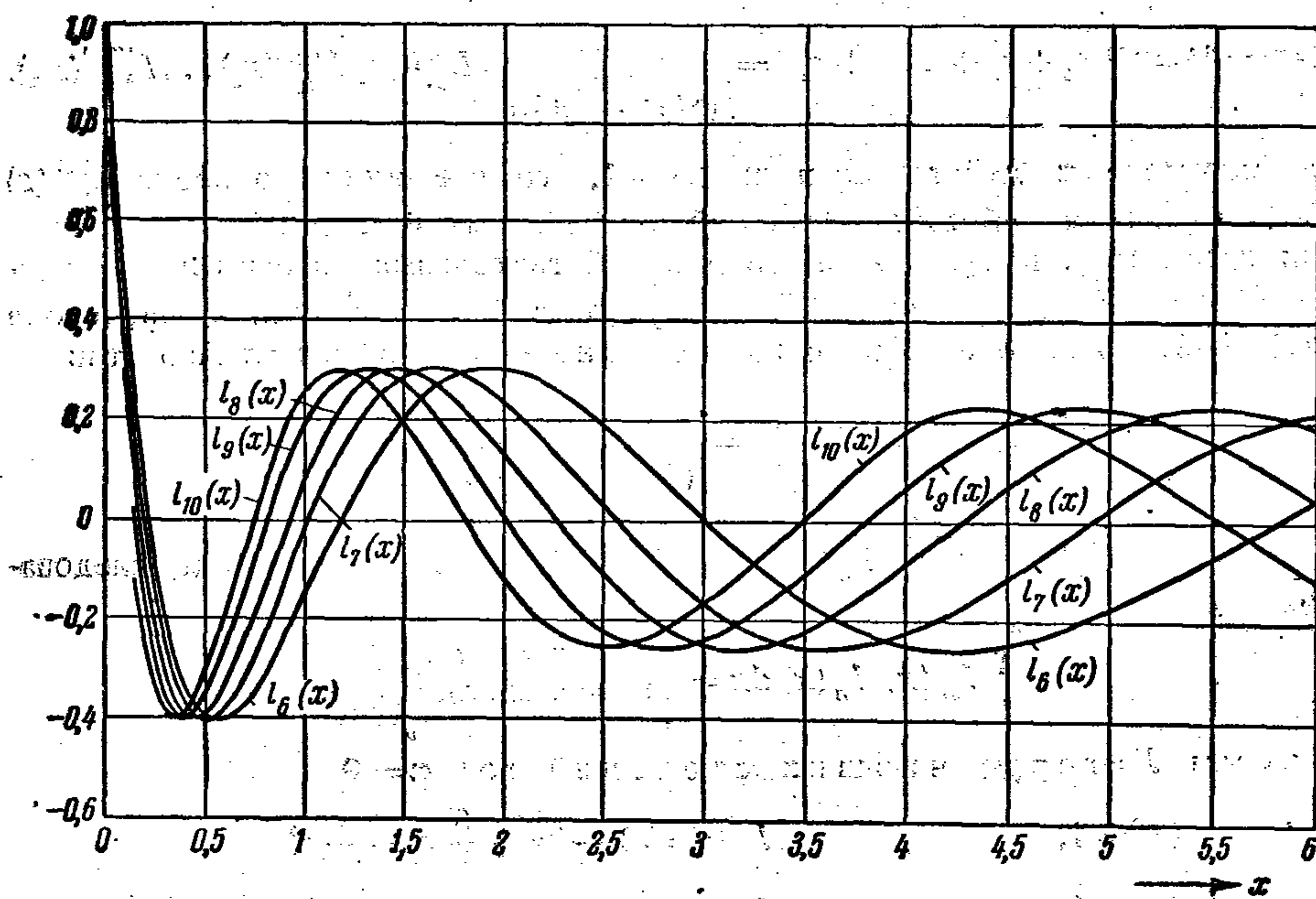
Для функций $l_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$ (рис. 83, 84, табл. 36) получаем, следовательно,

$$\int_0^{+\infty} l_m(x) l_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Полиномы Лагерра низших степеней для $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} L_0(z) &= 1, & L_3(z) &= 1 - 3z + \frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{6} z^3, \\ L_1(z) &= 1 - z, & L_4(z) &= 1 - 4z + 3z^2 + \frac{1}{24} z^4, \\ L_2(z) &= 1 - 2z + \frac{1}{2} z^2, & L_5(z) &= 1 + 5z^2 + \frac{5}{24} z^4 - \frac{1}{120} z^5. \end{aligned}$$

*) Иногда применяется и иная нормировка этих полиномов. — Прим. ред.

Рис. 83. Функции Лагерра $l_n(x)$, $n=1, 2, \dots, 5$.Рис. 84. Функции Лагерра $l_n(x)$, $n=6, 7, \dots, 10$.

Т а б л и ц а 36. Функции Лагерра $l_n(x)$

x	$l_0(x)$	$l_1(x)$	$l_2(x)$	$l_3(x)$	$l_4(x)$	$l_5(x)$
0,00	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000
0,10	0,9512	0,8561	0,7657	0,6800	0,5986	0,5216
0,20	0,9048	0,7239	0,5610	0,4150	0,2848	+ 0,1692
0,30	0,8607	0,6025	0,3830	0,1984	+ 0,4505 (— 1)	— 0,8033 (— 1)
0,40	0,8187	0,4912	0,2292	+ 0,2402 (— 1)	— 0,1323	0,2468
0,50	+ 0,7786	+ 0,3894	+ 0,9935 (— 1)	— 0,1136	— 0,2576	— 0,3470
0,60	0,7408	0,2963	— 0,1482 (— 1)	0,2193	0,3397	0,3953
0,70	0,7067	0,2114	0,1092	0,2975	0,3866	0,4038
0,80	0,6703	0,1341	0,1877	0,3521	0,4051	0,3826
0,90	0,6376	+ 0,6376 (— 1)	0,2519	0,3867	0,4009	0,3400
1,00	+ 0,6065	0,0000	— 0,3033	— 0,4044	— 0,3791	— 0,2830
1,25	0,5353	— 0,1338	0,3847	0,3917	0,2745	— 0,1121
1,50	0,4724	0,2362	0,4133	0,3248	0,1365	+ 0,5499 (— 1)
1,75	0,4169	0,3126	0,4038	0,2291	— 0,2239 (— 2)	0,1865
2,00	+ 0,3679	— 0,3679	— 0,3679	— 0,1226	+ 0,1226	+ 0,2698
2,25	0,3247	0,4058	0,3145	— 0,1775 (— 1)	0,2148	0,3042
2,50	0,2865	0,4298	0,2507	+ 0,7760 (— 1)	0,2753	0,2958
2,75	0,2528	0,4425	0,1817	0,1587	0,3049	0,2542
3,00	+ 0,2231	— 0,4463	— 0,1116	+ 0,2231	+ 0,3068	+ 0,1897
3,25	0,1969	0,4431	— 0,4307 (— 1)	0,2702	0,2857	0,1123
3,50	0,1738	0,4344	+ 0,2172 (— 1)	0,3005	0,2466	+ 0,3091 (— 1)
3,75	0,1534	0,4217	+ 0,8147 (— 1)	0,3151	0,1949	— 0,4742 (— 1)
4,00	+ 0,1353	— 0,4060	+ 0,1353	+ 0,3158	+ 0,1353	— 0,1173
4,25	0,1194	0,3882	0,1829	0,3045	0,7218 (— 1)	0,1750
4,50	0,1054	0,3689	0,2240	0,2833	+ 0,9058 (— 2)	0,2185
4,75	0,9301 (— 1)	0,3488	0,2587	0,2541	— 0,5109 (— 1)	0,2467
5,00	+ 0,8208 (— 1)	— 0,3283	+ 0,2873	+ 0,2189	— 0,1060	— 0,2599
5,25	0,7244 (— 1)	0,3079	0,3101	0,1794	0,1541	0,2591
5,50	0,6393 (— 1)	0,2877	0,3276	0,1372	0,1943	0,2457
5,75	0,5642 (— 1)	0,2680	0,3403	0,9359 (— 1)	0,2259	0,2217
6	+ 0,4979 (— 1)	— 0,2489	+ 0,3485	+ 0,4979 (— 1)	— 0,2489	— 0,1892
7	0,3020 (— 1)	0,1812	0,3473	— 0,1107	0,2605	— 0,1560 (— 1)
8	0,1832 (— 1)	0,1282	0,3114	0,2259	0,1771	+ 0,1453
9	0,1111 (— 1)	0,8887 (— 1)	0,2611	0,2888	— 0,5138 (— 1)	0,2311
10	+ 0,6738 (— 2)	— 0,6064 (— 1)	+ 0,2089	— 0,3077	+ 0,7412 (— 1)	+ 0,2313
11	0,4087 (— 2)	0,4087 (— 1)	0,1614	0,2956	0,1745	0,1667
12	0,2479 (— 2)	0,2727 (— 1)	0,1215	0,2652	0,2404	+ 0,6792 (— 1)
13	0,1503 (— 2)	0,1804 (— 1)	0,8945 (— 1)	0,2265	0,2727	— 0,3693 (— 1)
14	0,9119 (— 3)	0,1185 (— 1)	0,6674 (— 1)	0,1863	0,2775	0,1285
16	+ 0,3355 (— 3)	— 0,5032 (— 2)	+ 0,3254 (— 1)	— 0,1160	+ 0,2365	— 0,2383
18	0,1234 (— 3)	0,2098 (— 2)	0,1567 (— 1)	0,6652 (— 1)	0,1712	0,2549
20	0,4540 (— 4)	0,8626 (— 3)	0,7309 (— 2)	0,3597 (— 1)	0,1114	0,2164
22	0,1670 (— 4)	0,3507 (— 3)	0,3324 (— 2)	0,1860 (— 1)	0,6726 (— 1)	0,1600
24	0,6144 (— 5)	0,1413 (— 3)	0,1481 (— 2)	0,9284 (— 2)	0,3835 (— 1)	0,1076
26	+ 0,2260 (— 5)	— 0,5651 (— 4)	+ 0,6487 (— 3)	— 0,4503 (— 2)	+ 0,2090 (— 1)	— 0,6747 (— 1)
28	0,8315 (— 6)	0,2245 (— 4)	0,2802 (— 3)	0,2133 (— 2)	0,1099 (— 1)	0,4006 (— 1)
30	0,3059 (— 6)	0,8871 (— 5)	0,1196 (— 3)	0,9908 (— 3)	0,5607 (— 2)	0,2276 (— 1)
32	0,1125 (— 6)	0,3489 (— 5)	0,5053 (— 4)	0,4524 (— 3)	0,2790 (— 2)	0,1247 (— 1)
34	0,4140 (— 7)	0,1366 (— 5)	0,2116 (— 4)	0,2036 (— 3)	0,1358 (— 2)	0,6629 (— 2)

Продолжение табл. 36

x	$l_6(x)$	$l_7(x)$	$l_8(x)$	$l_9(x)$	$l_{10}(x)$
0,00	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000
0,10	+ 0,4487	+ 0,3798	+ 0,3148	+ 0,2535	+ 0,1958
0,20	+ 0,6725 (— 1)	— 0,2207 (— 1)	— 0,9967 (— 1)	— 0,1664	— 0,2232
0,30	— 0,1808	0,2592	0,3180	0,3597	0,3865
0,40	0,3257	0,3748	0,3990	0,4027	0,3900
0,50	— 0,3926	— 0,4037	— 0,3881	— 0,3527	— 0,3032
0,60	0,4021	0,3735	0,3204	0,2519	0,1751
0,70	0,3710	0,3058	0,2220	0,1302	— 0,3851 (— 1)
0,80	0,3128	0,2173	0,1120	— 0,8407 (— 2)	+ 0,8548 (— 1)
0,90	0,2383	0,1205	— 0,3837 (— 2)	+ 0,1002	0,1849
1,00	— 0,1558	— 0,2455 (— 1)	+ 0,9340 (— 1)	+ 0,1879	+ 0,2541
1,25	+ 0,4653 (— 1)	+ 0,1742	0,2587	0,2979	0,2959
1,50	0,2008	0,2828	0,3015	0,2679	0,1975
1,75	0,2856	0,2992	0,2456	0,1503	+ 0,3811 (— 1)
2,00	+ 0,3025	+ 0,2441	+ 0,1320	+ 0,2985 (— 2)	— 0,1137
2,25	0,2646	0,1456	+ 0,5606 (— 3)	— 0,1285	0,2158
2,50	0,1897	+ 0,3093 (— 1)	— 0,1176	0,2170	0,2522
2,75	+ 0,9541 (— 1)	— 0,7816 (— 1)	0,2032	0,2522	0,2270
3,00	— 0,2789 (— 2)	— 0,1666	— 0,2474	— 0,2368	— 0,1562
3,25	0,9298 (— 1)	0,2258	0,2502	0,1816	— 0,6085 (— 1)
3,50	0,1669	0,2530	0,2176	0,1016	+ 0,3842 (— 1)
3,75	0,2197	0,2497	0,1589	— 0,1196 (— 1)	0,1248
4,00	— 0,2496	— 0,2204	— 0,8464 (— 1)	+ 0,7366 (— 1)	+ 0,1867
4,25	0,2571	0,1713	— 0,5254 (— 2)	0,1448	0,2183
4,50	0,2442	0,1093	+ 0,7024 (— 1)	0,1947	0,2198
4,75	0,2144	— 0,4123 (— 1)	0,1343	0,2201	0,1923
5,00	— 0,1716	+ 0,2671 (— 1)	+ 0,1835	+ 0,2210	+ 0,1442
5,25	0,1199	0,8936 (— 1)	0,2138	0,1997	0,8217 (— 1)
5,50	0,6336 (— 1)	0,1427	0,2250	0,1606	+ 0,1429 (— 1)
5,75	— 0,5728 (— 2)	0,1841	0,2179	0,1087	— 0,5207 (— 1)
6	+ 0,4979 (— 1)	+ 0,2120	+ 0,1949	+ 0,4979 (— 1)	— 0,1107
7	0,2066	0,1905	+ 0,9683 (— 2)	— 0,1586	0,1990
8	0,2202	+ 0,3274 (— 1)	— 0,1640	0,1931	— 0,6481 (— 1)
9	+ 0,1198	— 0,1296	0,2020	— 0,6441 (— 1)	+ 0,1174
10	— 0,2321 (— 1)	— 0,2082	— 0,1098	+ 0,9967 (— 1)	+ 0,1886
11	0,1454	0,1844	+ 0,3506 (— 1)	0,1873	+ 0,1183
12	0,2117	— 0,8846 (— 1)	0,1521	0,1631	— 0,2268 (— 1)
13	0,2149	+ 0,3166 (— 1)	0,1786	+ 0,5896 (— 1)	0,1410
14	— 0,1670	0,1340	+ 0,1629	— 0,6478 (— 1)	0,1790
16	+ 0,1528 (— 2)	+ 0,2036	— 0,2679 (— 1)	— 0,1840	— 0,3108 (— 1)
18	0,1547	+ 0,1080	0,1759	— 0,7642 (— 1)	+ 0,1506
20	0,2317	— 0,4623 (— 1)	0,1738	+ 0,9904 (— 1)	+ 0,1465
22	0,2373	0,1679	— 0,6068 (— 1)	0,1830	— 0,2839 (— 3)
24	0,2012	0,2239	+ 0,7588 (— 1)	0,1400	0,1383
26	+ 0,1513	— 0,2231	+ 0,1744	+ 0,2391	— 0,1767
28	0,1043	0,1892	0,2162	— 0,9606 (— 1)	— 0,1081
30	0,6740 (— 1)	0,1442	0,2113	0,1771	+ 0,4628 (— 2)
32	0,4132 (— 1)	0,1015	0,1795	0,2089	0,1101
34	0,2428 (— 1)	0,6715 (— 1)	0,1382	0,2014	0,1777

С. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА (ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА)

Полиномы Эрмита являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + 2nw = 0,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Именно,

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2}),$$

или

$$H_n(z) = 2^n z^n - 2^{n-1} \binom{n}{2} z^{n-2} + 2^{n-2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \binom{n}{4} z^{n-4} - 2^{n-3} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \binom{n}{6} z^{n-6} + \dots$$

Вместо $H_n(z)$ часто рассматривают полиномы $2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$, называя их также полиномами Эрмита *).

Полиномы Эрмита связаны с полиномами Лагерра соотношениями

$$\begin{aligned} H_{2m}(z) &= (-1)^m 2^{2m} m! L_m^{(-1/2)}(z^2), \\ H_{2m+1}(z) &= (-1)^m 2^{2m+1} m! z L_m^{(1/2)}(z^2). \end{aligned}$$

Производящая функция:

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n!}.$$

Рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(z) &= 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z), \\ \frac{dH_n(z)}{dz} &= 2nH_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Теорема сложения:

$$2^{\frac{n}{2}} H_n(z_1 + z_2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k(z_1 \sqrt{2}) H_{n-k}(z_2 \sqrt{2}),$$

$$\begin{aligned} \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2)^{\frac{n}{2}}}{n!} H_n\left(\frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2}}\right) &= \\ &= \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}}{k_1! k_2! \dots k_m!} H_{k_1}(z_1) \dots H_{k_m}(z_m). \end{aligned}$$

Все нули полиномов Эрмита действительные и простые. Для действительных значений аргумента $z = x$ полиномы Эрмита действительны и на действительной оси выполняется соотношение ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi} \cdot n! & \text{при } m = n. \end{cases}$$

*) Иногда употребляются и другие нормировки этих полиномов. — Прим. ред.

Отсюда следует, что функции

$$\varphi_n(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}}$$

(рис. 85, 86, табл. 37) ортогональны и нормированы на всей прямой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq n, \\ 1 & \text{для } m = n. \end{cases}$$

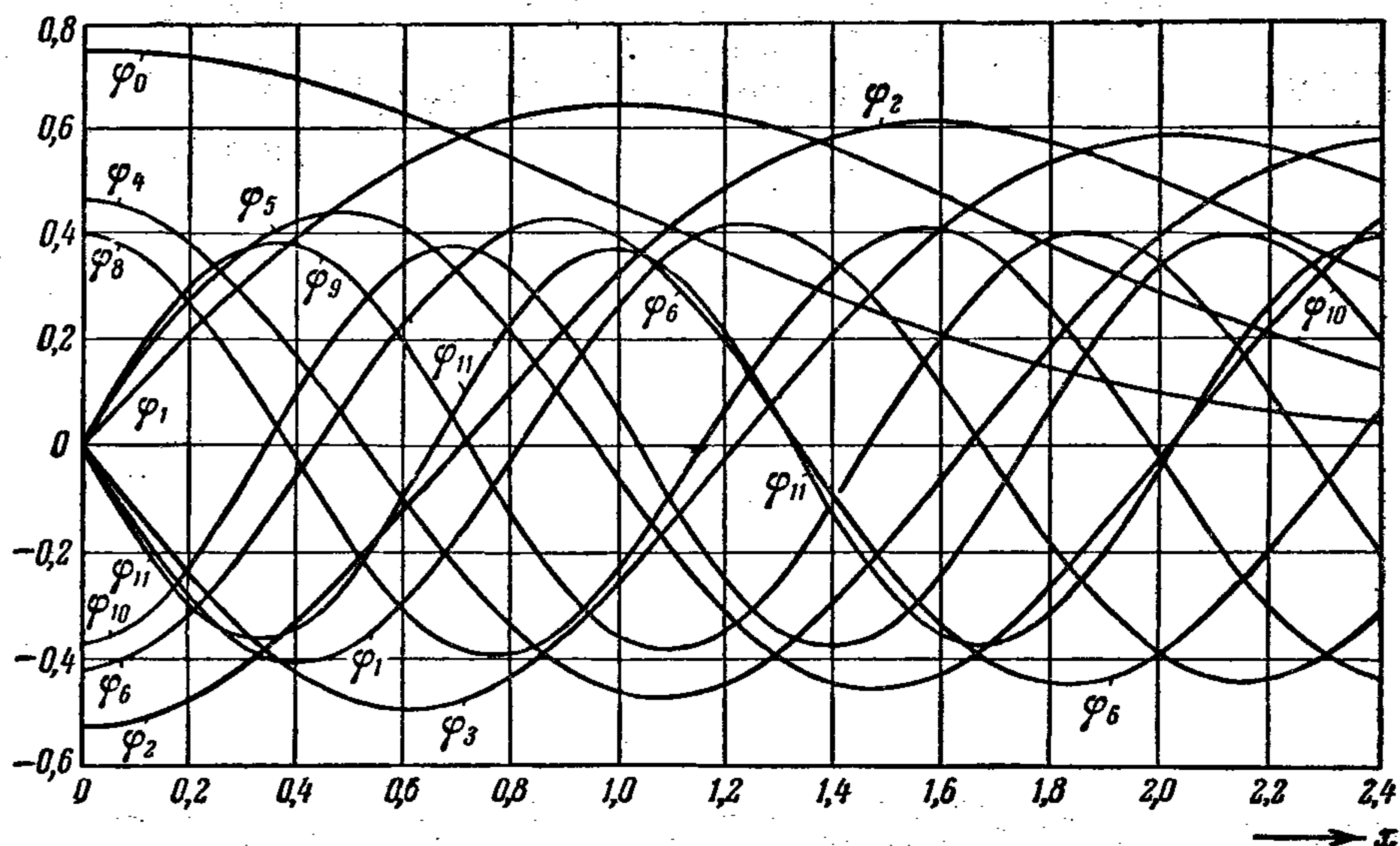


Рис. 85. Функции параболического цилиндра $\varphi_n(x)$.

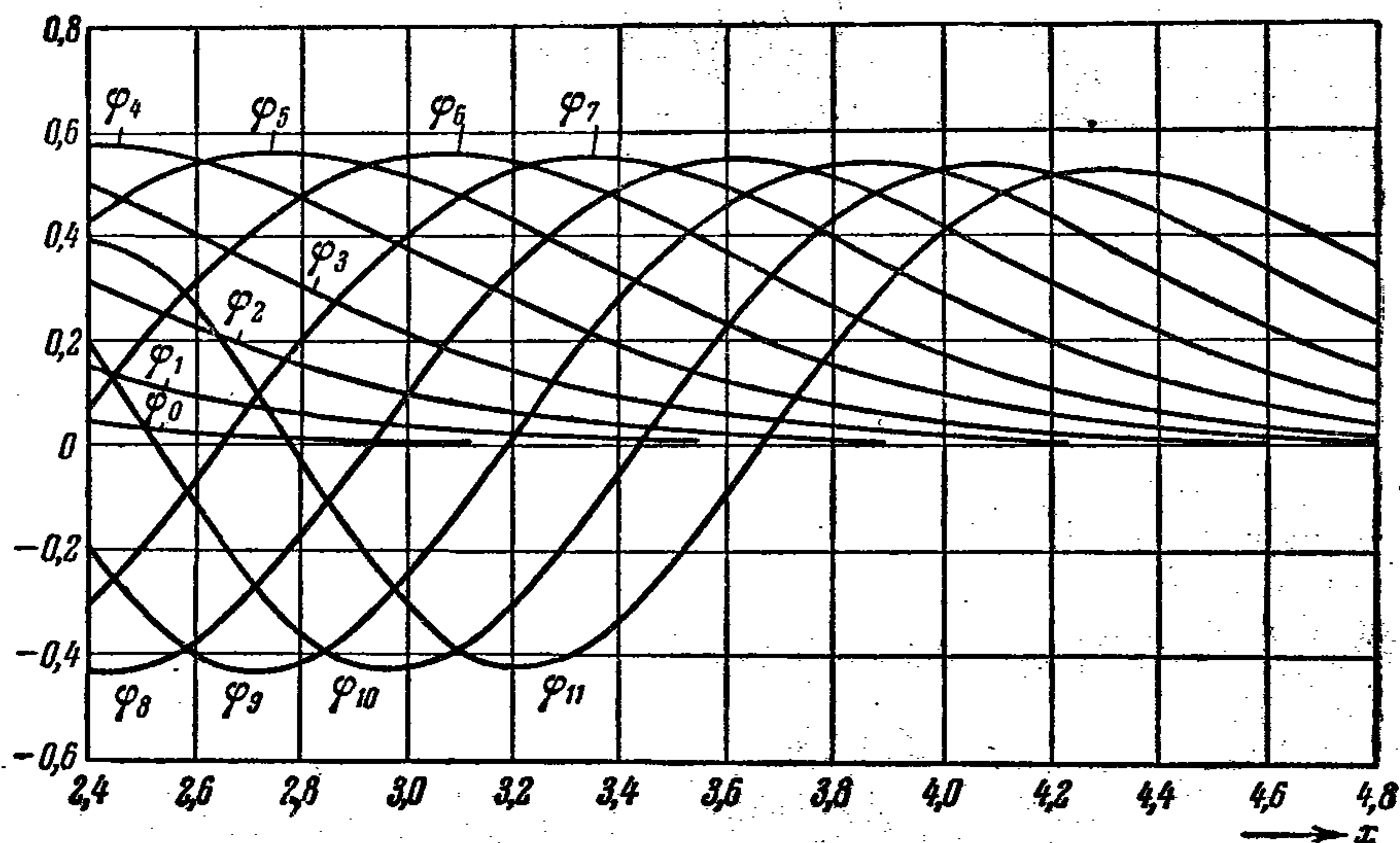


Рис. 86. Функции параболического цилиндра $\varphi_n(x)$.

Полиномы Эрмита низших степеней:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1, & H_2(z) &= 8z^2 - 12z, \\ H_1(z) &= 2z, & H_4(z) &= 16z^4 - 48z^2 + 12, \\ H_3(z) &= 4z^3 - 2, & H_5(z) &= 32z^5 - 160z^3 + 120z. \end{aligned}$$

Полиномы Эрмита тесно связаны с функциями параболического цилиндра $D_\nu(z)$. Функции $D_\nu(z)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2 \right) w = 0,$$

где ν — параметр. Для целых значений параметра $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$ имеем:

$$D_n(z) = 2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{n! \sqrt{\pi}} \varphi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

т. е. введенная выше функция

$$\varphi_n(x) = \frac{D_n(x\sqrt{2})}{\sqrt{n! \sqrt{\pi}}}.$$

Если определить

$$D_n(z) = \sqrt{n! \sqrt{2\pi}} \Psi_n(z),$$

$$\Psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \frac{D_n(z)}{\sqrt{n! \sqrt{2\pi}}} = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{2\pi}}},$$

то функции $\Psi_n(x)$ (рис. 87) будут ортогональными и нормированными на всей прямой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq n, \\ 1 & \text{для } m = n. \end{cases}$$

Функции $D_n(z)$ допускают интегральное представление (которое также имеет место и для произвольного параметра $\nu \neq -1, -2, \dots$)

$$D_n(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} e^{-\frac{1}{4} z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt - \frac{1}{2} t^2} t^{-n-1} dt.$$

При $|z| \rightarrow \infty$ получаем в секторе $-\frac{3\pi}{4} + \delta \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} - \delta$ ($\delta > 0$) асимптотическое представление

$$D_n(z) \approx e^{-\frac{1}{4} z^2} z^n \left(1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2! (2z^2)^2} - \dots \right).$$

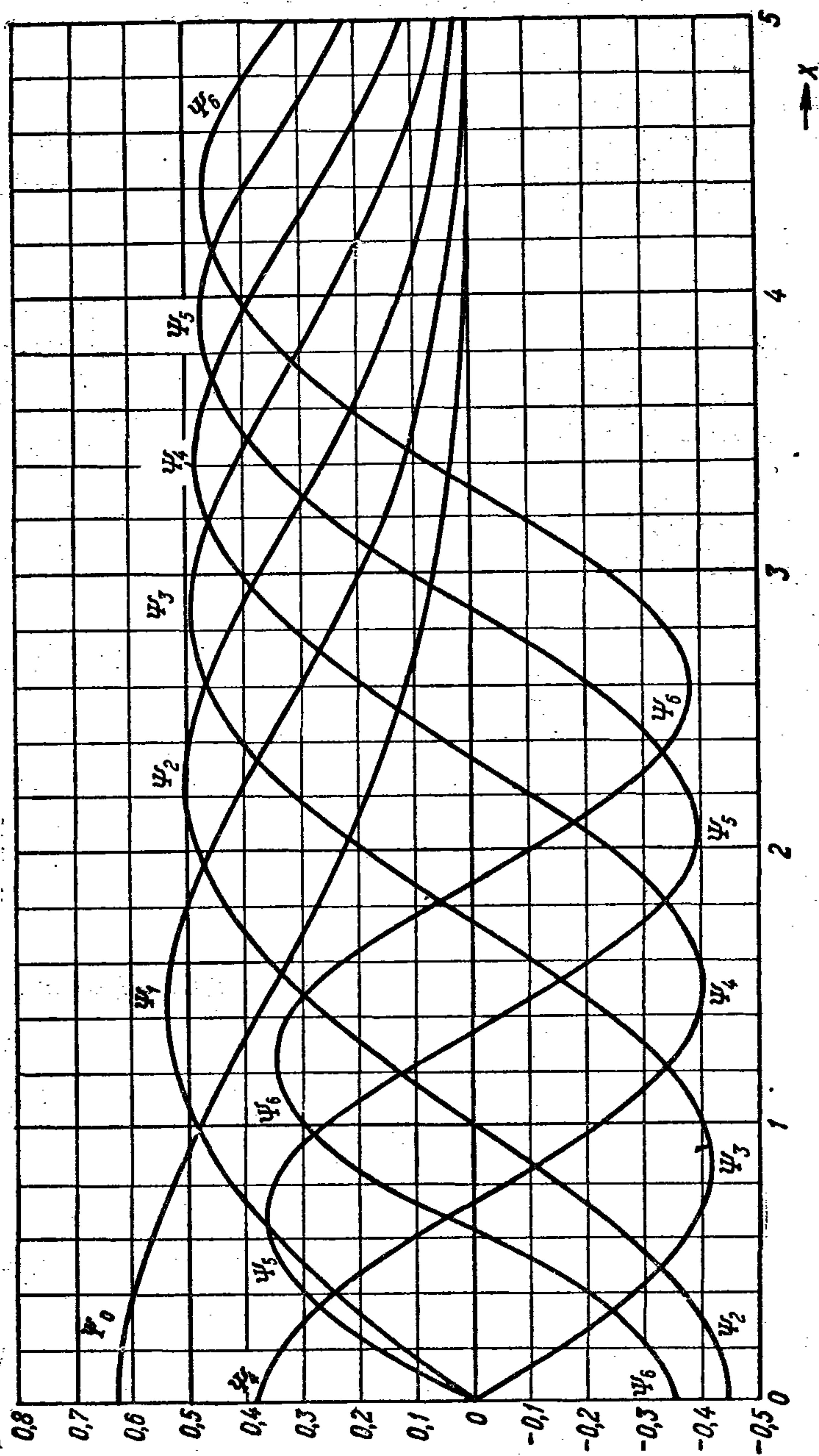
Рис. 87. Функции параболического цилиндра $\Psi_n(x)$.

Таблица 37. Функции параболического цилиндра $\varphi_n(x)$

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$
	+ 0.	+ 0.	- 0.	- 0.		
0,00	75113	00000	53113	00000	+ 0,45997	+ 0,00000
04	75052	42456 (- 1)	52900	51942 (- 1)	0,45667	0,58011 (- 1)
08	74873	84709 (- 1)	52265	10330	0,44678	0,11500
12	74574	12656	51214	15351	0,43049	0,16998
16	74157	16780	49753	20200	0,40803	0,22198
0,20	73625	20824	47897	24824	+ 0,37970	+ 0,27007
24	72980	24770	45661	29172	0,34592	0,31343
28	72225	28600	43064	33197	0,30721	0,35132
32	71364	32296	40127	36854	0,26412	0,38308
36	70400	35841	36876	40104	0,21728	0,40817
0,40	69338	39223	33339	42914	+ 0,16735	+ 0,42617
44	68183	42427	29544	45255	0,11506	0,43680
48	66940	45440	25522	47104	0,61153 (- 1)	0,43988
52	65614	48252	21305	48443	+ 0,63840 (- 2)	0,43539
56	64212	50853	16927	49261	- 0,48473 (- 1)	0,42343
0,60	62739	53235	12422	49552	- 0,10266	+ 0,40426
64	61202	55394	78245 (- 1)	49318	0,15543	0,37821
68	59608	57324	31698 (- 1)	48564	0,20606	0,34575
72	57962	59019	*15083 (- 1)	47302	0,25388	0,30747
76	56271	60479	61754 (- 1)	45550	0,29827	0,26404
0,80	54543	61706	10799	43330	- 0,33864	+ 0,21622
84	52783	62705	15347	40671	0,37448	0,16482
88	50998	63470	19790	37602	0,40536	0,11071
92	49195	64006	24100	34158	0,43091	+ 0,54782 (- 1)
96	47379	64325	28251	30378	0,45085	- 0,20325 (- 2)
1,00	45558	64431	32215	26303	- 0,46499	- 0,58816 (- 1)
10	41017	63809	41186	15109	0,47419	0,19476
20	36561	62046	48603	30396 (- 1)	0,44671	0,31184
30	32265	59321	54300	*92024 (- 1)	0,38565	0,39939
40	28190	55816	58206	20963	0,29656	0,45009
1,50	24385	51730	60352	31678	- 0,18666	- 0,46042
60	20884	47255	60840	40899	- 0,64185 (- 1)	0,43076
70	17708	42572	59850	48316	+ 0,62475 (- 1)	0,36498
80	14865	37840	57601	53758	0,18541	0,26976
90	12355	33196	54337	57189	0,29778	0,15369
2,00	10166	28752	50316	58690	+ 0,39425	- 0,26247 (- 1)
10	82812 (- 1)	24594	45791	58436	0,47115	+ 0,10310
20	66792 (- 1)	20781	40995	56671	0,52657	0,22579
30	53334 (- 1)	17348	36130	53683	0,56019	0,33472
40	42164 (- 1)	14311	31366	49778	0,57313	0,42472
2,50	33002 (- 1)	11668	26836	45253	+ 0,56755	+ 0,49263
60	25574 (- 1)	94036 (- 1)	22641	40386	0,54641	0,53728
70	19620 (- 1)	74921 (- 1)	18841	35418	0,51303	0,55927
80	14903 (- 1)	59013 (- 1)	15470	30549	0,47086	0,56060
90	11208 (- 1)	45964 (- 1)	12537	25933	0,42321	0,54426
3,00	83443 (- 2)	35402 (- 1)	10031	21679	+ 0,37301	+ 0,51384
10	61507 (- 2)	26965 (- 1)	79244 (- 1)	17856	0,32278	0,47314
20	44887 (- 2)	20314 (- 1)	61831 (- 1)	14496	0,27447	0,42580
30	32432 (- 2)	15136 (- 1)	47655 (- 1)	11605	0,22951	0,37522
40	23200 (- 2)	11155 (- 1)	36289 (- 1)	91630 (- 1)	0,18887	0,32417
3,50	16431 (- 2)	81326 (- 2)	27303 (- 1)	71384 (- 1)	+ 0,15302	+ 0,27489
	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.		

Продолжение табл. 37

x	$\varphi_6(x)$	$\varphi_7(x)$	$\varphi_8(x)$	$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$	$\varphi_{11}(x)$
0,00	-0,41989	-0,00000	+0,39277	+0,00000	-0,37262	-0,00000
04	0,41552	0,62592 (-1)	0,38744	0,66320 (-1)	0,36637	0,69480 (-1)
08	0,40254	0,12367	0,37159	0,13063	0,34786	0,13641
12	0,38119	0,18182	0,34566	0,19097	0,31769	0,19834
16	0,35195	0,23563	0,31038	0,24554	0,27689	0,25308
0,20	-0,31542	-0,28378	+0,26666	+0,29268	-0,22681	-0,29839
24	0,27235	0,32513	0,21574	0,33094	0,16916	0,33285
28	0,22365	0,35873	0,15898	0,35920	0,10584	0,35513
32	0,17033	0,38380	0,97924 (-1)	0,37662	-0,39002 (-1)	0,36443
36	0,11351	0,39974	+0,34225 (-1)	0,38268	+0,29143 (-1)	0,36041
0,40	-0,54348 (-1)	-0,40618	-0,30398 (-1)	+0,37722	+0,96317 (-1)	-0,34323
44	+0,59254 (-2)	0,40300	0,94202 (-1)	0,36041	0,16028	0,31356
48	0,66077 (-1)	0,39029	0,15548	0,33279	0,21894	0,27249
52	0,12489	0,36838	0,21260	0,29520	0,27034	0,22152
56	0,18116	0,33780	0,26404	0,24878	0,31279	0,16251
0,60	+0,23375	-0,29930	-0,30844	+0,19494	+0,34493	-0,97624 (-1)
64	0,28163	0,25381	0,34466	0,13531	0,36569	-0,29210 (-1)
68	0,32385	0,20239	0,37175	0,71650 (-1)	0,37445	+0,40260 (-1)
72	0,35959	0,14628	0,38901	+0,58762 (-2)	0,37094	0,10828
76	0,38816	0,86783 (-1)	0,39606	-0,60071 (-1)	0,35530	0,17242
0,80	+0,40901	-0,25288 (-1)	-0,39270	-0,12426	+0,32810	+0,23039
84	0,42179	+0,36788 (-1)	0,37910	0,18480	0,29022	0,28015
88	0,42630	0,98025 (-1)	0,35562	0,23995	0,24295	0,31995
92	0,42248	0,15704	0,32294	0,28813	0,18782	0,34840
96	0,41044	0,21250	0,28193	0,32794	0,12668	0,36453
1,00	+0,39050	+0,26319	-0,23369	-0,35830	+0,61463 (-1)	+0,36784
10	0,30919	0,36211	-0,90060 (-1)	0,38810	-0,10548	0,32056
20	0,19174	0,41169	+0,67662 (-1)	0,34987	0,25195	0,20467
30	+0,52287 (-1)	0,40609	0,21505	0,25108	0,34998	+0,45390 (-1)
40	-0,93080 (-1)	0,34704	0,33000	-0,10941	0,38156	-0,12346
1,50	-0,22833	+0,24319	+0,39598	+0,50714 (-1)	-0,34164	-0,26686
60	0,33933	+0,10860	0,40429	0,20255	0,23862	0,35588
70	0,41527	-0,39433 (-1)	0,35493	0,32161	-0,92202 (-1)	0,37347
80	0,44960	0,18283	0,25602	0,38966	+0,70747 (-1)	0,31726
90	0,44043	0,30501	+0,12222	0,39704	0,22141	0,19930
2,00	-0,39021	-0,39285	-0,27844 (-1)	+0,34413	+0,33421	-0,43146 (-1)
10	0,30509	0,43792	0,17443	0,24020	0,39106	+0,12115
20	0,19390	0,43705	0,29938	+0,10157	0,38395	0,26334
30	-0,66902 (-1)	0,39214	0,38838	-0,51381 (-1)	0,31560	0,35851
40	+0,65318 (-1)	0,30942	0,43240	0,19749	0,19825	0,39118
2,50	+0,19294	-0,19825	-0,42830	-0,31784	+0,50964 (-1)	+0,35738
60	0,30772	-0,69767 (-1)	0,37855	0,39819	-0,10388	0,26450
70	0,40350	+0,64541 (-1)	0,29030	0,43035	0,24423	+0,12916
80	0,47642	0,19403	0,17402	0,41262	0,35159	-0,26351 (-1)
90	0,52493	0,30982	-0,41793 (-1)	0,34923	0,41328	0,17807
3,00	+0,54949	+0,40541	+0,94123 (-1)	-0,24911	-0,42352	-0,30424
10	0,55216	0,47695	0,22277	-0,12416	0,38340	0,38840
20	0,53613	0,52280	0,33497	+0,12502 (-1)	0,29995	0,42121
30	0,50537	0,54403	0,42491	0,14819	0,18447	0,40089
40	0,40393	0,54303	0,48916	0,27206	-0,50381 (-1)	0,33246
3,50	+0,41576	+0,52334	+0,52694	+0,37599	+0,88619 (-1)	-0,22623

Продолжение табл. 37

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$
	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.
3,50	16431 (— 2)	81326 (— 2)	27303 (— 1)	71384 (— 1)	15302	27489
60	11521 (— 2)	58652 (— 2)	20301 (— 1)	54883 (— 1)	12213	22898
70	79980 (— 3)	41849 (— 2)	14919 (— 1)	41653 (— 1)	96057 (— 1)	18753
80	54967 (— 3)	29540 (— 2)	10836 (— 1)	31210 (— 1)	74477 (— 1)	15108
90	37403 (— 3)	20629 (— 2)	77810 (— 2)	23093 (— 1)	56944 (— 1)	11979
4,00	25197 (— 3)	14254 (— 2)	55234 (— 2)	16876 (— 1)	42950 (— 1)	93556 (— 1)
20	11098 (— 3)	65918 (— 3)	26901 (— 2)	86867 (— 2)	23469 (— 1)	54570 (— 1)
40	46962 (— 4)	29222 (— 3)	12526 (— 2)	42613 (— 2)	12173 (— 1)	30065 (— 1)
60	19093 (— 4)	12421 (— 3)	55787 (— 3)	19939 (— 2)	60022 (— 2)	15679 (— 1)
80	74583 (— 5)	50629 (— 4)	23774 (— 3)	89043 (— 3)	28163 (— 2)	77533 (— 2)
5,00	27992 (— 5)	19793 (— 4)	96986 (— 4)	37979 (— 3)	12588 (— 2)	36408 (— 2)
20	10094 (— 5)	74230 (— 5)	37885 (— 4)	15478 (— 3)	53636 (— 3)	16241 (— 2)
40	34970 (— 6)	26706 (— 5)	14174 (— 4)	60314 (— 4)	21764 (— 3)	68935 (— 3)
60	11641 (— 6)	92188 (— 6)	50802 (— 5)	22477 (— 4)	84600 (— 4)	27953 (— 3)
80	37229 (— 7)	30537 (— 6)	17448 (— 5)	80135 (— 5)	31354 (— 4)	10785 (— 3)
6,00	11440 (— 7)	97069 (— 7)	57433 (— 6)	27343 (— 5)	11104 (— 4)	39689 (— 4)
20	33774 (— 8)	29613 (— 7)	18121 (— 6)	89316 (— 6)	37587 (— 5)	13941 (— 4)
40	95799 (— 9)	86706 (— 8)	54815 (— 7)	27937 (— 6)	12168 (— 5)	46753 (— 5)
60	26108 (— 9)	24369 (— 8)	15899 (— 7)	83688 (— 7)	37679 (— 6)	14980 (— 5)
80	68364 (— 10)	65743 (— 9)	44222 (— 8)	24016 (— 7)	11165 (— 6)	45873 (— 6)
7,00	17199 (— 10)	17026 (— 9)	11797 (— 8)	66034 (— 8)	31664 (— 7)	13428 (— 6)
50	45833 (— 12)	48613 (— 11)	36135 (— 10)	21732 (— 9)	11212 (— 8)	50501 (— 8)
8,00	95123 (— 14)	10762 (— 12)	85424 (— 12)	54920 (— 11)	30331 (— 10)	14853 (— 9)
	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.

x	$\varphi_6(x)$	$\varphi_7(x)$	$\varphi_8(x)$	$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$	$\varphi_{11}(x)$
	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.
3,50	41576	52334	52694	37599	88619 (— 1)	22623
60	36443	48928	53981	45479	22009	95779 (— 1)
70	31290	44525	53101	50533	33410	*44335 (— 1)
80	26346	39528	50458	53120	42404	18060
90	21777	34288	46491	53211	48668	30198
4,00	17685	29151	41759	51258	52076	39949
20	11090	19845	31301	43263	51566	51099
40	65262 (— 1)	12565	21539	32830	44166	51561
60	36160 (— 1)	74396 (— 1)	13729	22756	33789	44578
80	18916 (— 1)	41354 (— 1)	81555 (— 1)	14555	23507	34235
5,00	93611 (— 2)	21648 (— 1)	45363 (— 1)	86512 (— 1)	15041	23819
20	43865 (— 2)	10689 (— 1)	23688 (— 1)	47988 (— 1)	89124 (— 1)	15186
40	19505 (— 2)	49918 (— 2)	11653 (— 1)	24958 (— 1)	49216 (— 1)	89530 (— 1)
60	82652 (— 3)	22152 (— 2)	54296 (— 2)	12245 (— 1)	25523 (— 1)	49252 (— 1)
80	33252 (— 3)	93103 (— 3)	23889 (— 2)	56538 (— 2)	12400 (— 1)	25274 (— 1)
6,00	12735 (— 3)	37168 (— 3)	99360 (— 3)	24665 (— 2)	56734 (— 2)	12163 (— 1)
20	46468 (— 4)	14109 (— 3)	39392 (— 3)	10183 (— 2)	24497 (— 2)	55058 (— 2)
40	16165 (— 4)	50970 (— 4)	14797 (— 3)	39841 (— 3)	99993 (— 3)	23489 (— 2)
60	53640 (— 5)	17537 (— 4)	52853 (— 4)	14791 (— 3)	38642 (— 3)	94647 (— 3)
80	16991 (— 5)	57511 (— 5)	17964 (— 4)	52164 (— 4)	14159 (— 3)	36080 (— 3)
7,00	51377 (— 6)	17980 (— 5)	58123 (— 5)	17485 (— 4)	49223 (— 4)	13025 (— 3)
50	20844 (— 7)	79255 (— 7)	27770 (— 6)	90715 (— 6)	27791 (— 5)	80228 (— 5)
8,00	65836 (— 9)	26778 (— 8)	10095 (— 7)	35547 (— 7)	11760 (— 6)	36726 (— 6)
	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.	+ 0.

ХII. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА (СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ)

1. Определения и обозначения

Функциями Лежандра (или сферическими функциями) называют решения дифференциального уравнения

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] w = 0.$$

Здесь z — комплексная переменная, постоянные v, μ , называемые *индексами*, также могут быть произвольными комплексными числами. Однако в дальнейшем

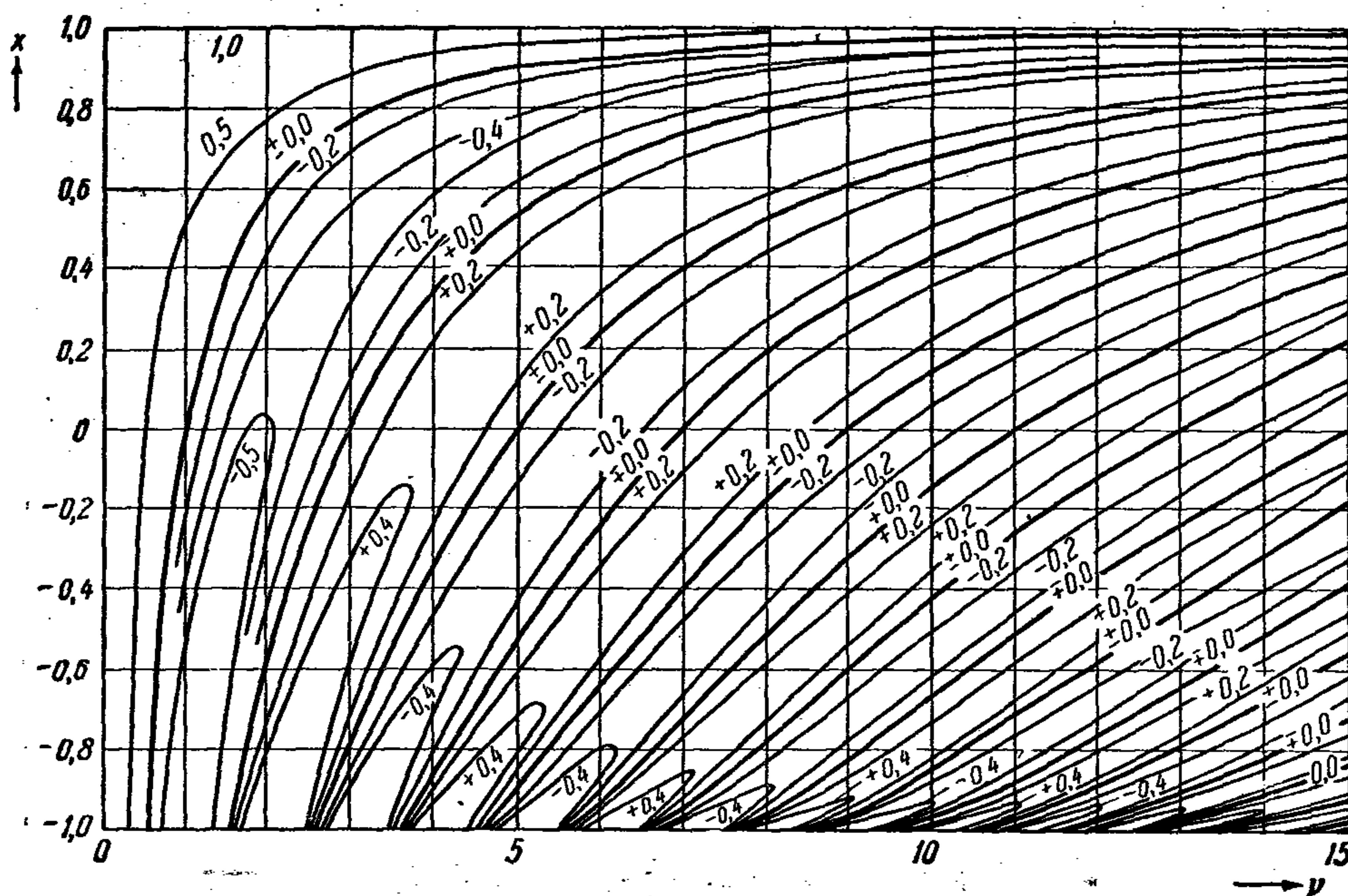


Рис. 88. Кривые $P_v(x) = \text{const}$ в плоскости v, x .

часто будет предполагаться, что индексы являются действительными целыми неотрицательными числами: $v = n$, $\mu = m$.

В частном случае $m=0$ получается дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + v(v+1)w = 0.$$

Это уравнение при $\nu = n \geq 0$ имеет своим решением полином $P_n(z)$, который называется *полиномом Лежандра первого рода n -й степени* (функцией Лежандра первого рода или *зональной гармонической сферической функцией 1-го рода*).

Второе решение, линейно независимое от первого, называется *функцией Лежандра 2-го рода* (или *зональной гармонической сферической функцией 2-го рода*). Она является бесконечнозначной аналитической функцией z , точками ветвления которой будут ± 1 . На интервале $-1 < x < 1$ действительной оси эта функция будет действительной однозначной функцией, которую далее будем обозначать через $Q_n(x)$. Далее, в комплексной плоскости, разрезанной вдоль действительной оси от -1 до $+1$, она определяет однозначную функцию, которая действительна вдоль полупрямой $x > 1$; эта ветвь функции в дальнейшем обозначается через $\mathfrak{Q}_n(z)$.

Для произвольного комплексного индекса ν дифференциальное уравнение Лежандра имеет два решения $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$, которые являются аналитическими функциями от ν и обращаются в $P_n(z)$, $Q_n(z)$ при $\nu = n$. Очевидно, $P_{-\nu-1}(z) = -P_\nu(z)$. Функции $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ — бесконечнозначные, точками ветвления для $P_\nu(z)$ будут -1 и ∞ , для $Q_\nu(z)$ — ± 1 и ∞ . Рис. 88 показывает $P_\nu(x)$ для действительных ν и x .

Решение при $m \neq 0$ может быть выражено через решение при $m = 0$. В общем случае $\nu = n$, $\mu = m \neq 0$ в качестве решений дифференциального уравнения получаем *присоединенные функции Лежандра 1-го рода* $P_n^m(z)$ и *2-го рода* $Q_n^m(z)$. Здесь n называется *степенью*, а m — *порядком* функции. На действительной оси между точками -1 и 1 обе функции будут действительными и обозначаются через $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$. Подобным образом можно определить в разрезанной от -1 до $+1$ комплексной плоскости однозначные ветви функций, действительные вдоль прямой $x > 1$ действительной оси; они обозначаются через $\mathfrak{P}_n^m(z)$ и $\mathfrak{Q}_n^m(z)$.

2. Функции Лежандра 1-го и 2-го рода

2.1. Полином (функция) Лежандра $P_n(z)$ n -й степени может быть определен как

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n.$$

С помощью производящей функции $[1 - 2zr + r^2]^{-1/2}$ можно получить полиномы Лежандра из разложения (выполняющегося для $|r| < \min |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$)

$$[1 - 2zr + r^2]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) r^n$$

или из разложения (выполняющегося для $|r| > \max |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$)

$$[1 - 2zr + r^2]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \frac{1}{r^{n+1}}.$$

Разложение $P_n(z)$ по степеням z имеет вид

$$P_n(z) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \left[z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - \dots \right].$$

Для действительного аргумента $x = \cos \vartheta$ имеем тригонометрическое представление

$$P_n(\cos \vartheta) = 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \left[\cos n\vartheta + \frac{1}{1} \cdot \frac{n}{2n-1} \cos (n-2)\vartheta + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos (n-4)\vartheta + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cos (n-6)\vartheta + \dots \right].$$

Если n — нечетное целое число, то сумма кончается на члене с $\cos \vartheta$; если n четное — на члене, не зависящем от $\cos \vartheta$, причем этот член умножается до-

полнительно на $\frac{1}{2}$.

Функции Лежандра низших степеней (рис. 89, 90, таблицы 38—40):

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x = \cos \vartheta,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\vartheta + 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{1}{64}(35 \cos 4\vartheta + 20 \cos 2\vartheta + 9),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15) = \frac{1}{128}(63 \cos 5\vartheta + 35 \cos 3\vartheta + 30 \cos \vartheta),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) = \frac{1}{512}(231 \cos 6\vartheta + 126 \cos 4\vartheta + 105 \cos 2\vartheta + 50).$$

2.2. Функции Лежандра 2-го рода при предположениях, сделанных выше относительно их определения, могут быть при $-1 < x < 1$ представлены в виде

$$Q_n(x) = P_n(x) \operatorname{Arth} x - W_{n-1}(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x),$$

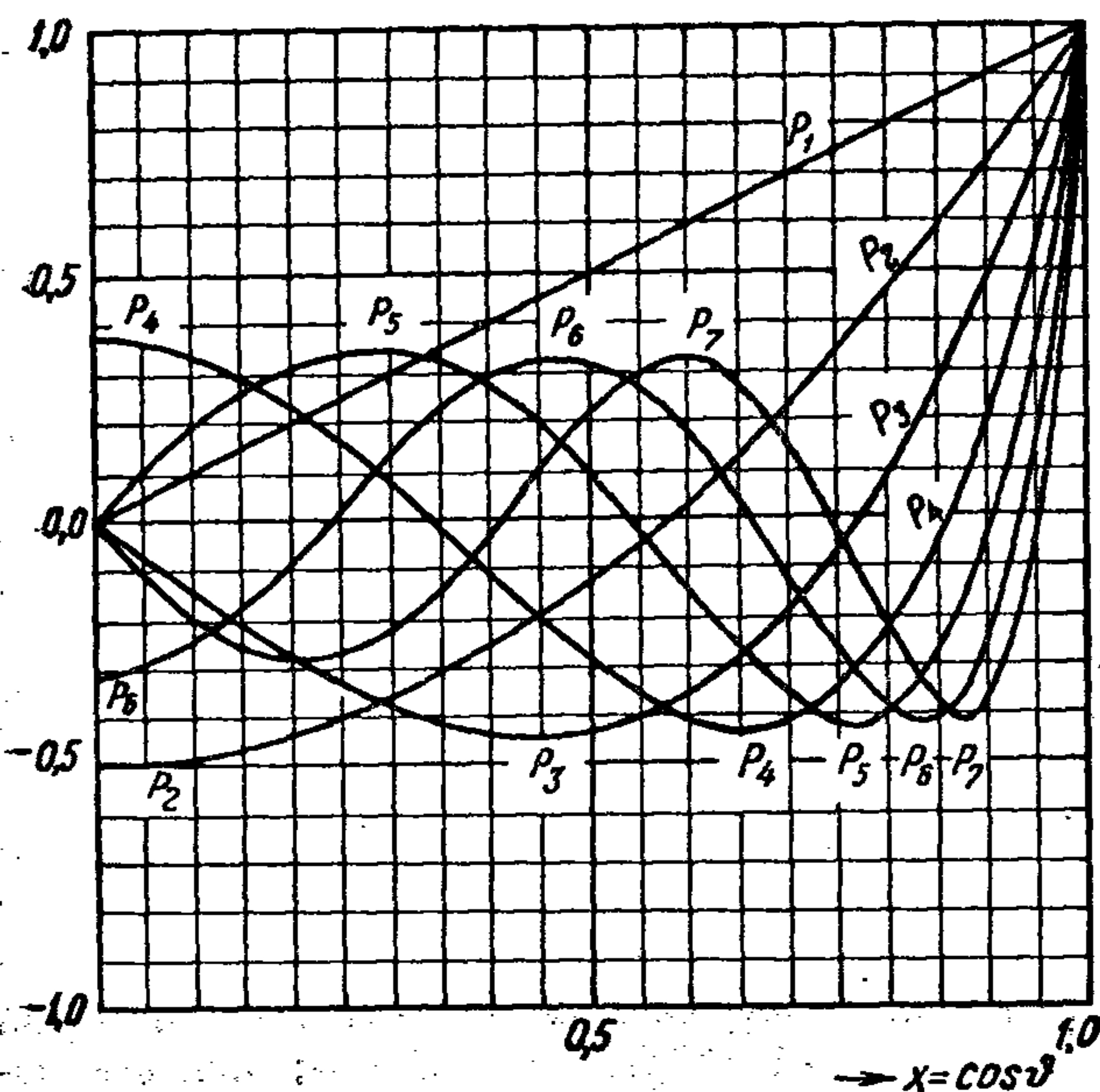


Рис. 89. Функции Лежандра 1-го рода $P_n(x)$.

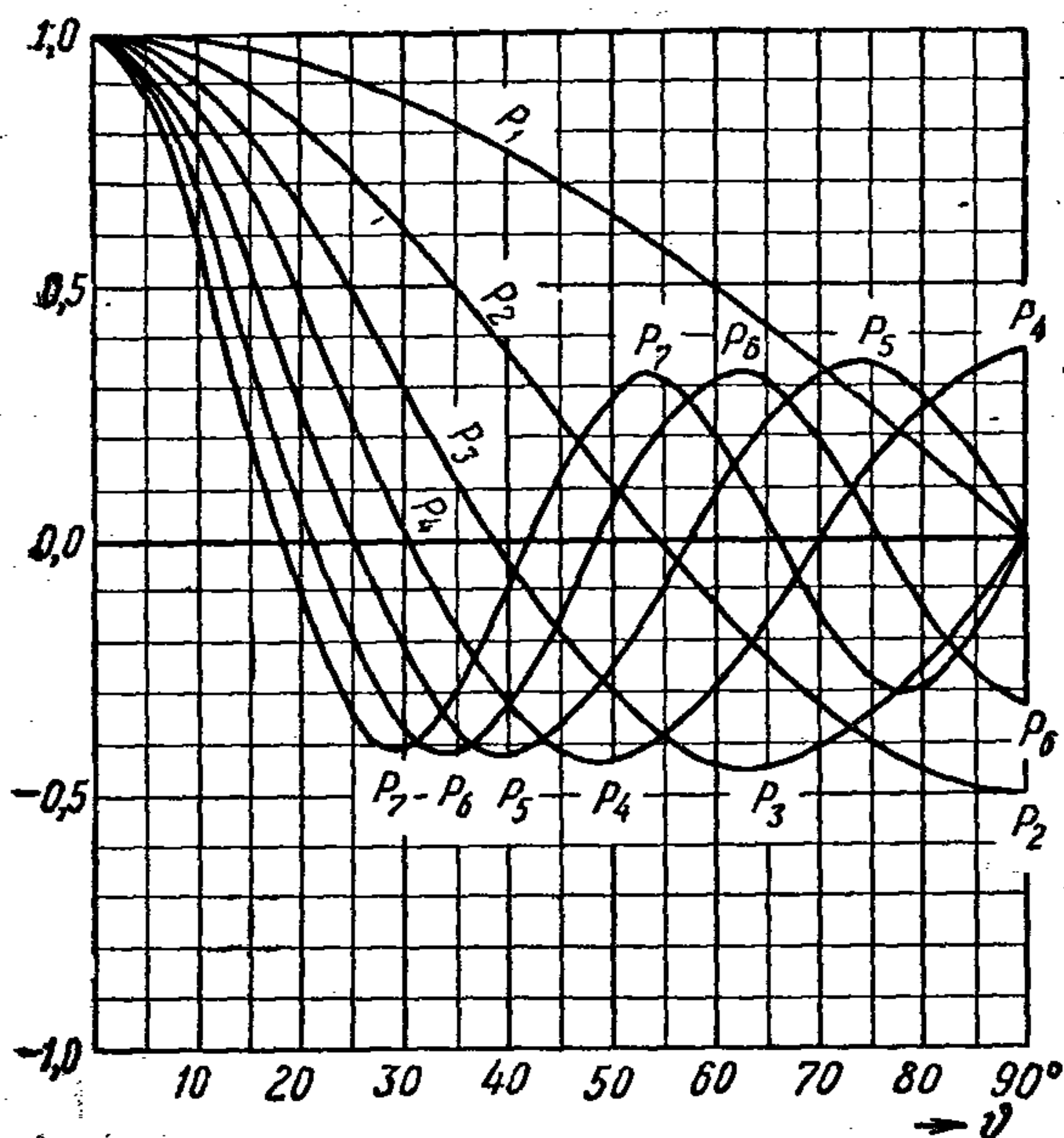


Рис. 90. Функции Лежандра 1-го рода $P_n(\cos \vartheta)$.

а для комплексного аргумента z вне отрезка $-1 \leq x \leq 1$ действительной оси — в виде

$$Q_n(z) = P_n(z) \operatorname{Arcth} z - W_{n-1}(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{z+1}{z-1} - W_{n-1}(z).$$

где $W_{n-1}(z)$ означает полином:

$$W_{n-1}(z) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} P_{m-1}(z) P_{n-m}(z) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left\{ z^{n-1} + z^{n-3} \left(\frac{1}{3} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \right) + \right. \\ \left. + z^{n-5} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \right) + \dots \right\}.$$

Если n четное, то $W_{n-1}(z)$ оканчивается на члене с z^1 , если n нечетное — на члене с z^0 .

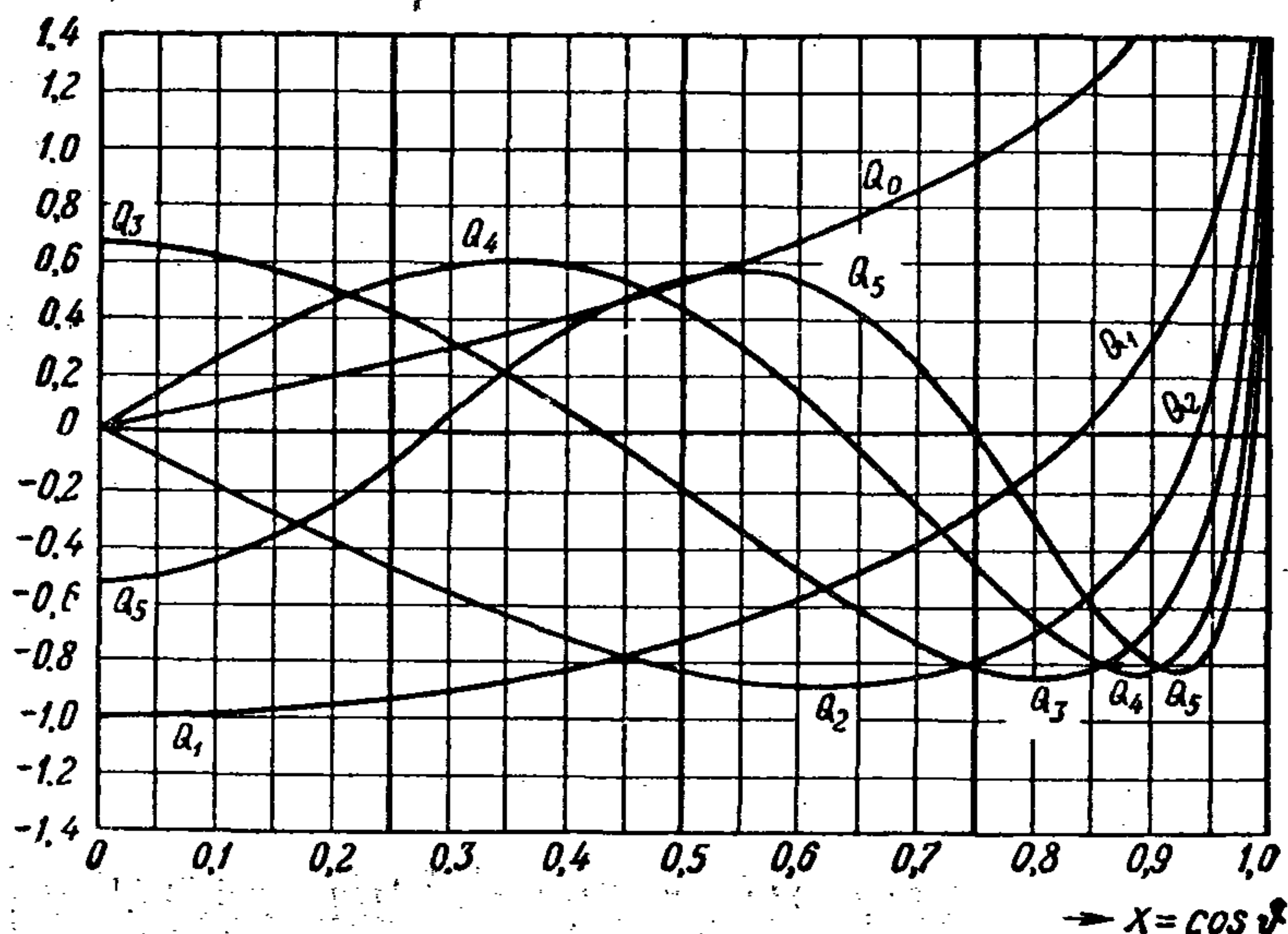


Рис. 91. Функции Лежандра 2-го рода $Q_n(x)$.

Если обозначить значения $\mathfrak{Q}_n(z)$ на верхнем и нижнем краях разреза $-1 < x < 1$ через $\mathfrak{Q}_n(x+0 \cdot i)$ и $\mathfrak{Q}_n(x-0 \cdot i)$, то

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \{ \mathfrak{Q}_n(x+0 \cdot i) + \mathfrak{Q}_n(x-0 \cdot i) \},$$

$$\mathfrak{Q}_n(x \pm 0 \cdot i) = Q_n(x) \mp \frac{1}{2} \pi i P_n(x).$$

Для $|z| > 1$ справедливо разложение

$$\mathfrak{Q}_n(z) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \left\{ \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot (2n+3)} \cdot \frac{1}{z^{n+3}} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} \cdot \frac{1}{z^{n+5}} + \dots \right\}.$$

Для действительного аргумента $x = \cos \vartheta$, $0 < \vartheta < \pi$, можно получить тригонометрическое представление

$$Q_n(\cos \vartheta) = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \left\{ \cos(n+1)\vartheta + \frac{1 \cdot (n+1)}{1 \cdot (2n+3)} \cos(n+3)\vartheta + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot (2n+3)(2n+5)} \cos(n+5)\vartheta + \dots \right\}.$$

Функции Лежандра 2-го рода низших индексов (рис. 91, таблица 41):

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{Arth} x, & Q_2(x) &= P_2(x) Q_0(x) - \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3}, \\ Q_1(x) &= x Q_0(x) - 1, & Q_4(x) &= P_4(x) Q_0(x) - \frac{35}{8} x^4 + \frac{55}{24} x, \\ Q_3(x) &= P_3(x) Q_0(x) - \frac{3}{2} x, & Q_5(x) &= P_5(x) Q_0(x) - \frac{63}{8} x^5 + \frac{49}{8} x^3 - \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Соответствующие выражения для $\mathcal{Q}_n(z)$ получаются при замене $\operatorname{Arth} x$ на $\operatorname{Arcth} z$.

3. Присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода

3.1. Присоединенные функции Лежандра 1-го рода на основании предположений, сделанных выше, определяются при $-1 < x < 1$ или при $x = \cos \vartheta$, $0 < \vartheta < \pi$, как

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n = \sin^m \vartheta \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{(d \cos \vartheta)^m}.$$

Более подробно

$$P_n^m(x) = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left\{ x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2 \cdot (2n-1)} x^{n-m-2} + \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-m-4} - \dots \right\}$$

или

$$P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{2^m m! (n-m)!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left\{ 1 - \frac{(n-m)(n+m+1)}{1 \cdot (m+1)} \frac{1-x}{2} + \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n+m+1)(n+m+2)}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} \left(\frac{1-x}{2} \right)^2 - \dots \right\}.$$

В частности, $P_n^n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) (1-x^2)^{\frac{n}{2}}$.

Присоединенные функции Лежандра 1-го рода низших индексов:

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sin \vartheta, \quad P_2^1(x) = 3(1-x^2)^{\frac{1}{2}} x = \frac{3}{2} \sin 2\vartheta,$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2} (1 - \cos 2\vartheta),$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (5x^2-1) = \frac{3}{8} (\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta),$$

$$P_3^2(x) = 15(1-x^2)x = \frac{15}{4} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta),$$

$$P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4} (3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta),$$

$$P_4^1(x) = \frac{5}{2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (7x^3-3x) = \frac{5}{16} (2 \sin 2\vartheta + 7 \sin 4\vartheta),$$

$$P_4^2(x) = \frac{15}{2} (1-x^2) (7x^2-1) = \frac{15}{16} (3 + 4 \cos 2\vartheta - 7 \cos 4\vartheta),$$

$$P_4^3(x) = 105(1-x^2)^{\frac{3}{2}} x = \frac{105}{8} (2 \sin 2\vartheta - \sin 4\vartheta),$$

$$P_4^4(x) = 105(1-x^2)^2 = \frac{105}{8} (3 - 4 \cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta).$$

В комплексной плоскости, разрезанной между точками -1 и $+1$, присоединенные функции Лежандра 1-го рода определяются как

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}.$$

Представления для $\mathfrak{P}_n^m(z)$, соответствующие приведенным выше формулам для $P_n^m(x)$, получаются, если заменить в этих формулах повсюду $(1 - x^2)^{m/2}$ через $(z^2 - 1)^{m/2}$ и x через z . Значения $\mathfrak{P}_n^m(z)$ на верхнем и нижнем краях разреза связаны соотношением

$$\mathfrak{P}_n^m(x \pm 0 \cdot i) = e^{\pm i \frac{\pi}{2} m} P_n^m(x).$$

3.2. Присоединенные функции Лежандра 2-го рода определяются при $-1 < x < 1$ или при $x = \cos \vartheta$, $0 < \vartheta < \pi$, как

$$Q_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m} = \sin^m \vartheta \frac{d^m Q_n(\cos \vartheta)}{(d \cos \vartheta)^m},$$

а в комплексной плоскости, разрезанной между точками -1 и $+1$:

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m \mathfrak{Q}_n(z)}{dz^m}.$$

Для $|z| > 1$ справедливо разложение

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \left\{ \frac{1}{z^{n+m+1}} + \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2(2n+3)} \frac{1}{z^{n+m+3}} + \dots \right\}.$$

Далее, для значений $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ на краях разреза выполнены равенства

$$Q_n^m(x) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-i \frac{\pi}{2} m} \mathfrak{Q}_n^m(x + 0 \cdot i) + e^{i \frac{\pi}{2} m} \mathfrak{Q}_n^m(x - 0 \cdot i) \right\},$$

$$\mathfrak{Q}_n^m(x \pm 0 \cdot i) = e^{\pm i \frac{\pi}{2} m} \left\{ Q_n^m(x) \mp i \frac{\pi}{2} P_n^m(x) \right\}.$$

Часто в литературе функции $(-1)^m P_n^m(x)$, $(-1)^m Q_n^m(x)$ обозначают через $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ и называют присоединенными функциями Лежандра.

4. Интегральные представления

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^{n+1}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z \pm \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi, \quad (\text{Лаплас})$$

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\vartheta \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \vartheta}} d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_\vartheta^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \varphi}} d\varphi, \quad (0 < \vartheta < \pi),$$

(Мелер)

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{(n+m)!}{\pi n!} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n \cos m\varphi d\varphi \quad [\arg(z^2 - 1) = 0 \text{ для } |z| > 1],$$

$$\mathfrak{Q}_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t)}{z-t} dt, \quad (\text{Нейман})$$

$$\Omega_n(z) = \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{(z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi)^{n+1}} = \int_0^{\psi_0} (z - \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi)^n d\psi \quad (\text{Гейне})$$

$$(\psi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}, \quad \operatorname{cth} \psi_0 = z; \quad \arg(z^2 - 1) = 0 \text{ для } |z| > 1).$$

$$\Omega_n^m(z) = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m\psi}{(z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi)^{n+1}} d\psi \quad [\arg(z^2 - 1) = 0 \text{ для } |z| > 1].$$

5. Частные значения. Асимптотика

5.1. Имеют место следующие равенства:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n},$$

$$Q_{2n}(0) = 0, \quad Q_{2n+1}(0) = (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} |Q_n(x)| = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \pm 1} |\Omega_n(z)| = \infty.$$

5.2. Все нули полинома $P_n(x)$ действительны, различны и лежат в интервале $-1 < x < 1$. Нули полиномов $P_n(x)$ и $P_{n+1}(x)$ разделяют друг друга. Присоединенная функция $P_n^m(z)$ имеет точно $n-m$ простых действительных нулей в интервале $-1 < x < 1$. Функция $Q_n(x)$ имеет точно $n+1$ нулей в интервале $-1 < x < 1$.

5.3. Для $|z| \gg 1$ получаем в первом приближении

$$\frac{(n-m)!}{\Gamma(n+1/2)} \mathfrak{P}_n^m(z) \approx \frac{(2z)^n}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\Gamma(n+3/2)}{(n+m)!} \Sigma_n^m(z) \approx (-1)^m \frac{\sqrt{\pi}}{(2z)^{n+1}}.$$

5.4. При $\varepsilon \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) имеем для $n \gg 1$, $n \gg \frac{1}{\varepsilon}$ асимптотическое представление

$$P_n(\cos \vartheta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \vartheta}} \left[\left(1 - \frac{1}{4n}\right) \sin \varphi - \frac{1}{8n} \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \right],$$

$$Q_n(\cos \vartheta) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n \sin \vartheta}} \left[\left(1 - \frac{1}{4n}\right) \cos \varphi + \frac{1}{8n} \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \right],$$

где $\varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta + \frac{\pi}{4}$, и для $n \gg 1$, $n \gg m$, $n \gg \frac{1}{\varepsilon}$

$$P_n^m(\cos \vartheta) \approx (-n)^m \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \vartheta}} \sin \left(\varphi + \frac{m\pi}{2} \right),$$

$$Q_n^m(\cos \vartheta) \approx (-n)^m \sqrt{\frac{\pi}{2n \sin \vartheta}} \cos \left(\varphi + \frac{m\pi}{2} \right),$$

где $\varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta + \frac{\pi}{4}$.

6. Функциональные уравнения. Нормированные функции Лежандра

6.1. Имеем правила изменения знака аргумента:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad Q_n(-x) = (-1)^{n+1} Q_n(x),$$

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n-m} P_n^m(x), \quad Q_n^m(-x) = (-1)^{n+m+1} Q_n^m(x).$$

Эти уравнения остаются верными, если заменить P через $\mathfrak{P}$ и Q через Ω .

6.2. Теорема сложения. Пусть α означает расстояние между двумя точками на единичной сфере с координатами (ϑ, φ) и (ϑ', φ') :

$$\cos \alpha = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi');$$

тогда

$$P_n(\cos \alpha) = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi')$$

или

$$\frac{2n+1}{2} P_n(\cos \alpha) = \sum_{m=-n}^{+n} \overline{P}_n^m(\cos \vartheta) \overline{P}_n^m(\cos \vartheta') e^{im(\varphi - \varphi')},$$

где $\overline{P}_n^m$ — нормированные функции (см. 6.6).

6.3. Соотношения между P и Q ($\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$):

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = \frac{1}{n}, \quad P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n = \frac{(2n-1)x}{n(n-1)},$$

$$\frac{Q_n}{P_n} = Q_0 - \left\{ \frac{1}{nP_n P_{n-1}} + \frac{1}{(n-1)P_{n-1} P_{n-2}} + \dots + \frac{1}{P_1 P_0} \right\},$$

$$(1-x^2)[P_n Q'_n - Q_n P'_n] = 1,$$

$$P_{n-1}^m Q_n^m - Q_{n-1}^m P_n^m = P_{n-2}^m Q_{n-1}^m - Q_{n-2}^m P_{n-1}^m.$$

Здесь у всех функций аргумент x .

Все равенства останутся верными, если заменим x через z и P через $\mathfrak{P}$, Q через $\mathfrak{Q}$.

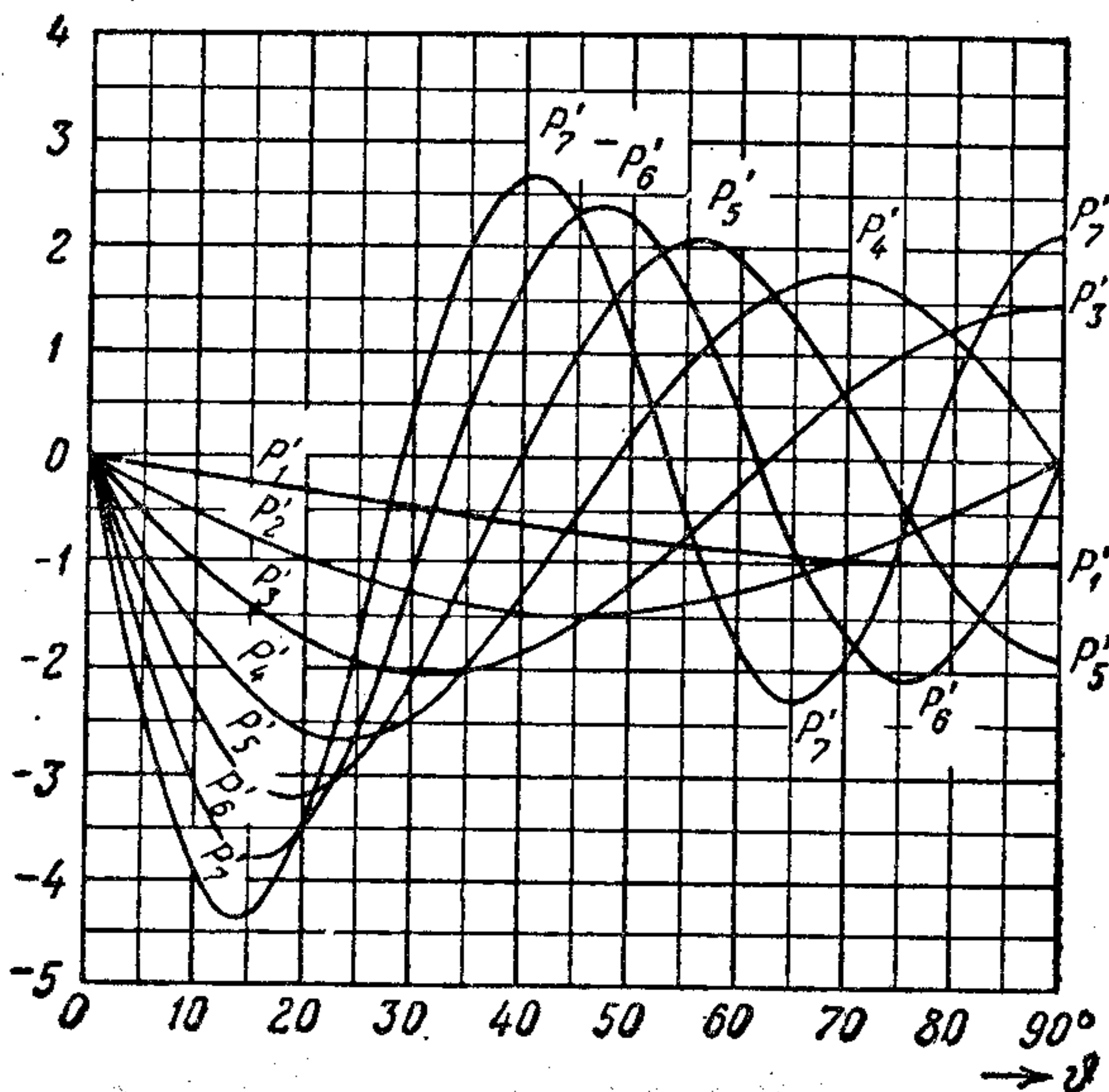


Рис. 92. Производные по ϑ от функций Лежандра 1-го рода $P_n(\cos \vartheta)$.

6.4. Пусть, далее, K означает любую функцию Лежандра, а именно, $K_n(x)$ означает $P_n(x)$ или $Q_n(x)$, $K_n(z)$ означает $\mathfrak{P}_n(z)$ или $\mathfrak{Q}_n(z)$ и K_n означает $K_n(x)$ или $K_n(z)$. Аналогичные значения имеют $K_n^m(x)$, $K_n^m(z)$ и K_n^m . В следующих формулах вместо ξ можно положить x или z .

Справедливы рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} nK_n + (n-1)K_{n-2} - (2n-1)\xi K_{n-1} &= 0, \\ K_n^{m+2}(z) + 2(m+1)\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}K_n^{m+1}(z) - (n-m)(n+m+1)K_n^m(z) &= 0, \\ K_n^{m+2}(x) - 2(m+1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}K_n^{m+1}(x) + (n-m)(n+m+1)K_n^m(x) &= 0, \\ (2n+1)\xi K_n^m - (n-m+1)K_{n+1}^m - (n+m)K_{n-1}^m &= 0. \end{aligned}$$

6.5. Дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1)K_n' &= n(\xi K_n - K_{n-1}) = -(n+1)(\xi K_n - K_{n+1}), \\ nK_n &= \xi K_n' - K_{n-1}'(n+1)K_n = -\xi K_n' + K_{n+1}', \\ (2n+1)K_n &= K_{n+1}' - K_{n-1}', \\ (\xi^2 - 1)(K_n^m)' &= (n-m+1)K_{n+1}^m + (n+1)\xi K_n^m = 0. \end{aligned}$$

Положив $x = \cos \vartheta$, получим производные по ϑ от полиномов Лежандра $P_n(\cos \vartheta)$ (рис. 92, таблица 40):

$$\frac{dP_{n+1}(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{dP_{n-1}(\cos \vartheta)}{d\vartheta} - (2n+1)P_n(\cos \vartheta)\sin \vartheta$$

и, в частности, для низших индексов:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= 0, \quad \frac{dP_1(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\sin \vartheta, \quad \frac{dP_2(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{3}{2}\sin 2\vartheta, \\ \frac{dP_3(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= -6\sin \vartheta + \frac{15}{2}\sin^3 \vartheta, \quad \frac{dP_4(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -5\sin 2\vartheta + \frac{35}{4}\sin^2 \vartheta \sin 2\vartheta, \\ \frac{dP_5(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= -15\sin \vartheta + \frac{105}{2}\sin^3 \vartheta - \frac{315}{8}\sin^5 \vartheta, \\ \frac{dP_6(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= -\frac{21}{2}\sin 2\vartheta + \frac{189}{4}\sin^2 \vartheta \sin 2\vartheta - \frac{693}{16}\sin^4 \vartheta \sin 2\vartheta, \\ \frac{dP_7(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= -28\sin \vartheta + 189\sin^3 \vartheta - \frac{693}{2}\sin^5 \vartheta + \frac{3003}{16}\sin^7 \vartheta. \end{aligned}$$

6.6. Соотношения ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_l(x) dx &= 0, \text{ если } l \neq n, \quad \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \\ \int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_l^m(x) dx &= 0, \text{ если } l \neq n, \quad \int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \end{aligned}$$

Отсюда получим нормированные функции Лежандра (рис. 93—96):

$$\bar{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad \bar{P}_n^m(x) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}} P_n^m(x).$$

Далее,

$$\int_{-1}^{+1} \bar{P}_n^m(x) \bar{P}_n^l(x) \frac{dx}{1-x^2} = 0 \text{ для } l \neq m, \quad \int_{-1}^{+1} [\bar{P}_n'(x)]^2 dx = n(n+1),$$

$$(2n+1) \int_1^\infty [\mathfrak{Q}_n(z)]^2 dz = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots,$$

$$(2n+1) \int_0^1 [Q_n(x)]^2 dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \dots$$

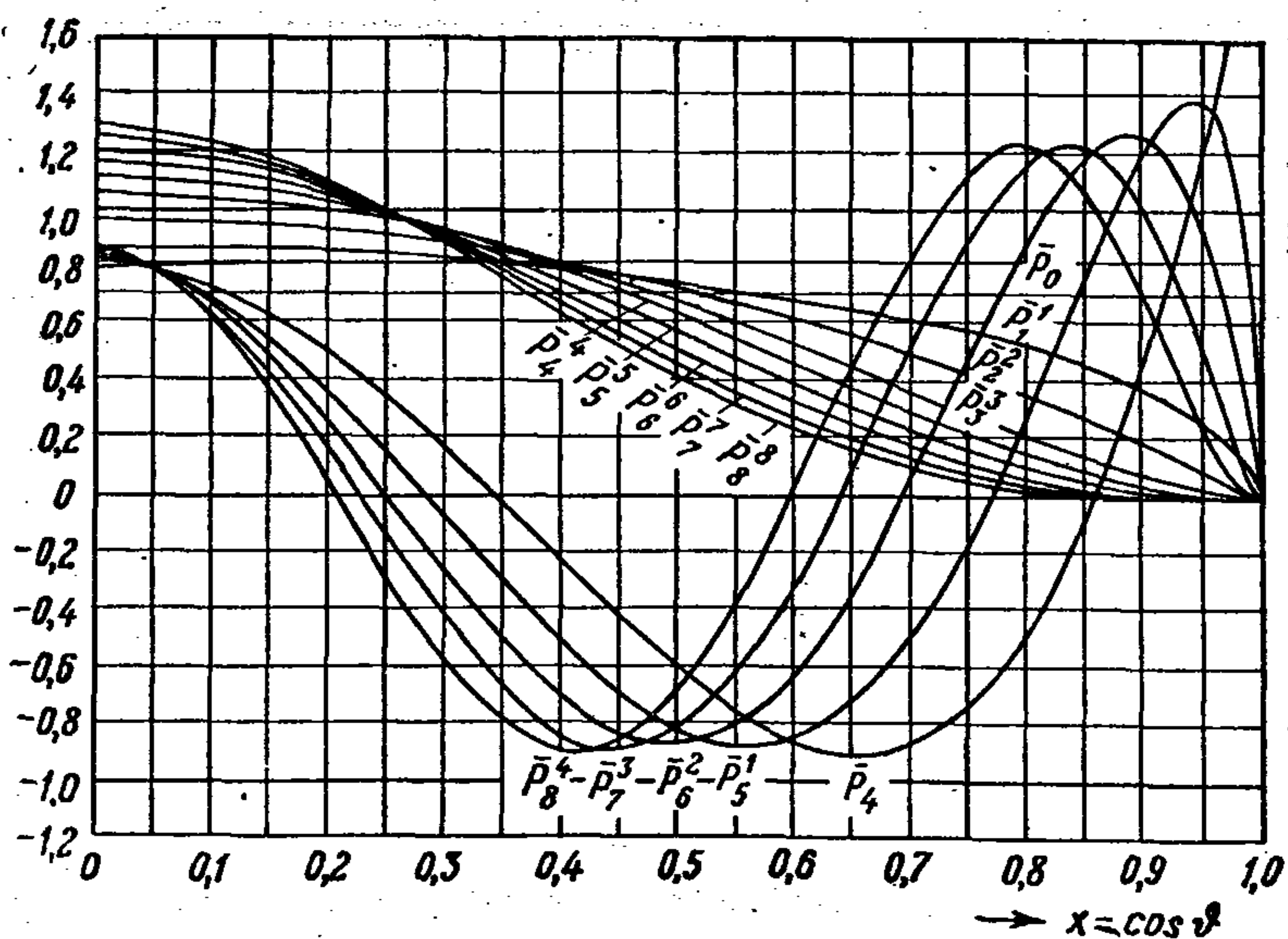


Рис. 93. Нормированные присоединенные функции Лежандра

$$\bar{P}_n^n(x) \text{ и } \bar{P}_{n+4}^n(x).$$

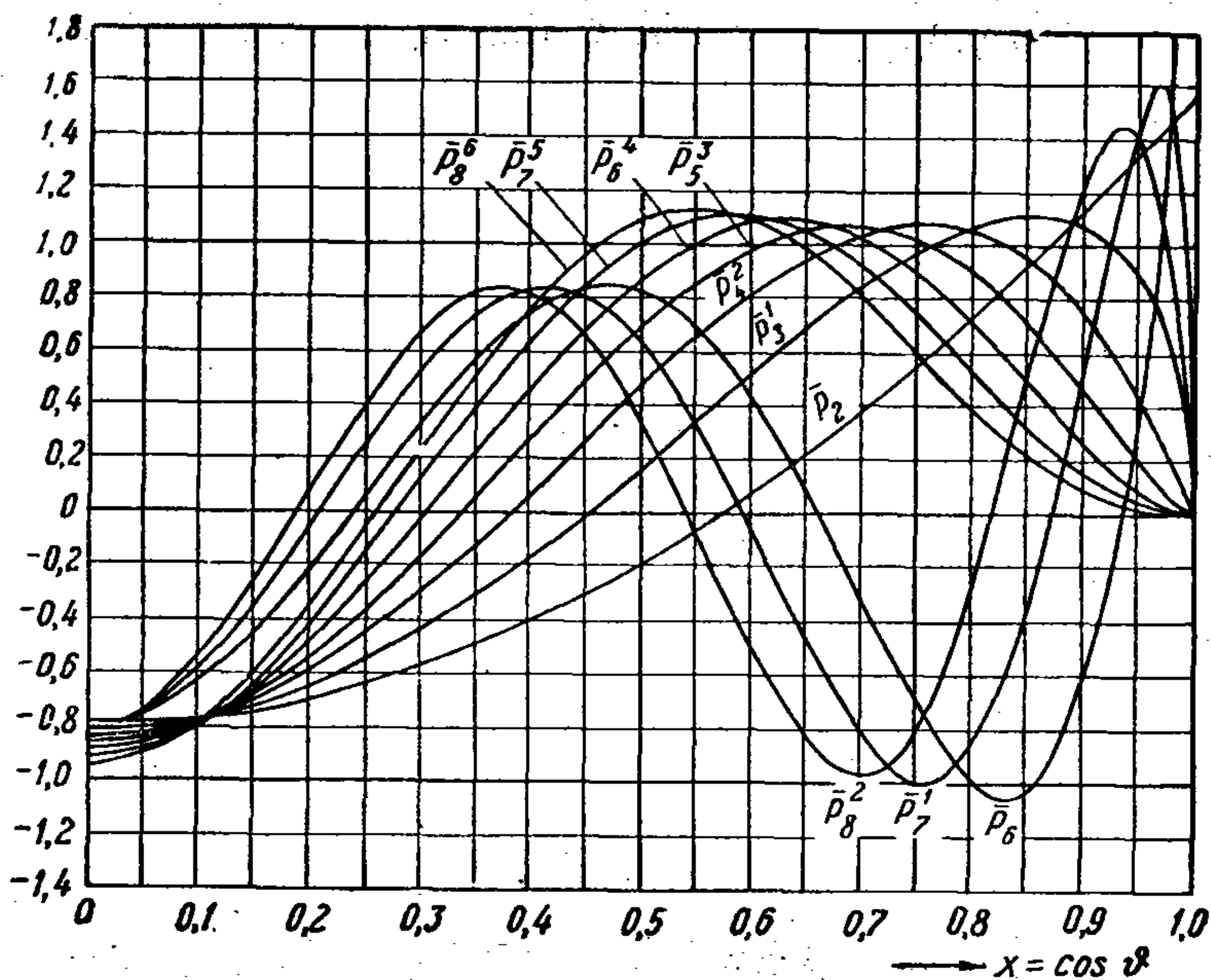


Рис. 94. Нормированные присоединенные функции Лежандра

$$\bar{P}_{n+2}^n(x) \text{ и } \bar{P}_{n+6}^n(x).$$

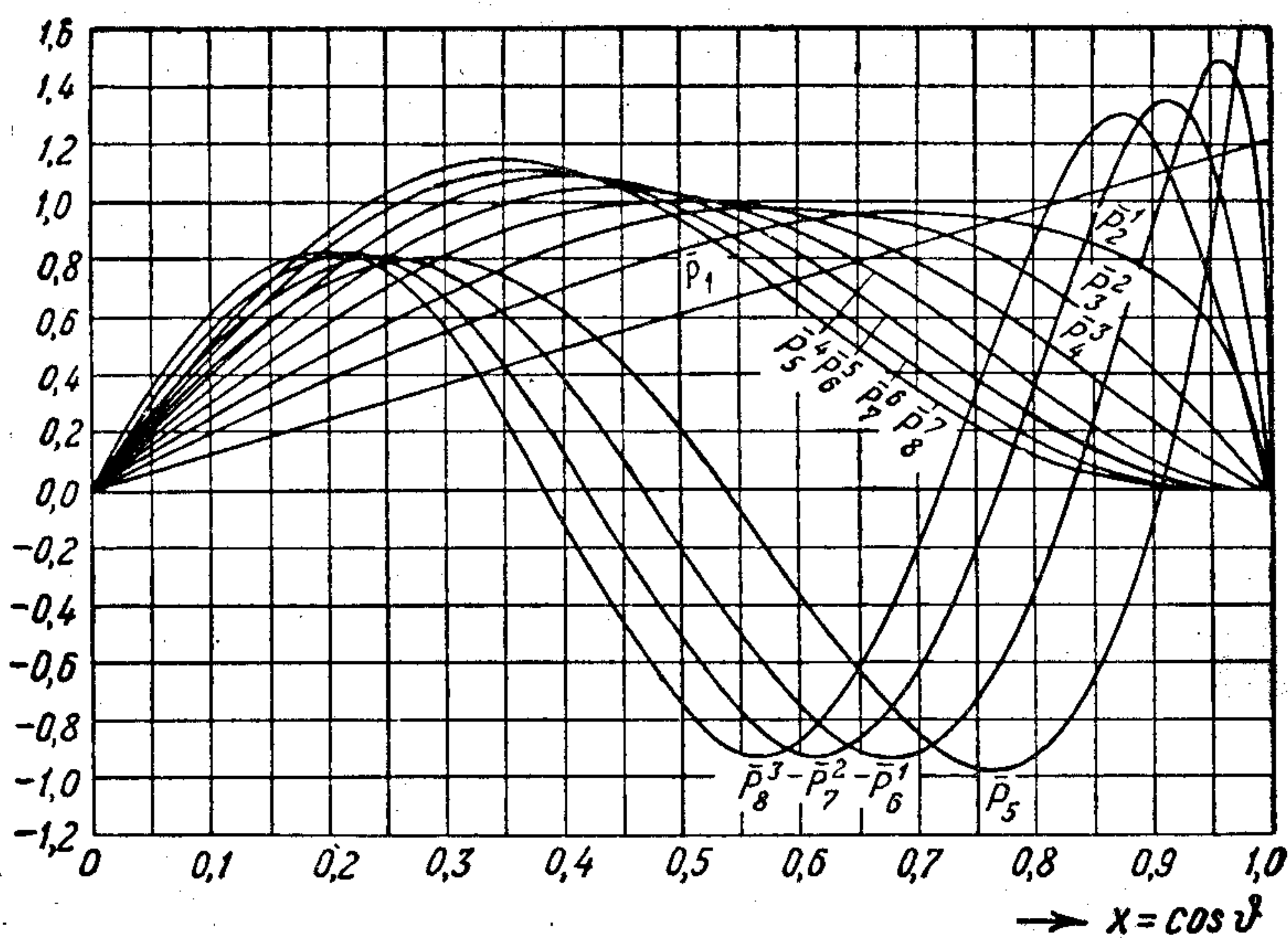


Рис. 95. Нормированные присоединенные функции Лежандра $\bar{P}_{n+1}^n(x)$ и $\bar{P}_{n+5}^n(x)$.

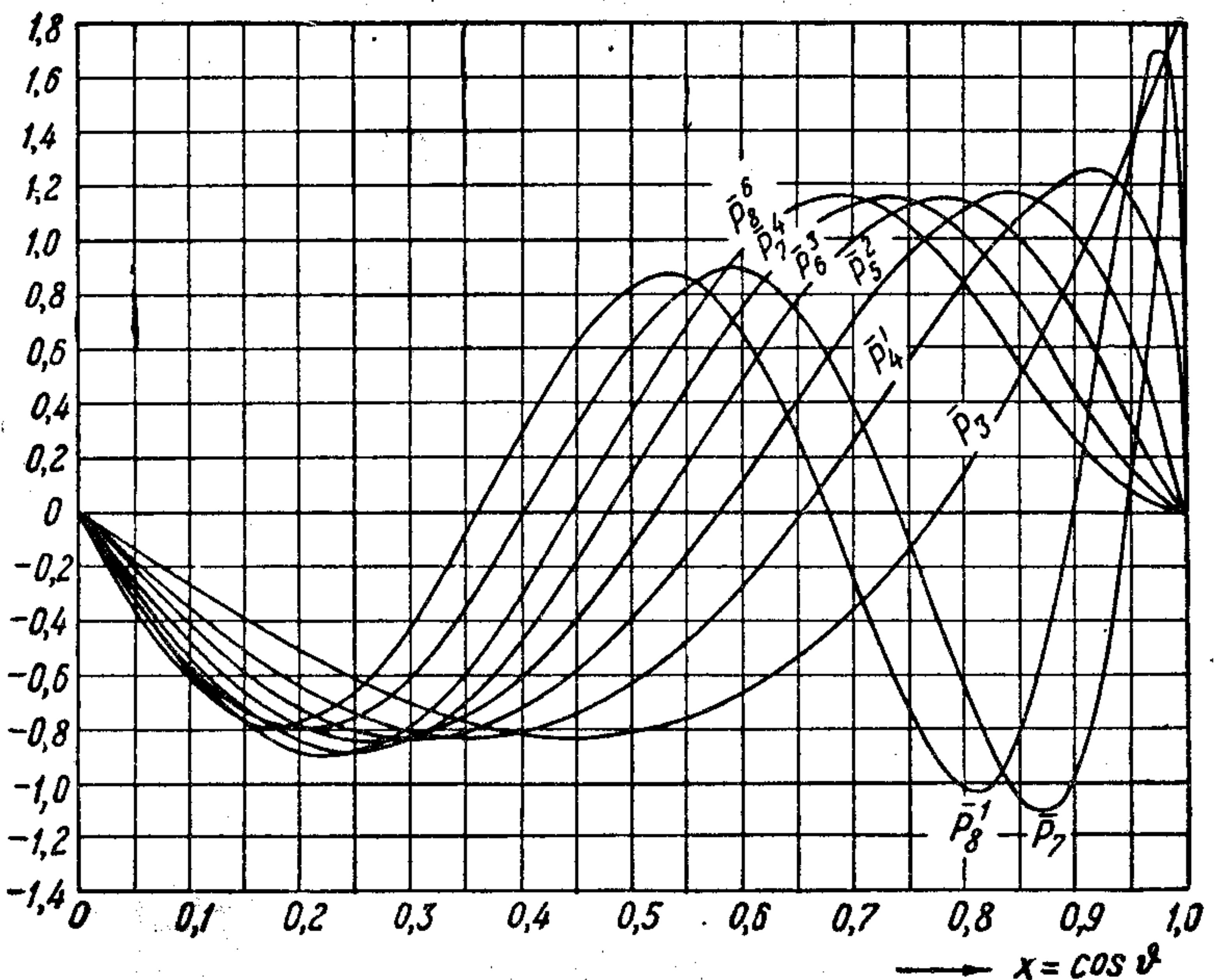


Рис. 96. Нормированные присоединенные функции Лежандра $\bar{P}_{n+3}^n(x)$ и $\bar{P}_{n+7}^n(x)$.

Таблица 38. Полиномы Лежандра $P_n(x)$

$x =$ $P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
	— 0,	— 0,	+ 0,	+ 0,	— 0,	— 0,
0,00	5000 + 2	0000 — 150	3750 — 4	0000 + 187	3125 + 7	0000 — 219
01	4998 + 4	0150 150	3746 11	0187 187	3118 19	0219 217
02	4994 + 8	0300 149	3735 19	0374 186	3099 33	0436 215
03	4986 + 10	0449 149	3716 26	0560 184	3066 45	0651 211
04	4976 + 14	0598 149	3690 33	0744 183	3021 59	0862 207
0,05	4962 + 16	0747 — 148	3657 — 41	0927 + 179	2962 + 71	1069 — 201
06	4946 + 20	0895 146	3616 49	1106 177	2891 83	1270 194
07	4926 + 22	1041 146	3567 55	1283 172	2808 95	1464 187
08	4904 + 26	1187 145	3512 63	1455 169	2713 107	1651 177
09	4878 + 28	1332 143	3449 70	1624 164	2606 118	1828 167
0,10	4850 + 32	1475 — 142	3379 — 76	1788 + 159	2488 + 128	1995 — 156
11	4818 + 34	1617 140	3303 84	1947 154	2360 140	2151 144
12	4784 + 38	1757 138	3219 90	2101 147	2220 149	2295 132
13	4746 + 40	1895 136	3129 97	2248 141	2071 158	2427 118
14	4706 + 44	2031 135	3032 104	2389 134	1913 167	2545 104
0,15	4662 + 46	2166 — 132	2928 — 109	2523 + 127	1746 + 174	2649 — 89
16	4616 + 50	2298 129	2819 116	2650 119	1572 183	2738 74
17	4566 + 52	2427 127	2703 122	2769 111	1389 188	2812 58!
18	4514 + 56	2554 125	2581 128	2880 102	1201 195	2870 41!
19	4458 + 58	2679 121	2453 133	2982 93	1006 200	2911 24!
0,20	4400 + 62	2800 — 118	2320 — 139	3075 + 84	0806 + 205	2935 — 8!
21	4338 + 64	2918 116	2181 144	3159 75	0601 207	2943 + 10!
22	4274 + 68	3034 112	2037 148	3234 65	0394 211	2933 27!
23	4206 + 70	3146 108	1889 154	3299 54	0183 212	2906 45!
24	4136 + 74	3254 105	1735 158	3353 44	*0029 214	2861 62!
0,25	4062 + 76	3359 — 102	1577 — 162	3397 + 34	0243 + 213	2799 + 79!
26	3986 + 80	3461 97	1415 166	3431 22	0456 213	2720 95!
27	3906 + 82	3558 93	1249 170	3453 + 12	0669 210	2625 113
28	3824 + 86	3651 89	1079 173	3465 0	0879 208	2512 128
29	3738 + 88	3740 85	0906 177	3465 — 11	1087 205	2384 143
0,30	3650 + 92	3825 — 80	0729 — 179	3454 — 23	1292 + 200	2241 + 159
31	3558 + 94	3905 76	0550 181	3431 34	1492 194	2082 172
32	3464 + 98	3981 71	0369 184	3397 46	1686 187	1910 186
33	3366 + 100	4052 65	0185 185	3351 57	1873 180	1724 197
34	3266 + 104	4117 61	*0000 187	3294 69	2053 172	1527 209
0,35	3162 + 106	4178 — 56	0187 — 188	3225 — 81	2225 + 163	1318 + 220
36	3056 + 110	4234 50	0375 189	3144 93	2388 152	1098 228
37	2946 + 112	4284 44	0564 189	3051 103	2540 141	0870 235
38	2834 + 116	4328 39	0753 189	2948 115	2681 129	0635 242
39	2718 + 118	4367 33	0942 188	2833 127	2810 116	0393 247
0,40	2600 + 122	4400 — 27	1130 — 187	2706 — 137	2926 — 14	0146 + 250
41	2478 + 124	4427 21	1317 187	2569 148	3029 14	*0104 252
42	2354 + 128	4448 14	1504 184	2421 158	3118 15	0356 252
43	2226 + 130	4462 8	1688 182	2263 168	3191 16	0608 251
44	2096 + 134	4470 — 2	1870 180	2095 178	3249 16	0859 247
0,45	1962 + 136	4472 + 5	2050 — 176	1917 — 187	3290 — 17	1106 + 242
46	1826 + 140	4467 13	2226 173	1730 196	3314 17	1348 236
47	1686 + 142	4454 19	2399 169	1534 204	3321 18	1584 227
48	1544 + 146	4435 26	2568 164	1330 212	3310 18	1811 216
49	1398 + 148	4409 34	2732 159	1118 220	3280 19	2027 204
0,50	1250	4375	2891	0898	3232 — 19	2231
	— 0,	— 0,	— 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 38

$x =$ $P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,50	-0,1250	-0,4375	-0,2891	+ 0,0898	+ 0,3232	+ 0,2231
51	0,1098 + 152	0,4334 + 41	0,3044 - 153	0,0673 - 225	0,3166 19	0,2422 16
52	0,0944 154	0,4285 49	0,3191 147	0,0441 232	0,3080 19	0,2596 18
53	0,0786 158	0,4228 57	0,3191 141	+ 0,0204 237	0,2975 19	0,2753 19
54	0,0626 160	0,4163 65	0,3332 133	- 0,0037 241	0,2851 19	0,2891 21
	164	72	125	245		
0,55	- 0,0462	- 0,4091	- 0,3590	- 0,0282	+ 0,2708	+ 0,3007
56	0,0296 + 166	0,4010 + 81	0,3707 - 117	0,0529 - 247	0,2546 18	0,3102 24
57	- 0,0126 170	0,3920 90	0,3815 108	0,0779 250	0,2366 18	0,3172 25
58	+ 0,0046 172	0,3822 98	0,3914 99	0,1028 249	0,2168 17	0,3217 27
59	0,0221 175	0,3716 106	0,4002 88	0,1278 250	0,1953 17	0,3235 28
	179	116	78	248		
0,60	+ 0,0400	- 0,3600	- 0,4080	- 0,1526	+ 0,1721	+ 0,3226
61	0,0581 + 181	0,3475 + 125	0,4146 - 66	0,1772 - 246	0,1473 15	0,3188 29
62	0,0766 185	0,3342 133	0,4146 54	0,2014 242	0,1211 14	0,3121 30
63	0,0953 187	0,3199 143	0,4200 42	0,2251 237	0,0935 12	0,3023 30
64	0,1144 191	0,3046 153	0,4242 28	0,2482 231	0,0646 11	0,2895 31
	193	162	14	223		
0,65	+ 0,1337	- 0,2884	- 0,4284	- 0,2705	+ 0,0347	+ 0,2737
66	0,1534 + 197	0,2713 + 171	0,4284 15	0,2919 - 214	+ 0,0038 8	0,2548 30
67	0,1733 199	0,2531 182	0,4268 15	0,3122 203	- 0,0279 6	0,2329 29
68	0,1936 203	0,2339 192	0,4236 16	0,3313 191	0,0601 4	0,2081 28
69	0,2141 205	0,2137 202	0,4187 17	0,3490 177	0,0926 - 1	0,1805 27
	209	212	17	162		
0,70	+ 0,2350	- 0,1925	- 0,4121	- 0,3652	- 0,1253	+ 0,1502
71	0,2561 + 211	0,1702 + 223	0,4036 18	0,3796 + 17	0,1578 4	0,1173 23
72	0,2776 215	0,1469 233	0,3933 19	0,3922 19	0,1899 7	0,0822 20
73	0,2993 217	0,1225 244	0,3810 20	0,4026 21	0,2214 10	0,0450 17
74	0,3214 221	0,0969 256	0,3666 20	0,4107 23	0,2518 14	+ 0,0061 14
	228	266	21	25		
0,75	+ 0,3437	- 0,0703	- 0,3501	- 0,4164	- 0,2808	- 0,0342
76	0,3664 + 227	0,0426 + 277	0,3314 + 22	0,4193 + 27	0,3081 + 17	0,0754 - 10
77	0,3893 229	- 0,0137 289	0,3104 23	0,4193 29	0,3333 21	0,1171 5
78	0,4126 233	+ 0,0164 301	0,2871 24	0,4162 31	0,3559 25	0,1588 + 0
79	0,4361 235	0,0476 312	0,2613 24	0,4097 34	0,3756 30	0,1999 + 6
	239	324	25	36		13
0,80	+ 0,4600	+ 0,0800	- 0,2330	- 0,3995	- 0,3918	- 0,2397
81	0,4841 + 241	0,1136 + 336	0,2021 + 26	0,3855 + 39	0,4041 + 39	0,2774 + 20
82	0,5086 245	0,1484 348	0,1685 27	0,3674 41	0,4119 45	0,3124 28
83	0,5333 247	0,1845 361	0,1321 28	0,3449 44	0,4147 50	0,3437 37
84	0,5584 251	0,2218 373	0,0928 29	0,3177 46	0,4120 56	0,3703 46
	253	385	30	49		57
0,85	+ 0,5837	+ 0,2603	- 0,0506	- 0,2857	- 0,4030	- 0,3913
86	0,6094 + 257	0,3001 + 398	- 0,0053 + 30	0,2484 + 52	0,3872 + 68	0,4055 + 68
87	0,6353 259	0,3413 412	+ 0,0431 31	0,2056 55	0,3638 75	0,4116 80
88	0,6616 263	0,3837 424	0,0947 32	0,1570 58	0,3322 82	0,4083 94
89	0,6881 265	0,4274 437	0,1496 33	0,1023 61	0,2916 90	0,3942 108
	269	451	34	64		123
0,90	+ 0,7150	+ 0,4725	+ 0,2079	- 0,0411	- 0,2412	- 0,3678
91	0,7421 + 271	0,5189 + 464	0,2698 + 35	+ 0,0268 + 68	0,1802 + 106	0,3274 + 140
92	0,7696 275	0,5667 478	0,3352 36	0,1017 71	0,1077 114	0,2713 157
93	0,7973 277	0,6159 492	0,4044 37	0,1842 74	- 0,0229 123	0,1975 176
94	0,8254 281	0,6665 506	0,4773 38	0,2744 78	+ 0,0751 133	- 0,1040 196
	283	519	39	81		218
0,95	+ 0,8537	+ 0,7184	+ 0,5541	+ 0,3727	+ 0,1875	+ 0,0112
96	0,8824 + 287	0,7718 + 534	0,6349 + 40	0,4796 + 85	0,3151 + 153	0,1506 + 241
97	0,9113 289	0,8267 549	0,7198 41	0,5954 89	0,4590 163	0,3165 265
98	0,9406 293	0,8830 563	0,8089 42	0,7204 93	0,6204 174	0,5115 291
99	0,9701 295	0,9407 577	0,9022 43	0,8552 97	0,8003 186	0,7384 318
	299	593	44	101		347
1,00	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000
			+ 45	+ 105	+ 210	+ 378

Таблица 39. Полиномы Лежандра $P_n(\cos \vartheta)$

ϑ	$P_1(\cos \vartheta)$	$P_2(\cos \vartheta)$	$P_3(\cos \vartheta)$	$P_4(\cos \vartheta)$	$P_5(\cos \vartheta)$	$P_6(\cos \vartheta)$	$P_7(\cos \vartheta)$
	+ 1,	+ 1,					
0°	0000 — 2	0000 — 5	+ 1,0000 — 9!	+ 1,0000 — 30	+ 1,0000 — 46	+ 1,0000 — 64	+ 1,0000 — 85
1°	*9998 — 4	*9995 — 13	0,9991 — 28!	0,9985 — 30	0,9977 — 46	0,9968 — 64	0,9957 — 85
2°	9994 — 8	9982 — 23	0,9963 — 45!	0,9939 — 30	0,9909 — 45	0,9872 — 63	0,9830 — 83
3°	9986 — 10	9959 — 32	0,9918 — 64!	0,9863 — 30	0,9795 — 44	0,9714 — 61	0,9620 — 81
4°	9976 — 14	9927 — 41	0,9854 — 81!	0,9758 — 29	0,9638 — 43	0,9495 — 59	0,9329 — 77
5°	9962 — 17	9886 — 50	+ 0,9773 — 99!	+ 0,9623 — 29	+ 0,9437 — 42	+ 0,9216 — 57	+ 0,8962 — 72
6°	9945 — 20	9836 — 59	0,9674 — 117!	0,9459 — 28	0,9194 — 40	0,8881 — 53	0,8522 — 67
7°	9925 — 22	9777 — 68	0,9557 — 134!	0,9267 — 27	0,8911 — 38	0,8492 — 50	0,8016 — 60
8°	9903 — 26	9709 — 76	0,9423 — 150!	0,9048 — 26	0,8589 — 36	0,8054 — 46	0,7449 — 53
9°	9877 — 29	9633 — 85	0,9273 — 167!	0,8803 — 25	0,8232 — 34	0,7570 — 41	0,6830 — 46
10°	9848 — 32	9548 — 94	+ 0,9106 — 183	+ 0,8532 — 24	+ 0,7840 — 31	+ 0,7045 — 36	+ 0,6164 — 37
11°	9816 — 35	9454 — 102	0,8923 — 199	0,8238 — 23	0,7417 — 29	0,6483 — 31	0,5462 — 29
12°	9781 — 37	9352 — 111	0,8724 — 213	0,7920 — 21	0,6966 — 26	0,5891 — 26	0,4731 — 20
13°	9744 — 41	9241 — 119	0,8511 — 228	0,7582 — 20	0,6489 — 22	0,5273 — 20	0,3980 — 11
14°	9703 — 44	9122 — 127	0,8283 — 241	0,7224 — 18	0,5990 — 19	0,4635 — 14	0,3218 — 1
15°	9659 — 46	8995 — 135	+ 0,8042 — 255	+ 0,6847 — 17	+ 0,5471 — 16	+ 0,3983 — 8	+ 0,2455 + 8
16°	9613 — 50	8860 — 142	0,7787 — 268	0,6454 — 15	0,4937 — 12	0,3323 — 2	0,1700 — 17
17°	9563 — 52	8718 — 150	0,7519 — 279	0,6046 — 13	0,4391 — 9	0,2661 + 4	0,0961 — 25
18°	9511 — 56	8568 — 158	0,7240 — 290	0,5624 — 11	0,3836 — 5	0,2002 — 10	+ 0,0248 — 33
19°	9455 — 58	8410 — 165	0,6950 — 301	0,5192 — 9	0,3276 — 1	0,1353 — 15	— 0,0433 — 41
20°	9397 — 61	8245 — 171	+ 0,6649 — 311	+ 0,4750 — 8	+ 0,2715 + 2	+ 0,0719 + 21	— 0,1072 + 48
21°	9336 — 64	8074 — 179	0,6338 — 319	0,4300 — 6	0,2156 — 6	+ 0,0106 — 26	0,1664 — 54
22°	9272 — 67	7895 — 185	0,6019 — 327	0,3845 — 4	0,1602 — 9	— 0,0481 — 31	0,2202 — 60
23°	9205 — 70	7710 — 192	0,5692 — 335	0,3386 — 2	0,1057 — 13	0,1038 — 35	0,2680 — 64
24°	9135 — 72	7518 — 197	0,5357 — 341	0,2926 — 0	0,0525 — 16	0,1558 — 40	0,3094 — 68
25°	9063 — 75	7321 — 204	+ 0,5016 — 346	+ 0,2465 + 2	+ 0,0009 + 19	— 0,2040 + 43	— 0,3441 + 70
26°	8988 — 78	7117 — 209	0,4670 — 351	0,2007 — 4	— 0,0489 — 22	0,2478 — 47	0,3717 — 72
27°	8910 — 81	6908 — 214	0,4319 — 355	0,1553 — 6	0,0964 — 25	0,2869 — 49	0,3922 — 73
28°	8829 — 83	6694 — 220	0,3964 — 357	0,1105 — 8	0,1415 — 27	0,3212 — 52	0,4053 — 72
29°	8746 — 86	6474 — 224	0,3607 — 359	0,0665 — 10	0,1839 — 30	0,3502 — 53	0,4113 — 71
30°	8660 — 88	6250 — 229	+ 0,3248 — 361	+ 0,0234 + 11	— 0,2233 + 32	— 0,3740 + 54	— 0,4102 + 69
31°	8572 — 92	6021 — 233	0,2887 — 360	— 0,0185 — 13	0,2595 — 34	0,3924 — 55	0,4022 — 65
32°	8480 — 93	5788 — 237	0,2527 — 360	0,0591 — 15	0,2923 — 35	0,4053 — 55	0,3877 — 61
33°	8387 — 97	5551 — 241	0,2167 — 358	0,0982 — 16	0,3216 — 37	0,4127 — 54	0,3671 — 56
34°	8290 — 98	5310 — 245	0,1809 — 355	0,1357 — 18	0,3473 — 38	0,4147 — 53	0,3409 — 51
35°	8192 — 102	5065 — 247	+ 0,1454 — 352	— 0,1714 + 19	— 0,3691 + 39	— 0,4114 + 51	— 0,3096 + 44
36°	8090 — 104	4818 — 251	0,1102 — 347	0,2052 — 20	0,3871 — 39	0,4031 — 49	0,2738 — 38
37°	7986 — 106	4567 — 253	0,0755 — 342	0,2370 — 22	0,4011 — 39	0,3898 — 46	0,2343 — 30
38°	7880 — 109	4314 — 255	0,0413 — 336	0,2666 — 23	0,4112 — 39	0,3719 — 43	0,1918 — 23
39°	7771 — 111	4059 — 257	+ 0,0077 — 329	0,2940 — 24	0,4174 — 39	0,3497 — 40	0,1470 — 15
40°	7660 — 113	3802 — 258	— 0,0252 — 322	— 0,3190 + 24	— 0,4197 + 38	— 0,3236 + 36	— 0,1006 + 7
41°	7547 — 116	3544 — 260	0,0574 — 313	0,3416 — 25	0,4181 — 38	0,2939 — 31	0,0535 — 0
42°	7431 — 117	3284 — 261	0,0887 — 304	0,3616 — 26	0,4128 — 36	0,2610 — 27	— 0,0064 — 8
43°	7314 — 121	3023 — 261	0,1191 — 294	0,3791 — 26	0,4038 — 35	0,2255 — 22	+ 0,0398 — 15
44°	7193 — 122	2762 — 262	0,1485 — 283	0,3940 — 26	0,3914 — 33	0,1878 — 17	0,0846 — 22
45°	7071 — 122	2500 — 262	— 0,1768 — 283	— 0,4062 + 27	— 0,3757 + 31	— 0,1484 + 12	+ 0,1271 — 29
	+ 0,	+ 0,					

Продолжение табл. 39

θ	$P_1(\cos \theta)$	$P_2(\cos \theta)$	$P_3(\cos \theta)$	$P_4(\cos \theta)$	$P_5(\cos \theta)$	$P_6(\cos \theta)$	$P_7(\cos \theta)$
	+ 0,	+ 0,	- 0,	- 0,	- 0,		+ 0,
45°	7071 — 124	2500 — 262	1768 — 272	4062 + 27	3757 + 31	- 0,1484 + 12	1271 — 29
46°	6947 127	2238 261	2040 260	4158 27	3568 29	0,1078 7	1667 35
47°	6820 129	1977 261	2300 247	4227 27	3350 27	0,0665 + 2	2028 40
48°	6691 130	1716 260	2547 234	4270 26	3105 24	- 0,0251 — 3	2350 45
49°	6561 133	1456 258	2781 221	4286 26	2836 22	+ 0,0161 8	2626 49
50°	6428 — 135	1198 — 257	3002 — 207	4275 + 26	2545 + 19	+ 0,0564 — 13	2854 — 52
51°	6293 136	0941 255	3209 192	4239 25	2235 16	0,0954 18	3031 54
52°	6157 139	0686 253	3401 177	4178 24	1910 13	0,1326 22	3154 55
53°	6018 140	0433 251	3578 162	4093 24	1574 10	0,1677 26	3221 56
54°	5878 142	0182 247	3740 146	3984 23	1223 7	0,2002 30	3234 55
55°	5736 — 144	*0065 — 245	3886 — 130!	3852 + 22	0865 + 4	+ 0,2297 — 33	3191 — 54
56°	5592 146	0310 241	4016 115!	3698 21	0509 0	0,2560 36	3095 51
57°	5446 147	0551 237	4131 98!	3524 19	0150 — 3	0,2787 38	2947 48
58°	5299 149	0788 233	4229 81!	3331 18	*0206 6	0,2976 40	2752 45
59°	5150 150	1021 229	4310 65!	3119 17	0557 9	0,3125 41	2512 40
60°	5000 — 152	1250 — 224	4375 — 48!	2891 + 15	0898 — 12	+ 0,3232 — 42	2231 — 35
61°	4848 153	1474 220	4423 32!	2647 14	1229 14	0,3298 43	1916 30
62°	4695 155	1694 214	4455 — 16!	2390 12	1545 17	0,3321 43	1572 24
63°	4540 156	1908 209	4471 + 1!	2121 10	1844 19	0,3302 42	1203 17
64°	4384 158	2117 204	4470 18!	1841 9	2123 22	0,3240 41	0818 11
65°	4226 — 159	2321 — 197	4452 + 33	1552 + 7	2381 — 24	+ 0,3138 — 39	0422 — 4
66°	4067 160	2518 192	4419 49	1256 5	2615 26	0,2997 37	0022 + 3
67°	3907 161	2710 185	4370 65	0955 4	2824 27	0,2819 35	*0375 9
68°	3746 162	2895 179	4305 80	0651 + 2	3005 29	0,2606 32	0763 16
69°	3584 164	3074 171	4225 95	0344 0	3158 30	0,2362 29	1135 22
70°	3420 — 164	3245 — 165	4130 + 109	0038 — 2	3281 — 31	+ 0,2089 — 25	1485 + 28
71°	3256 166	3410 158	4021 123	*0267 3	3373 31	0,1791 21	1808 33
72°	3090 166	3568 150	3898 137	0568 5	3434 32	0,1472 17	2099 37
73°	2924 168	3718 142	3761 150	0864 7	3463 32	0,1136 13	2352 41
74°	2756 168	3860 135	3611 162	1153 8	3461 32	0,0788 8	2563 45
75°	2588 — 169	3995 — 127	3449 + 174	1434 — 10	3427 — 31	+ 0,0431 — 4	2730 + 47
76°	2419 169	4122 119	3275 185	1705 12	3362 30	+ 0,0070 + 1	2850 49
77°	2250 171	4241 111	3090 196	1964 13	3267 29	- 0,0290 5	2921 50
78°	2079 171	4352 102	2894 206	2211 14	3143 28	0,0644 10	2942 50
79°	1908 172	4454 94	2688 214	2443 16	2990 27	0,0990 14	2913 50
80°	1736 — 172	4548 — 85	2474 + 223	2659 — 17	2810 — 25	- 0,1321 + 18	2835 + 48
81°	1564 172	4633 76	2251 231	2859 18	2606 23	0,1635 22	2708 46
82°	1392 173	4709 68	2020 237	3040 19	2378 21	0,1927 25	2536 43
83°	1219 174	4777 59	1783 244	3203 20	2129 19	0,2193 29	2321 39
84°	1045 173	4836 50	1539 248	3345 21	1861 17	0,2431 32	2067 35
85°	0872 — 174	4886 — 41	1291 + 253	3468 — 21	1577 — 14	- 0,2638 + 34	1778 + 30
86°	0698 175	4927 32	1038 257	3569 22	1278 11	0,2810 36	1460 25
87°	0523 174	4959 23	0781 259	3648 22	0969 9	0,2947 38	1117 19
88°	0349 174	4982 13	0522 260	3704 23	0651 6	0,3045 39	0755 13
89°	0175 175	4995 5	0262 262	3739 23	0327 3	0,3105 40	0381 6
90°	0000	5000	0000	3750 — 23	0000 0	- 0,3125 + 40	0000 0
	+ 0,	- 0,	- 0,	+ 0,	+ 0,		- 0,

Т а б л и ц а 40. Производные полиномов Лежандра $\frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos \vartheta)$

ϑ	$dP_1(\cos \vartheta)/d\vartheta$	$dP_2(\cos \vartheta)/d\vartheta$	$dP_3(\cos \vartheta)/d\vartheta$	$dP_4(\cos \vartheta)/d\vartheta$	$dP_5(\cos \vartheta)/d\vartheta$	$dP_6(\cos \vartheta)/d\vartheta$	$dP_7(\cos \vartheta)/d\vartheta$
0°	— 0. 0000 — 175	— 0. 0000 — 523	0,0000 0	0,0000 0	0,0000 0	0,0000 0	0,0000 0
1°	0175 174	0523 523	— 0,1047 + 3	— 0,1744 + 8	— 0,2615 + 18	— 0,3659 + 35	— 0,4877 + 62
2°	0349 174	1046 522	0,2091 5	0,3480 15	0,5213 35	0,7284 69	0,9692 123
3°	0523 175	1568 520	0,3129 8	0,5201 23	0,7775 52	1,0841 102	1,4384 182
4°	0698 174	2088 517	0,4160 11	0,6899 30	1,0286 69	1,4295 135	1,8896 238
5°	0872 — 173	2605 — 514	— 0,5180 + 13	— 0,8567 + 38	— 1,2728 + 85	— 1,7614 + 166	— 2,3170 + 292
6°	1045 174	3119 510	0,6186 16	1,0197 45	1,5085 101	2,0768 195	2,7152 361
7°	1219 173	3629 506	0,7176 19	1,1782 52	1,7341 116	2,3727 223	3,0795 386
8°	1392 172	4135 500	0,8148 21	1,3315 59	1,9481 130	2,6464 248	3,4053 425
9°	1564 172	4635 495	0,9099 24	1,4789 65	2,1492 143	2,8954 270	3,6887 458
10°	1736 — 172	5130 — 489	— 1,0026 + 26	— 1,6199 + 71	— 2,3360 + 155	— 3,1174 + 290	— 3,9263 + 485
11°	1908 171	5619 482	1,0928 28	1,7537 77	2,5074 166	3,3104 307	4,1156 506
12°	2079 171	6101 475	1,1801 30	1,8798 82	2,6621 176	3,4729 320	4,2544 519
13°	2250 169	6576 466	1,2643 33	1,9978 87	2,7993 184	3,6034 331	4,3413 526
14°	2419 169	7042 458	1,3453 35	2,1069 92	2,9181 191	3,7008 338	4,3758 525
15°	2588 — 168	7500 — 449	— 1,4229 + 37	— 2,2069 + 96	— 3,0178 + 197	— 3,7646 + 341	— 4,3580 + 517
16°	2756 168	7949 439	1,4968 39	2,2973 100	3,0978 202	3,7943 341	4,2885 503
17°	2924 166	8388 429	1,5668 40	2,3777 103	3,1576 205	3,7899 338	4,1688 481
18°	3090 166	8817 418	1,6328 42	2,4478 106	3,1970 206	3,7518 331	4,0012 453
19°	3256 164	9235 407	1,6946 43	2,5073 108	3,2158 206	3,6806 321	3,7884 419
20°	3420 — 164	9642 — 395	— 1,7521 + 45	— 2,5560 + 110	— 3,2141 + 204	— 3,5774 + 308	— 3,5338 + 380
21°	3584 162	*0037 383	1,8050 46	2,5937 111	3,1920 201	3,4435 292	3,2413 336
22°	3746 161	0420 370	1,8534 47	2,6203 112	3,1497 197	3,2804 272	2,9153 287
23°	3907 160	0790 357	1,8970 48	2,6358 112	3,0878 191	3,0902 250	2,5607 235
24°	4067 159	1147 344	1,9358 49	2,6400 112	3,0067 184	2,8749 226	2,1827 180
25°	4226 — 158	1491 — 329	— 1,9696 + 50	— 2,6330 + 111	— 2,9073 + 176	— 2,6371 + 200	— 1,7866 + 124
26°	4384 156	1820 315	1,9984 51	2,6150 110	2,7903 166	2,3794 171	1,3782 66
27°	4540 155	2135 301	2,0222 51	2,5861 108	2,6568 155	2,1045 142	0,9633 + 7
28°	4695 153	2436 285	2,0408 52	2,5464 105	2,5077 143	1,8156 110	0,5476 — 50
29°	4848 152	2721 269	2,0542 52	2,4961 102	2,3444 130	1,5155 78	— 0,1369 107
30°	5000 — 150	2990 + 16	— 2,0625 + 52	— 2,4357 + 99	— 2,1680 + 117	— 1,2077 + 46	+ 0,2632 — 161
31°	5150 149	3244 16	2,0656 52	2,3654 95	1,9799 102	0,8953 + 13	0,6472 212
32°	5299 147	3482 16	2,0634 52	2,2855 91	1,7817 87	0,5815 — 19	1,0102 260
33°	5446 146	3703 17	2,0562 51	2,1966 86	1,5748 71	— 0,2697 52	1,3472 303
34°	5592 144	3908 17	2,0437 51	2,0991 81	1,3608 55	+ 0,0370 83	1,6540 342
35°	5736 — 142	4095 + 17	— 2,0262 + 50	— 1,9934 + 76	— 1,1413 + 38	+ 0,3354 — 113	+ 1,9267 — 375
36°	5878 140	4266 17	2,0037 50	1,8802 70	0,9179 22	0,6225 142	2,1620 402
37°	6018 139	4419 18	1,9761 49	1,7600 64	0,6924 + 5	0,8955 169	2,3573 423
38°	6157 136	4554 18	1,9438 48	1,6334 57	0,4664 — 12	1,1516 193	2,5103 438
39°	6293 135	4672 18	1,9066 47	1,5011 51	0,2415 28	1,3885 216	2,6196 446
40°	6428 — 133	4772 + 18	— 1,8648 + 45	— 1,3637 + 44	— 0,0194 — 44	+ 1,6038 — 236	+ 2,6845 — 448
41°	6561 130	4854 18	1,8185 44	1,2219 37	+ 0,1983 60	1,7955 253	2,7047 442
42°	6691 129	4918 18	1,7678 42	1,0764 30	0,4100 75	1,9620 268	2,6807 431
43°	6820 127	4963 18	1,7129 41	0,9279 22	0,6142 90	2,1017 279	2,6138 413
44°	6947 124	4991 18	1,6539 39	0,7772 15	0,8094 103	2,2136 287	2,5057 389
45°	7071 — 0.	5000 + 18 — 1.	— 1,5910 + 37	— 0,6250 + 8	+ 0,9944 — 116	+ 2,2969 — 292	+ 2,3589 — 360

Продолжение табл. 40

ϑ	$dP_1(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_2(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_3(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_4(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_5(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_6(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_7(\cos\vartheta)/d\vartheta$
	— 0,	— 1,					
45°	7071 — 122	5000 + 18	— 1,5910 + 37	— 0,6250 + 8	+ 0,9944 — 116	+ 2,2969 — 292	+ 2,3589 — 360
46°	7193 121	4991 18	1,5244 35	0,4720 0	1,1677 128	2,3510 294	2,1761 325
47°	7314 117	4963 18	1,4542 33	0,3190 — 7	1,3282 139	2,3757 292	1,9609 286
48°	7431 116	4918 18	1,3808 31	0,1668 15	1,4749 149	2,3713 288	1,7172 243
49°	7547 113	4854 18	1,3042 29	— 0,0160 22	1,6067 157	2,3382 280	1,4491 197
50°	7660 — 111	4772 + 18	— 1,2248 + 27	+ 0,1327 — 29	+ 1,7228 — 164	+ 2,2771 — 269	+ 1,1614 — 149
51°	7771 109	4672 18	1,1427 24	0,2784 36	1,8225 170	2,1892 255	0,8588 99
52°	7880 106	4554 18	1,0581 22	0,4205 43	1,9052 175	2,0759 239	0,5463 — 47
53°	7986 104	4419 18	0,9714 19	0,5584 49	1,9704 178	1,9387 219	+ 0,2291 + 4
54°	8090 102	4266 17	0,8828 17	0,6914 55	2,0178 180	1,7797 198	— 0,0877 35
55°	8192 — 98	4095 + 17	— 0,7925 + 14	+ 0,8188 — 61	+ 2,0473 — 180	+ 1,6008 — 175	— 0,3990 + 104
56°	8290 97	3908 17	0,7007 12	0,9401 67	2,0587 179	1,4046 150	0,7001 151
57°	8387 93	3703 17	0,6078 9	1,0547 72	2,0522 177	1,1934 123	0,9860 196
58°	8480 92	3482 16	0,5140 6	1,1620 77	2,0280 173	0,9699 95	1,2524 237
59°	8572 88	3244 16	0,4196 4	1,2617 82	1,9865 168	0,7369 66	1,4953 273
60°	8660 — 86	2990 + 16	— 0,3248 + 1	+ 1,3532 — 86	+ 1,9283 — 162	+ 0,4973 — 37	— 1,7109 + 306
61°	8746 83	2721 + 269	0,2299 — 2	1,4361 89	1,8538 154	0,2540 — 8	1,8960 333
62°	8829 81	2436 301	0,1351 4	1,5101 93	1,7640 145	+ 0,0098 + 21	2,0480 354
63°	8910 78	2135 315	— 0,0408 7	1,5748 95	1,6596 136	— 0,2321 50	2,1646 370
64°	8988 75	1820 329	+ 0,0528 10	1,6300 97	1,5418 125	0,4691 78	2,2443 380
65°	9063 — 72	1491 + 344	+ 0,1454 — 12	+ 1,6755 — 99	+ 1,4114 — 113	— 0,6983 + 105	— 2,2861 + 384
66°	9135 70	1147 357	0,2368 15	1,7111 100	1,2698 100	0,9170 131	2,2896 382
67°	9205 67	0790 370	0,3268 17	1,7366 101	1,1183 87	1,1226 154	2,2550 373
68°	9272 64	0420 383	0,4149 20	1,7520 101	0,9580 73	1,3129 176	2,1833 359
69°	9336 61	0037 395	0,5011 22	1,7573 101	0,7905 58	1,4855 196	2,0757 339
70°	9397 — 58	*9642 + 407	+ 0,5851 — 25	+ 1,7525 — 100	+ 0,6173 — 43	— 1,6386 + 213	— 1,9344 + 314
71°	9455 56	9235 418	0,6666 27	1,7377 99	0,4397 28	1,7704 228	1,7617 284
72°	9511 52	8817 429	0,7455 29	1,7131 97	0,2593 — 13	1,8794 240	1,5608 249
73°	9563 50	8388 439	0,8214 31	1,6787 95	+ 0,0776 + 3	1,9645 249	1,3350 211
74°	9613 46	7949 449	0,8941 33	1,6349 92	— 0,1037 18	2,0248 255	1,0882 169
75°	9659 — 44	7500 + 458	+ 0,9636 — 35	+ 1,5819 — 89	— 0,2833 + 33	— 2,0596 + 258	— 0,8245 + 125
76°	9703 41	7042 466	1,0295 37	1,5201 85	0,4595 48	2,0687 258	0,5483 80
77°	9744 37	6576 475	1,0918 39	1,4498 81	0,6309 62	2,0520 255	— 0,2641 + 33
78°	9781 35	6101 482	1,1501 40	1,3714 76	0,7961 76	2,0098 249	+ 0,0234 — 15
79°	9816 32	5619 489	1,2044 42	1,2854 71	0,9536 89	1,9428 240	0,3094 62
80°	9848 — 29	5130 + 495	+ 1,2545 — 43	+ 1,1923 — 66	— 1,1023 + 102	— 1,8519 + 228	+ 0,5892 — 107
81°	9877 26	4635 500	1,3003 45	1,0926 60	1,2407 113	1,7382 214	0,8584 151
82°	9903 22	4135 506	1,3415 46	0,9869 54	1,3679 124	1,6031 197	1,1125 193
83°	9925 20	3629 510	1,3783 47	0,8758 48	1,4827 133	1,4484 178	1,3473 231
84°	9945 17	3119 514	1,4103 48	0,7598 42	1,5842 142	1,2760 156	1,5592 265
85°	9962 — 14	2605 + 517	+ 1,4375 — 49	+ 0,6396 — 35	— 1,6715 + 149	— 1,0881 + 133	+ 1,7446 — 295
86°	9976 10	2088 520	1,4599 49	0,5160 28	1,7439 155	0,8868 108	1,9006 321
87°	9986 8	1568 522	1,4774 50	0,3895 21	1,8009 160	0,6747 82	2,0246 341
88°	9994 4	1046 523	1,4900 50	0,2608 14	1,8420 163	0,4544 55	2,1146 355
89°	9998 2	0523 523	1,4975 50	0,1308 7	1,8667 165	0,2286 28	2,1692 364
90°	*0000 — 1,	0000 — 0,	+ 1,5000 — 50	0,0000 0	— 1,8750 + 164	0,0000 0	+ 2,1875 — 367

Таблица 41. Функции Лежандра 2-го рода $Q_n(x)$

x	$Q_0(x)$	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$Q_4(x)$	$Q_5(x)$
	+ 0.	- 1.	- 0.	+ 0.	+ 0.	- 0.
0,00	00000 + 1000	00000 + 20	00000 - 2000	66667 - 80	00000 0	53333 + 160
01	01000 1000	*99990 20	02000 1999	66627 80	02666 - 5	53253 160
02	02000 1001	99960 20	03999 1997	66507 80	05327 10	53014 159
03	03001 1001	99910 20	05996 1995	66307 80	07978 14	52615 158
04	04002 1002	99840 20	07991 1992	66027 80	10615 19	52057 157
0,05	05004 + 1003	99750 + 20	09983 - 1988	65668 - 79	13233 - 24	51343 + 155
06	06007 1004	99640 20	11971 1983	65229 79	15827 29	50474 153
07	07011 1006	99509 20	13954 1978	64711 79	18393 33	49452 151
08	08017 1007	99359 20	15932 1971	64115 78	20925 38	48279 148
09	09024 1010	99188 20	17903 1963	63440 78	23419 43	46958 145
0,10	10034 + 1011	98997 + 20	19866 - 1956	62687 - 78	25870 - 47	45493 + 141
11	11045 1013	98785 20	21822 1947	61856 77	28274 52	43887 137
12	12058 1016	98553 21	23769 1937	60948 77	30626 56	42144 133
13	13074 1019	98300 21	25706 1926	59964 76	32921 61	40268 128
14	14093 1021	98027 21	27632 1915	58904 75	35155 65	38264 123
0,15	15114 + 1025	97733 + 21	29547 - 1903	57769 - 75	37324 - 70	36137 + 118
16	16139 1028	97418 21	31450 1889	56559 74	39424 74	33893 112
17	17167 1031	97082 21	33339 1876	55275 73	41449 78	31537 106
18	18198 1036	96724 21	35215 1860	53918 72	43395 83	29075 100
19	19234 1039	96346 22	37075 1845	52490 71	45259 87	26513 93
0,20	20273 + 1044	95945 + 22	38920 + 17	50990 - 70	47037 - 91	23859 + 86
21	21317 1049	95523 22	40748 18	49420 69	48723 95	21119 79
22	22366 1053	95080 22	42559 18	47781 68	50315 99	18300 71
23	23419 1058	94614 22	44351 19	46074 67	51808 102	15411 63
24	24477 1064	94125 23	46124 20	44301 66	53199 106	12459 55
0,25	25541 + 1070	93615 + 23	47876 + 21	42461 - 64	54484 - 110	09451 + 46
26	26611 1075	93081 23	49607 22	40558 63	55659 113	06398 38
27	27686 1082	92525 23	51316 23	38591 62	56721 117	03306 29
28	28768 1089	91945 24	53001 24	36563 60	57667 120	00186 20
29	29857 1095	91342 24	54662 25	34474 59	58492 123	*02953 10
0,30	30952 + 1103	90714 + 24	56297 + 26	32328 - 57	59195 - 126	06103 + 1
31	32055 1110	90063 24	57907 27	30124 55	59772 129	09254 - 9
32	33165 1118	89387 25	59488 29	27864 54	60220 131	12395 19
33	34283 1126	88687 25	61041 30	25552 52	60537 134	15518 29
34	35409 1135	87961 26	62565 31	23187 50	60720 136	18611 39
0,35	36544 + 1145	87209 + 26	64057 + 32	20773 - 48	60766 - 139	21664 - 50
36	37689 1153	86432 26	65518 33	18311 46	60674 141	24668 60
37	38842 1164	85628 27	66945 34	15803 44	60441 143	27611 71
38	40006 1174	84798 27	68338 36	13251 41	60065 144	30484 82
39	41180 1185	83940 28	69695 37	10658 39	59545 146	33274 92
0,40	42365 + 1196	83054 + 28	71015 + 38	08026 - 37	58879 - 147	35972 - 103
41	43561 1208	82140 29	72297 40	05357 34	58066 148	38567 114
42	44769 1221	81197 29	73539 41	02654 32	57105 149	41048 125
43	45990 1233	80224 30	74740 43	*00080 29	55994 150	43404 136
44	47223 1247	79222 31	75898 44	02844 26	54734 150	45624 146
0,45	48470 + 14	78188 + 31	77012 + 46	05634 - 23	53323 - 150	47698 - 157
46	49731 15	77124 32	78081 47	08446 20	51761 150	49615 167
47	51007 15	76027 33	79102 49	11279 17	50050 150	51365 178
48	52298 16	74897 34	80075 51	14129 14	48188 149	52937 188
49	53606 17	73733 35	80997 52	16992 10	46177 148	54322 198
0,50	54931 + 18	72535 + 36	81866 + 54	19865 - 7	44017 - 147	55508 - 208
	+ 0.	- 0.	- 0.	- 0.	+ 0.	+ 0.

Продолжение табл. 41

x	$Q_0(x)$	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$Q_4(x)$	$Q_5(x)$
0,50	+ 0,54931 + 18	- 0,72535 + 36	- 0,81866 + 54	- 0,19865 - 7	+ 0,44017 - 147	+ 0,55508 - 208
51	0,56273 19	0,71301 37	0,82682 56	0,22745 - 3	0,41711 146	0,56487 217
52	0,57634 20	0,70030 38	0,83441 58	0,25628 + 1	0,39259 144	0,57249 226
53	0,59015 20	0,68722 39	0,84141 60	0,28510 5	0,36663 141	0,57785 235
54	0,60416 22	0,67376 40	0,84782 63	0,31387 9	0,33926 139	0,58086 243
0,55	+ 0,61838 + 23	- 0,65989 + 41	- 0,85360 + 65	- 0,34254 + 14	+ 0,31051 - 135	+ 0,58143 - 251
56	0,63283 24	0,64561 42	0,85873 67	0,37107 18	0,28040 132	0,57950 259
57	0,64752 25	0,63091 44	0,86319 70	0,39942 23	0,24897 128	0,57498 265
58	0,66246 26	0,61577 45	0,86695 72	0,42754 28	0,21626 124	0,56781 272
59	0,67767 28	0,60018 47	0,86999 75	0,45537 34	0,18232 118	0,55792 277
0,60	+ 0,69315 + 29	- 0,58411 + 49	- 0,87227 + 78	- 0,48287 + 39	+ 0,14720 - 113	+ 0,54526 - 282
61	0,70892 31	0,56756 51	0,87378 81	0,50997 45	0,11094 107	0,52979 286
62	0,72501 33	0,55050 53	0,87446 85	0,53662 51	0,07362 100	0,51145 289
63	0,74142 35	0,53291 55	0,87431 88	0,56275 58	+ 0,03530 93	0,49023 291
64	0,75817 37	0,51477 57	0,87326 92	0,58830 65	- 0,00395 85	0,46609 292
0,65	+ 0,77530 + 39	- 0,49606 + 60	- 0,87130 + 96	- 0,61321 + 72	- 0,04405 - 76	+ 0,43903 - 292
66	0,79281 41	0,47674 63	0,86838 100	0,63739 80	0,08490 66	0,40905 291
67	0,81074 44	0,45680 66	0,86446 105	0,66078 88	0,12642 56	0,37616 288
68	0,82911 47	0,43620 69	0,85948 110	0,68328 97	0,16849 45	0,34039 284
69	0,84796 50	0,41491 73	0,85341 115	0,70481 106	0,21101 32	0,30178 278
0,70	+ 0,86730 + 54	- 0,39289 + 77	- 0,84618 + 121	- 0,72529 + 116	- 0,25384 - 19	+ 0,26039 - 271
71	0,88718 58	0,37010 81	0,83775 127	0,74460 127	0,29686 - 4	0,21630 261
72	0,90764 62	0,34650 86	0,82804 134	0,76265 138	0,33991 + 12	0,16960 249
73	0,92873 67	0,32203 92	0,81699 142	0,77931 150	0,38283 30	0,12041 235
74	0,95048 72	0,29665 98	0,80452 150	0,79447 164	0,42546 49	0,06887 218
0,75	+ 0,97296 + 78	- 0,27028 + 104	- 0,79055 + 159	- 0,80799 + 178	- 0,46758 + 70	+ 0,01516 - 198
76	0,99622 85	0,24288 112	0,77499 169	0,81973 194	0,50900 93	- 0,04053 175
77	1,02033 93	0,21435 121	0,75774 180	0,82953 211	0,54949 119	0,09797 148
78	1,04537 102	0,18461 130	0,73868 193	0,83721 230	0,58878 147	0,15688 118
79	1,07143 112	0,15357 141	0,71770 207	0,84259 251	0,62660 178	0,21696 82
0,80	+ 1,09861 + 123	- 0,12111 + 154	- 0,69464 + 223	- 0,84544 + 275	- 0,66264 + 212	- 0,27785 - 41
81	1,12703 137	0,08711 169	0,66935 241	0,84555 301	0,69656 250	0,33914 + 6
82	1,15682 153	0,05141 166	0,64164 262	0,84264 331	0,72795 294	0,40035 60
83	1,18814 171	- 0,01385 206	0,61131 287	0,83641 365	0,75641 342	0,46094 123
84	1,22117 193	+ 0,02579 230	0,57810 316	0,82653 404	0,78142 398	0,52029 195
0,85	+ 1,25615 + 220	+ 0,06773 + 259	- 0,54172 + 350	- 0,81259 + 449	- 0,80244 + 462	- 0,57766 + 279
86	1,29334 253	0,11228 294	0,50184 391	0,79415 503	0,81882 536	0,63221 378
87	1,33308 293	0,15978 337	0,45803 441	0,77066 567	0,82981 624	0,68295 494
88	1,37577 344	0,21068 391	0,40979 502	0,74148 644	0,83453 728	0,72872 632
89	1,42193 410	0,26551 460	0,35650 580	0,70582 740	0,83194 854	0,76811 799
0,90	+ 1,47222 + 495	+ 0,32500 + 551	- 0,29736 + 681	- 0,66271 + 862	- 0,82075 + 1011	- 0,79944 + 1004
91	1,52752	0,39005	0,23135	0,61091	0,79936	0,82063
92	1,58903	0,46190	0,15708	0,54880	0,76575	0,82905
93	1,65839	0,54230	- 0,07268	0,47419	0,71724	0,82130
94	1,73805	0,63377	+ 0,02459	0,38399	0,65011	0,79279
0,95	+ 1,83178	+ 0,74019	+ 0,13888	- 0,27356	- 0,55896	- 0,73697
96	1,94591	0,86807	0,27707	- 0,13540	0,43528	0,64384
97	2,09230	1,02953	0,45181	+ 0,04408	0,26403	0,49627
98	2,29756	1,25161	0,69108	0,29437	- 0,01348	- 0,25926
99	2,64665	1,62019	1,08265	0,70625	+ 0,41159	+ 0,16845
1,00	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞

Продолжение табл. 41

x	$Q_6(x)$	$Q_7(x)$	x	$Q_6(x)$	$Q_7(x)$
	— 0,	+ 0,			
0.00	00000 0	45714 — 256	0.50	+ 0,14201 — 28	— 0,34392 + 296
01	03198 + 13	45586 255	51	0,18056 50	0,31316 282
02	06383 26	45203 254	52	0,21862 72	0,27958 265
03	09542 38	44567 250	53	0,25595 95	0,24337 245
04	12664 51	43680 246	54	0,29233 119	0,20471 223
0.05	15734 + 63	42548 — 240	0.55	+ 0,32752 — 143	— 0,16383 + 198
06	18742 75	41175 233	56	0,36129 167	0,12097 170
07	21674 87	39570 225	57	0,39338 192	0,07642 140
08	24518 99	37739 216	58	0,42355 217	— 0,03047 107
09	27264 111	35693 206	59	0,45155 242	+ 0,01655 72
0.10	29899 + 122	33441 — 194	0.60	+ 0,47713 — 268	+ 0,06429 + 34
11	32412 132	30996 181	61	0,50003 293	0,11236 — 7
12	34793 143	28369 168	62	0,52000 318	0,16036 49
13	37031 153	25575 153	63	0,53680 342	0,20786 94
14	39117 162	22627 138	64	0,55017 366	0,25441 142
0.15	41041 + 171	19542 — 122	0.65	+ 0,55989 — 390	+ 0,29955 — 191
16	42795 179	16335 105	66	0,56570 412	0,34277 241
17	44370 187	13023 87	67	0,56740 434	0,38358 294
18	45757 194	09625 69	68	0,56476 454	0,42145 347
19	46952 200	06158 50	69	0,55759 472	0,45585 402
0.20	47946 + 206	02642 — 30	0.70	+ 0,54570 — 489	+ 0,48622 — 457
21	48734 211	*00904 — 10	71	0,52893 503	0,51203 511
22	49310 216	04461 + 10	72	0,50713 515	0,53273 566
23	49672 219	08008 30	73	0,48017 524	0,54777 619
24	49814 222	11524 51	74	0,44798 530	0,55662 671
0.25	49735 + 224	14990 + 71	0.75	+ 0,41050 — 532	+ 0,55877 — 720
26	49432 225	18385 92	76	0,36770 530	0,55372 766
27	48904 225	21688 112	77	0,31961 522	0,54101 808
28	48151 225	24879 132	78	0,26631 509	0,52024 844
29	47173 223	27938 152	79	0,20794 489	0,49104 873
0.30	45972 + 221	30845 + 171	0.80	+ 0,14469 — 461	+ 0,45312 — 894
31	44551 218	33580 190	81	0,07684 425	0,40628 905
32	42912 213	36126 208	82	+ 0,00477 378	0,35042 903
33	41059 208	38464 225	83	— 0,07106 319	0,28556 886
34	38999 202	40577 242	84	0,15006 246	0,21187 850
0.35	36737 + 195	42449 + 257	0.85	— 0,23149 — 156	+ 0,12972 — 793
36	34281 187	44063 271	86	0,31444 — 46	+ 0,03969 708
37	31638 177	45407 284	87	0,39780 + 89	— 0,05735 589
38	28818 167	46466 296	88	0,48022 255	0,16020 429
39	25830 156	47229 306	89	0,56002 460	0,26725 — 216
0.40	22687 + 144	47686 + 315	0.90	— 0,63512 + 715	— 0,37633 + 65
41	19399 131	47828 322	91	0,70295	0,48458
42	15981 117	47649 328	92	0,76020	0,58824
43	12445 102	47142 331	93	0,80262	0,68227
44	08808 86	46304 333	94	0,82448	0,75978
0.45	05085 + 69	45133 + 332	0.95	— 0,81776	— 0,81107
46	01292 52	43631 330	96	0,77043	0,82170
47	*02552 33	41800 325	97	0,66250	0,76807
48	06428 + 13	39645 318	98	0,45458	0,60511
49	10318 — 7	37172 308	99	— 0,03725	— 0,21288
0.50	14201 — 28	34392 + 296	1.00	+ ∞	+ ∞
	+ 0,	— 0,			

ХІІІ. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ (ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ)

А. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ 1-го, 2-го И 3-го РОДА

1. Определения и обозначения

Бесселевыми функциями (цилиндрическими функциями или цилиндрическими гармониками) называют решения $Z_\nu(z)$ дифференциального уравнения Бесселя *)

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0.$$

Здесь z — комплексное переменное; число ν , которое называется *порядком* (параметром или индексом) может также быть произвольным комплексным; если же оно действительное целое число, то пишут $\nu = n$.

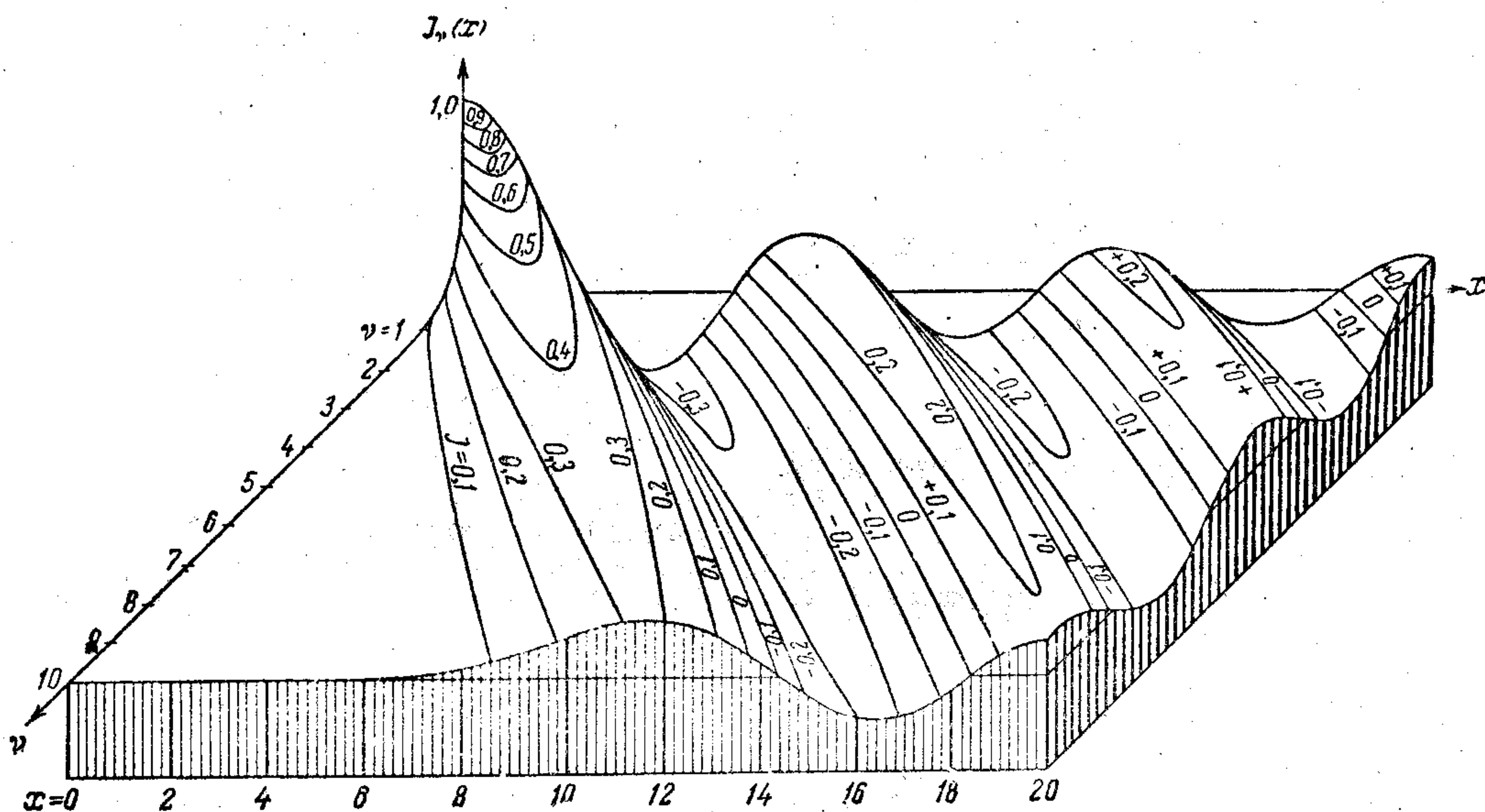


Рис. 97. Поверхность функции Бесселя $J_\nu(x)$ над плоскостью действительных переменных ν, x .

Под бесселевыми функциями понимают следующие (определенные в 2 своими аналитическими представлениями) функции: функции Бесселя $J_\nu(z)$; функции Неймана $N_\nu(z)$ (которые часто называют функциями Вебера и обозначают $Y_\nu(z)$) и функции Ганкеля $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Их называют также бесселевыми функциями соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода.

*) Определение цилиндрических функций по Нильсену см. в 6.1.

Для фиксированного порядка ν все эти функции являются аналитическими функциями от z ; за исключением функций $J_n(z)$ целого порядка, все эти функции многозначны и имеют $z=0$ точкой ветвления. Если аргумент z фиксирован, то

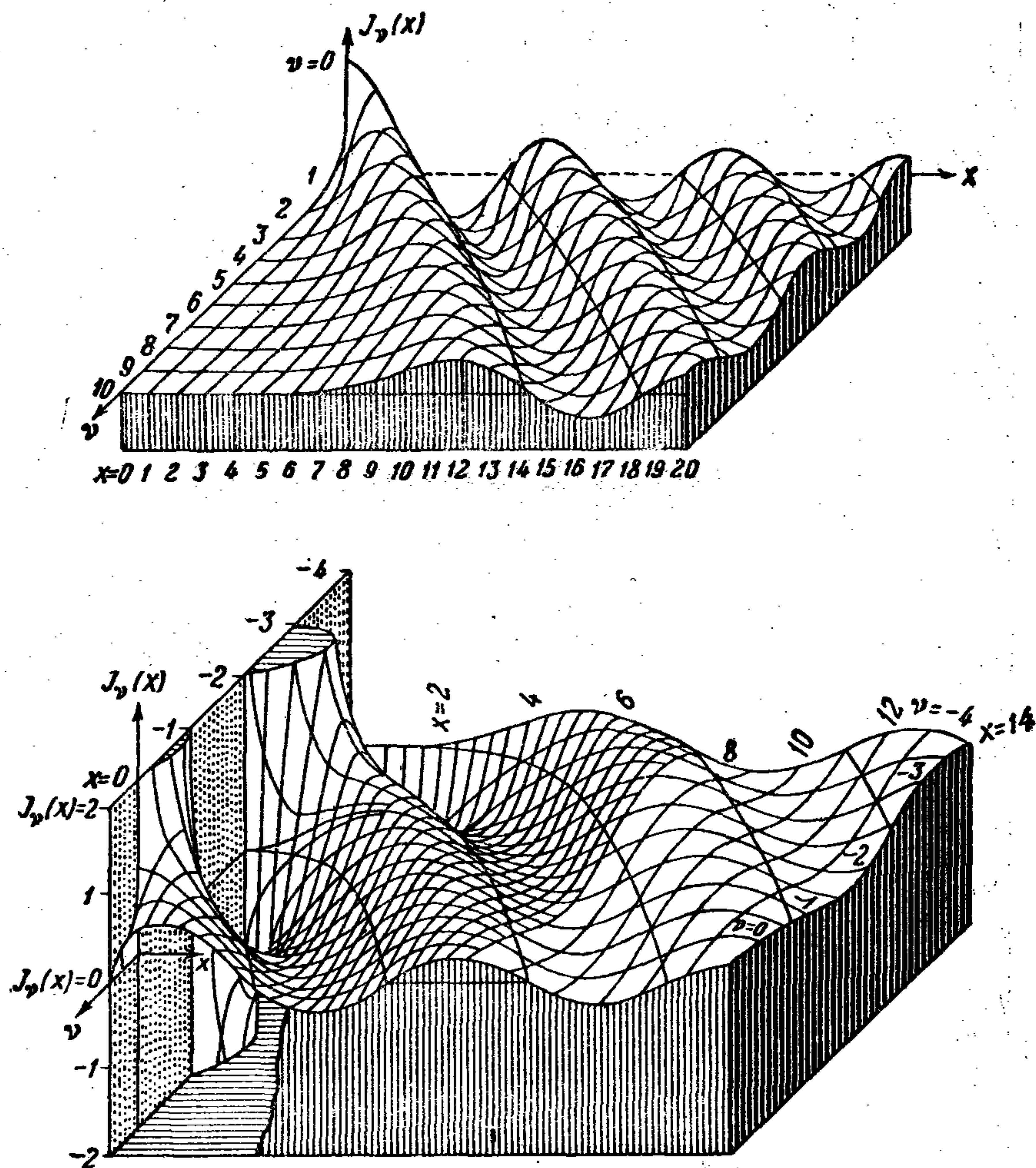


Рис. 98 и 99. Функции Бесселя $J_\nu(x)$ от двух действительных переменных ν и x ; $-4 \leq \nu \leq 10$.

все эти функции, рассматриваемые как функции порядка ν , являются однозначными целыми функциями (рис. 97—101).

При произвольном ν каждая пара функций

$$J_\nu(z), N_\nu(z) \text{ и } H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z),$$

а также, если ν не является целым числом,

$$J_\nu(z), J_{-\nu}(z)$$

представляет собой фундаментальную систему решений дифференциального уравнения Бесселя.

Определение модифицированных функций Бесселя дано в В. 1; определения некоторых функций, связанных с бесселевыми функциями, см. в С. 1 и С. 2.

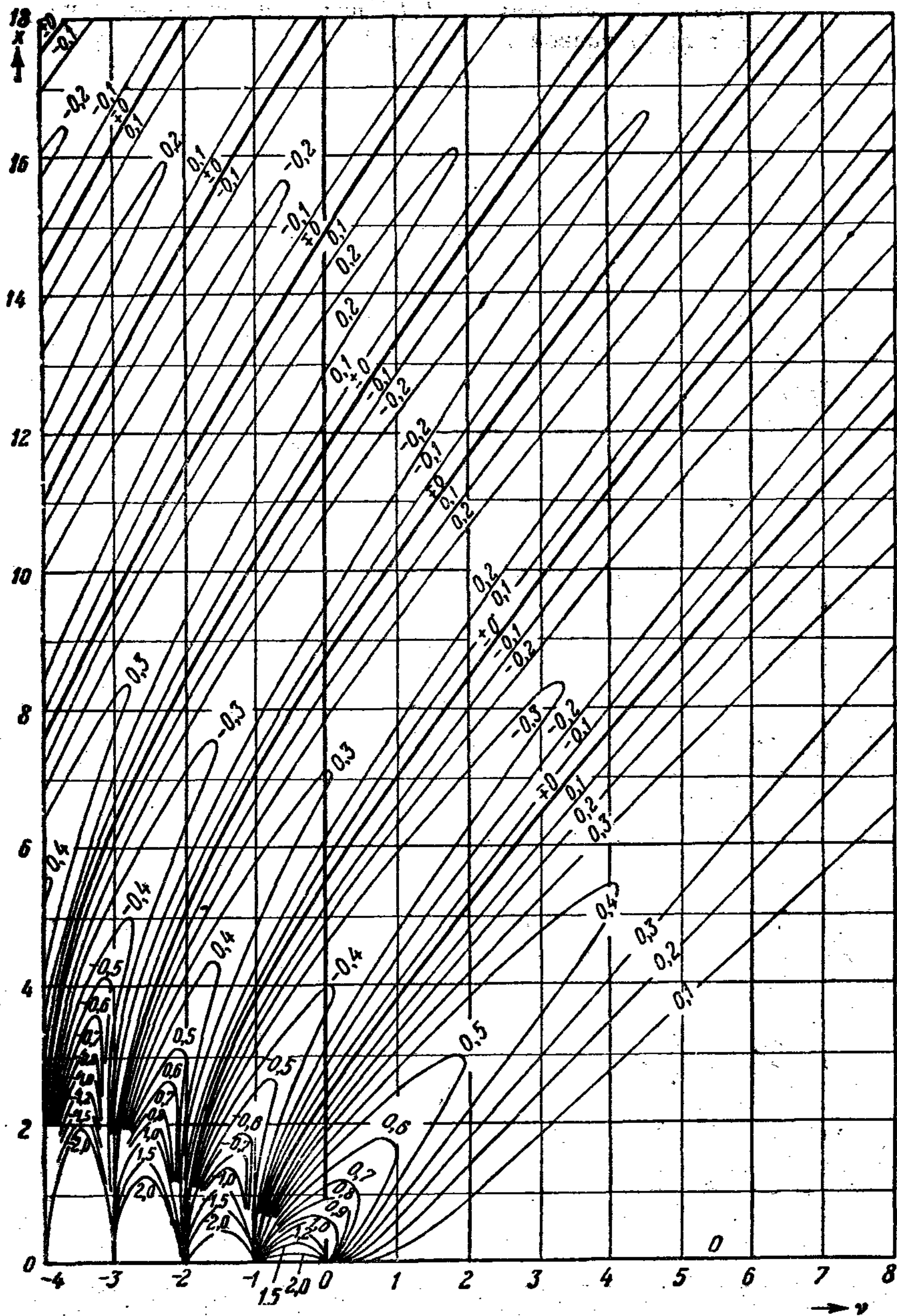


Рис. 100. Кривые $J_v(x) = \text{const}$ в плоскости действительных переменных v, x .

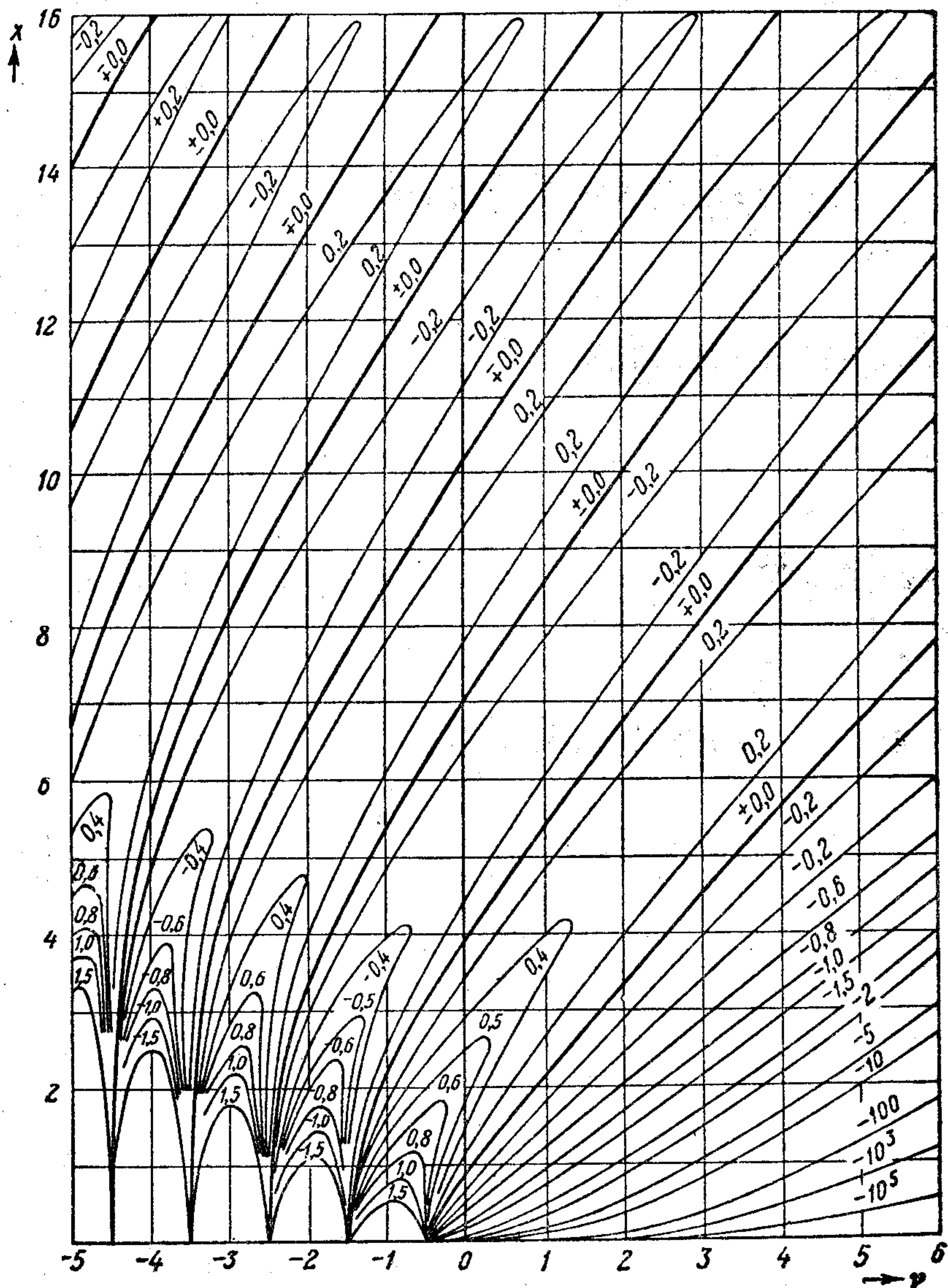


Рис. 101. Кривые $N_v(x) = \text{const}$ в плоскости действительных переменных v, x .

2. Представления с помощью рядов

2.1. Если порядок v есть целое число $v = n = 0, 1, 2, \dots$, то функции Бесселя $J_n(z)$ могут быть получены с помощью производящей функции из разложения

$$e^{\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [t^n + (-t)^{-n}] J_n(z).$$

Для целого отрицательного порядка $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$. Для произвольного

порядка ν имеем представление

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{0! \Gamma(\nu+1)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2}}{1! \Gamma(\nu+2)} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+4}}{2! \Gamma(\nu+3)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+6}}{3! \Gamma(\nu+4)} + \dots,$$

причем $J_{-\nu}(z) = \overline{J_\nu(z)}$. Можно записать:

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \Lambda_\nu(z), \text{ где } \Lambda_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2k}$$

—целая функция от z (рис. 102—105, таблица 42).

Функция $J_\nu(z)$ многозначна, если ν не есть целое число; после m обходов вокруг точки ветвления $z=0$ получим: $J_\nu(e^{m\pi i} z) = e^{m\nu\pi i} J_\nu(z)$ (m —целое).

Функции $J_\nu(z)$ любого положительного и целых отрицательных порядков отличаются от всех остальных бесселевых функций тем, что они остаются

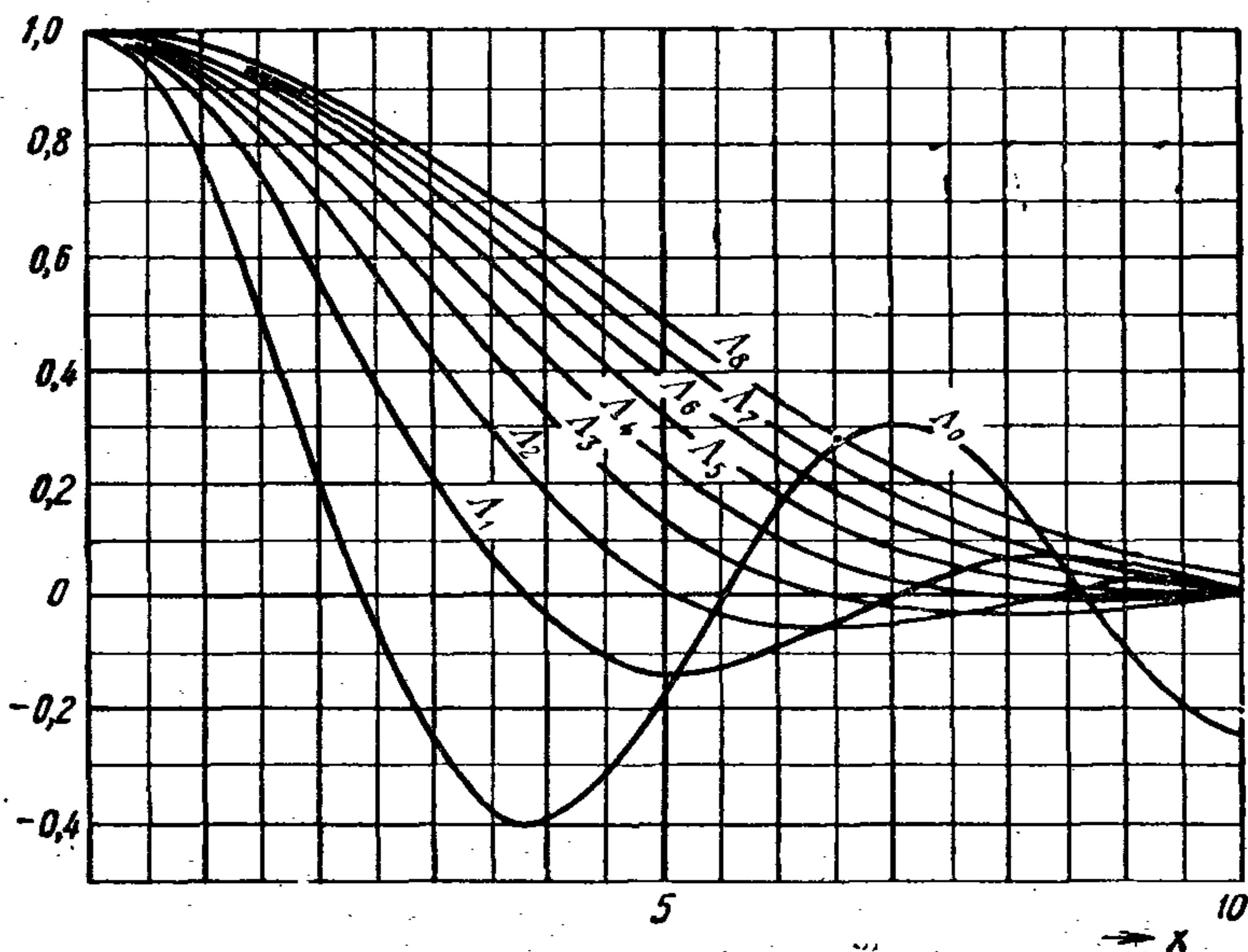


Рис. 102. Функции $\Lambda_\nu(x)$.

конечными при $z \rightarrow 0$. При $|z| \ll 1$ для фиксированного порядка $\nu \geq 0$ имеем приближенно:

$$J_\nu(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \quad \Lambda_\nu(z) \approx 1 - \frac{z^2}{4(\nu+1)}.$$

Если $\nu = n + \eta$, где $n \geq 1$, $0 < \eta < 1$, то

$$(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^\eta J_{-\nu}(z) = \frac{2}{z} E_{n-1}(z) \frac{\sin \pi \eta}{\pi} + \left(\frac{z}{2}\right)^n F_n(z),$$

где

$$E_m(z) = \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(m+\eta-k+1)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{2}{z}\right)^{m-2k}, \quad F_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k-\eta+1) \Gamma(m+k+1)}.$$

Отсюда получается поведение $J_{-\nu}(z)$, $\nu = n + \eta > 0$ при $|z| \ll 1$:

$$J_{-\nu}(z) \approx (-1)^n \Gamma(\nu) \frac{\sin \pi \eta}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu.$$

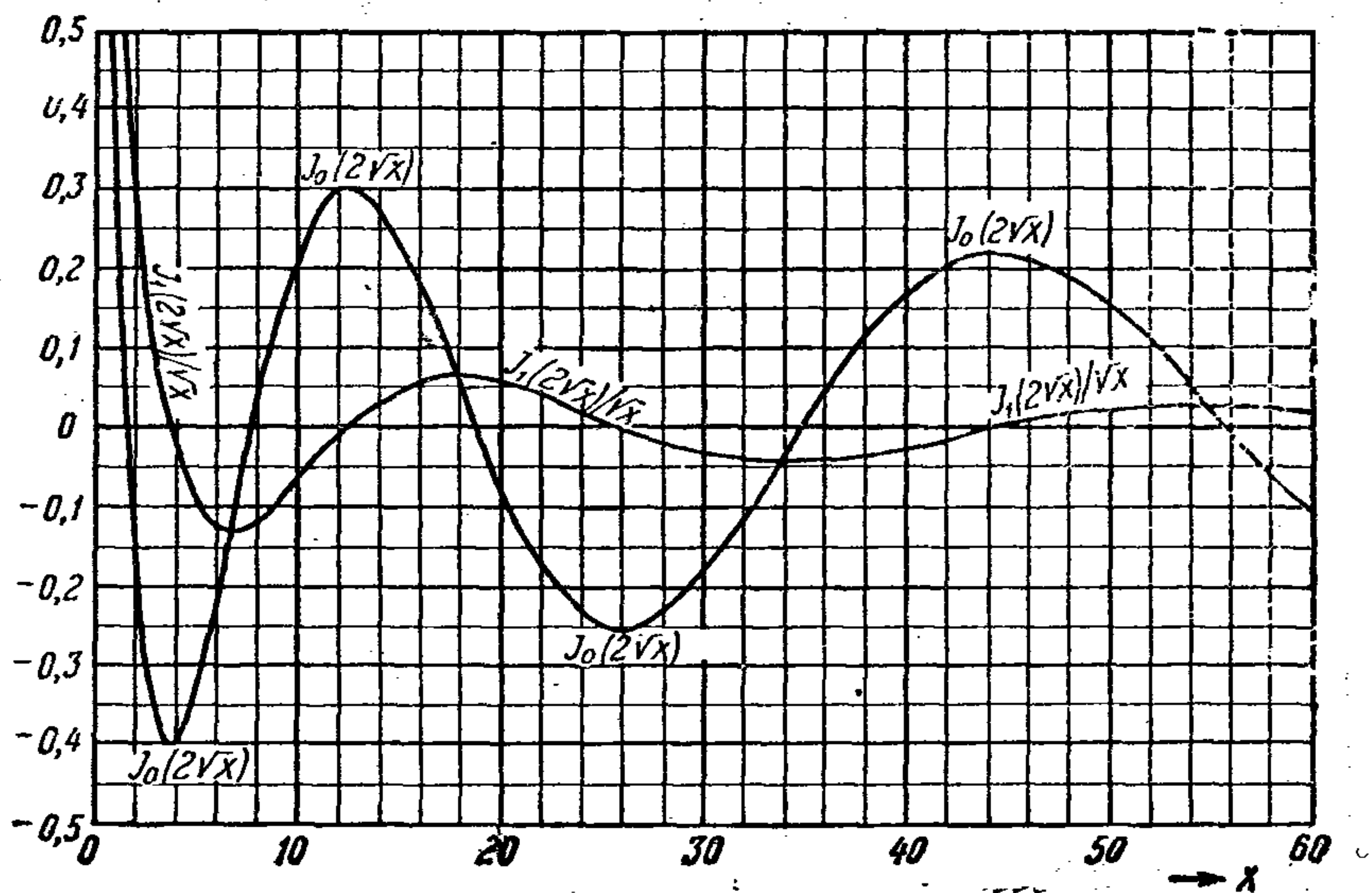


Рис. 103. Величина Λ , как функция квадрата половины аргумента.

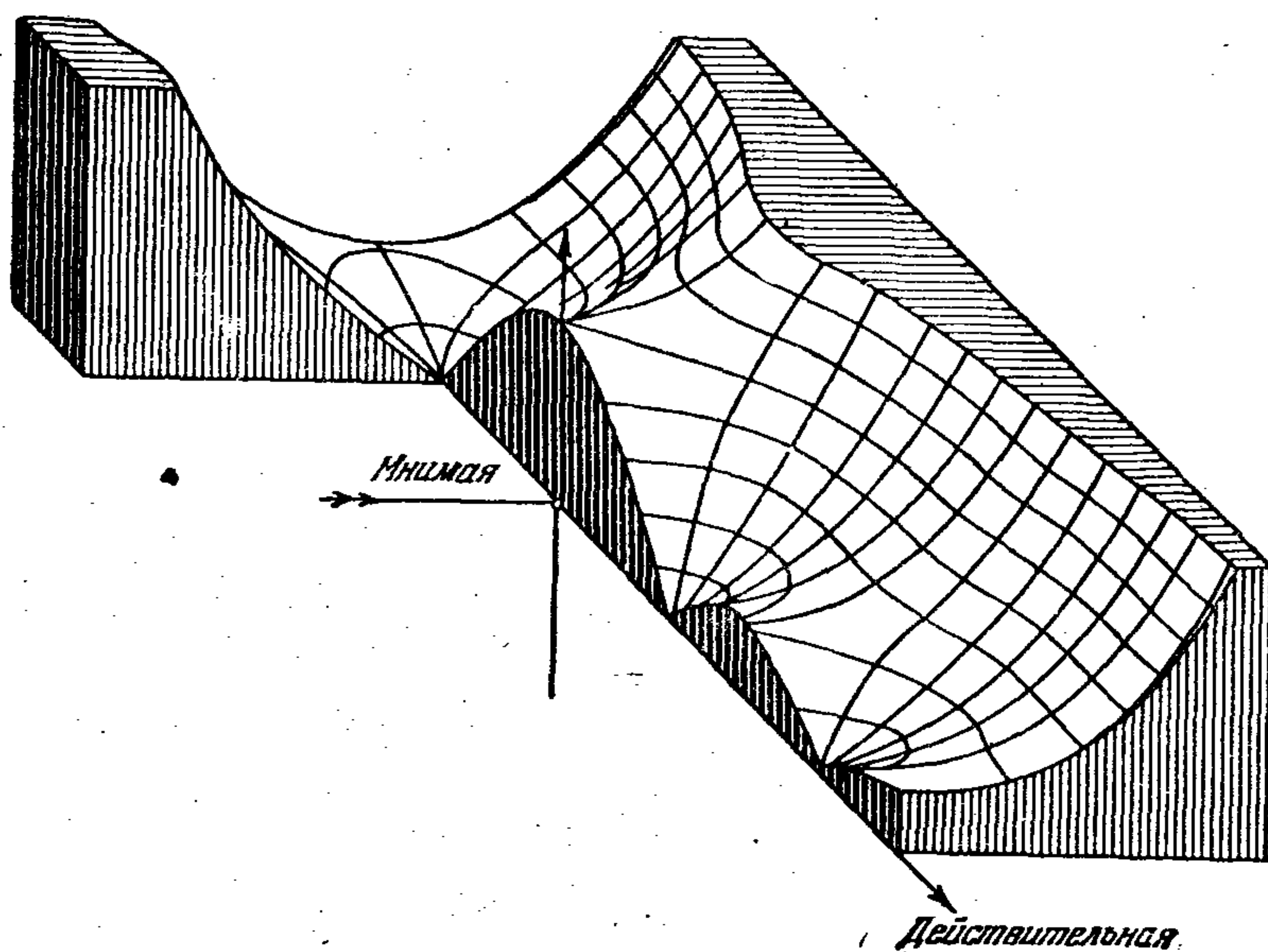


Рис. 104. Рельеф функции Бесселя $J_0(x+iy)$.

При $|z| \ll 1$, $\nu > 0$ справедливы также приближенные формулы:

$$J'_0(z)/J_0(z) \approx -\frac{z}{2}, \quad J'_\nu(z)/J_\nu(z) \approx \frac{\nu}{2} \quad (\nu \neq 0).$$

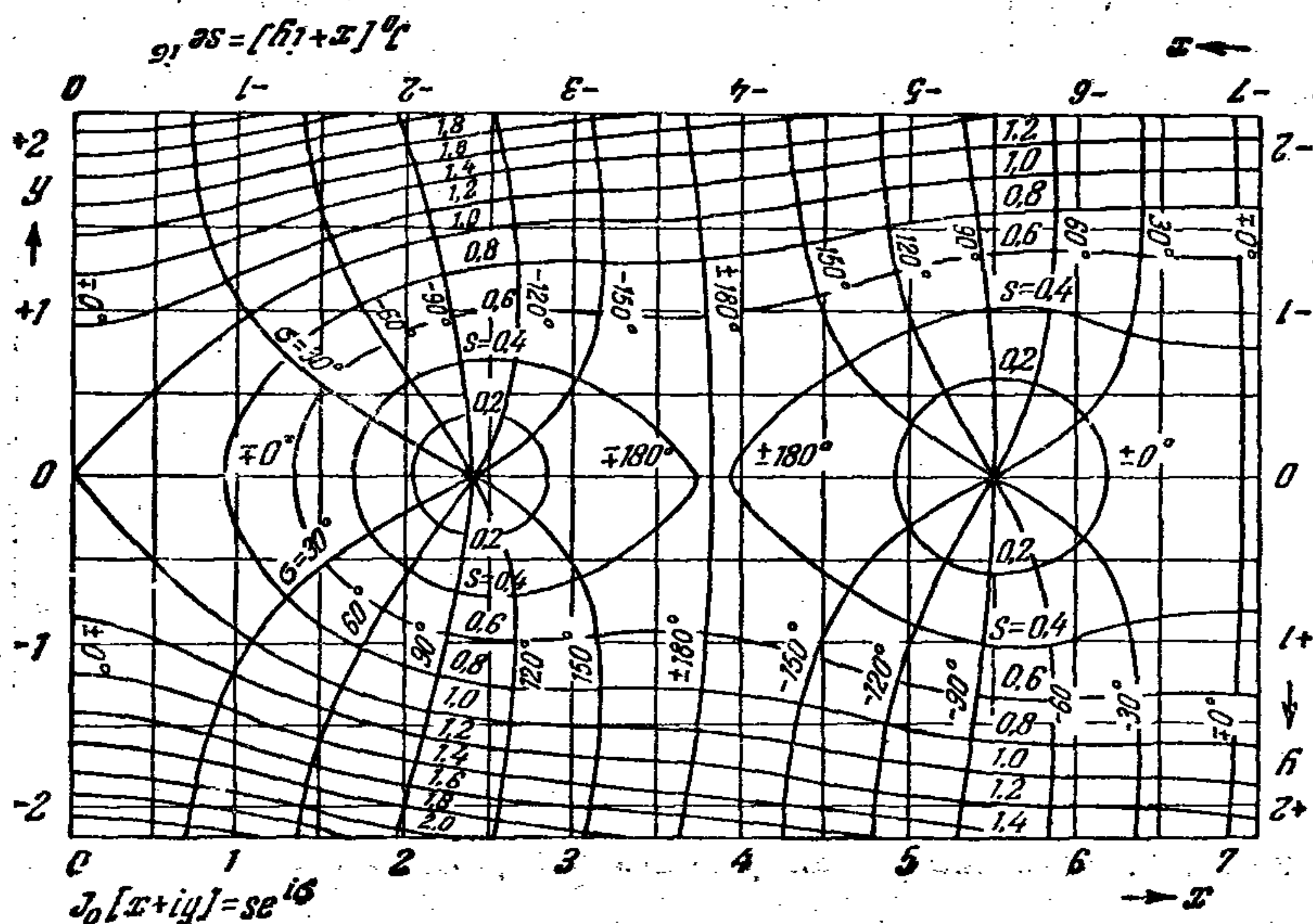


Рис. 105. Карта горизонталей рельефа функции Бесселя $J_0(x+iy)$.

Для действительного порядка ν функции Бесселя от действительного аргумента $x > 0$ будут действительными функциями $J_\nu(x)$; $J_\nu(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ (рис. 106—111, таблицы 43—46).

2.2. Если порядок ν не есть целое число, то функции Неймана $N_\nu(z)$ (бесселевы функции 2-го рода) определяются как

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)],$$

а если порядок есть целое число $\nu = n$, то

$$N_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu=n}$$

(рис. 112). При целом индексе справедливо представление

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{\gamma z}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{k+n} \frac{1}{l} \right) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(γ — константа Эйлера) и $N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z)$. Для произвольного ν имеем $N_{-\nu}(z) = \overline{N_\nu(z)}$.

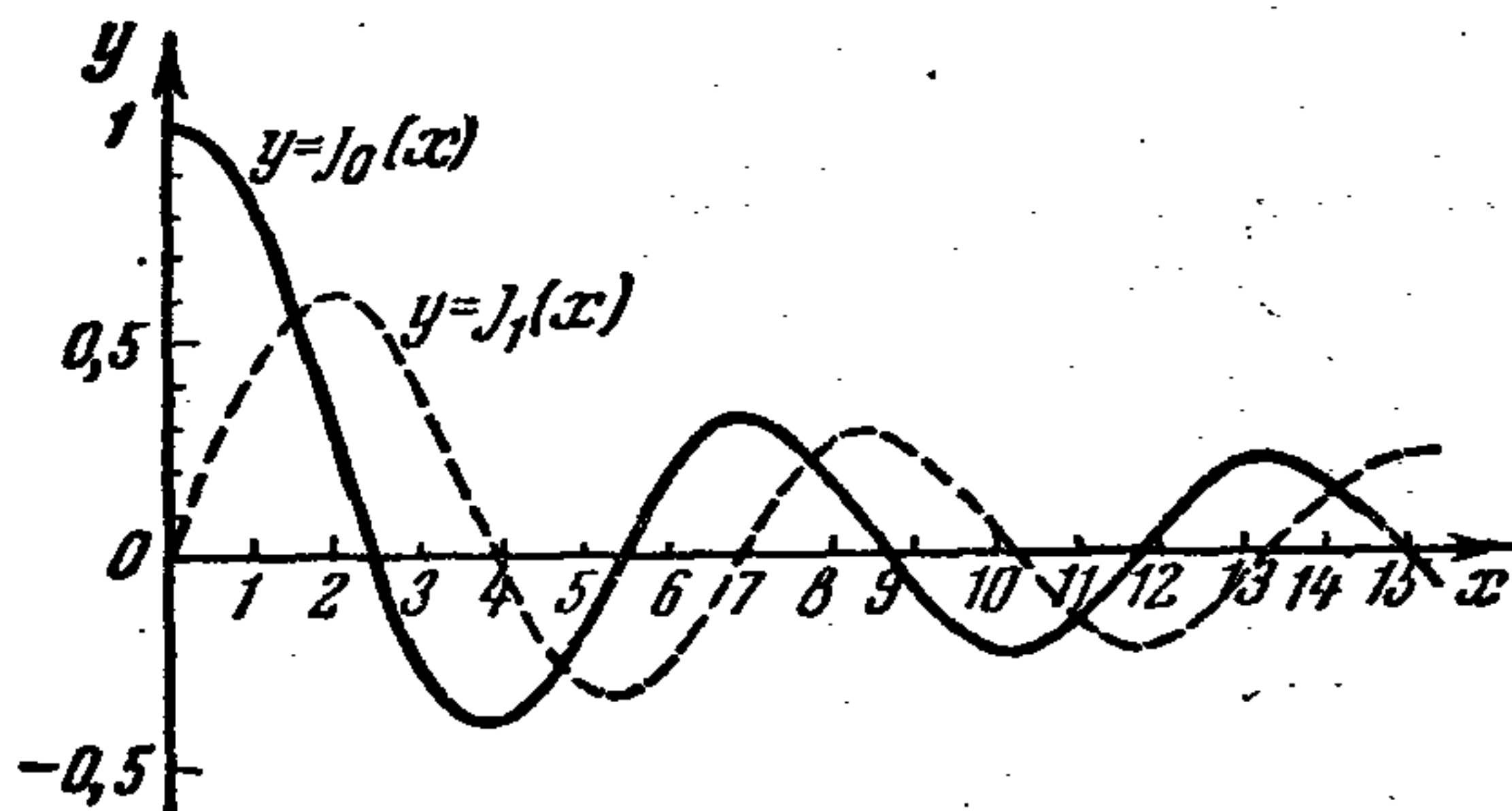


Рис. 106. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

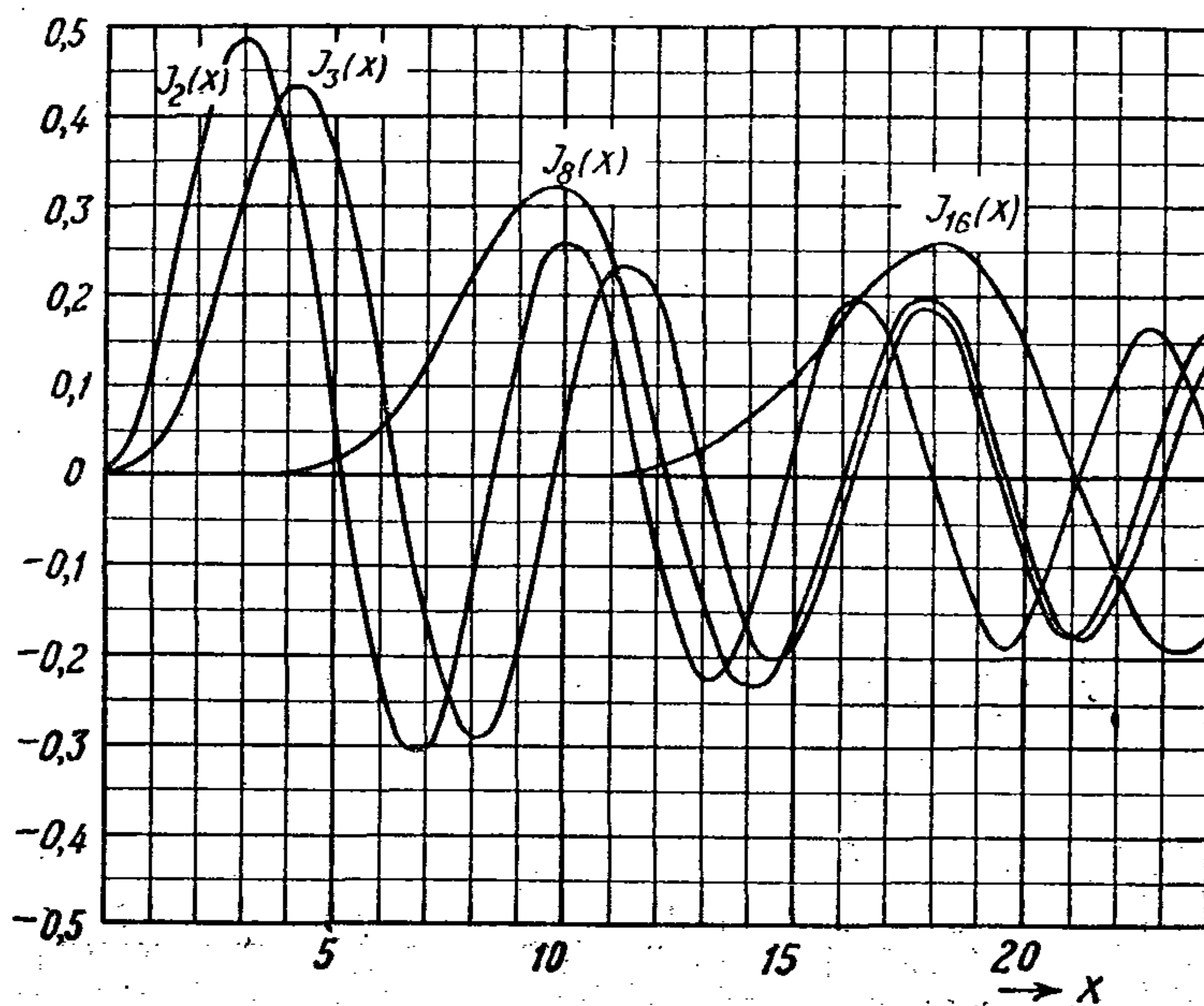


Рис. 107. Функции Бесселя $J_2(x)$, $J_3(x)$, $J_8(x)$, $J_{16}(x)$.

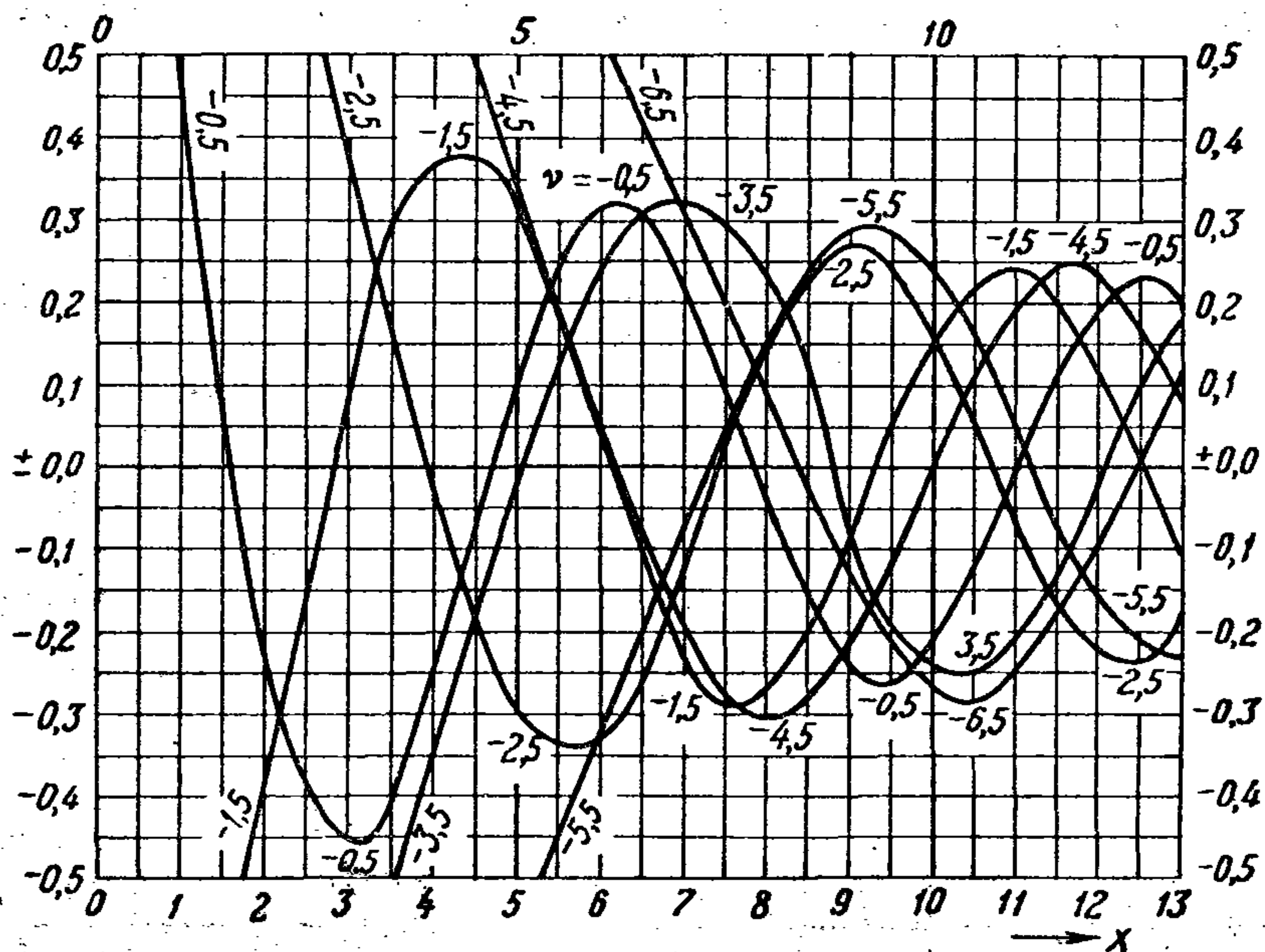


Рис. 108. Функции Бесселя $J_v(x)$ при $v = -n - \frac{1}{2}$.

Функция $N_\nu(z)$ многозначна; после m обходов вокруг точки ветвления $z=0$ получим:

$$N_\nu(e^{m\pi i}z) = e^{-m\nu\pi i} N_\nu(z) + 2i \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} \cos \nu\pi J_\nu(z) \quad (m \text{ — целое});$$

в частности, для целого порядка $\nu = n$

$$N_n(e^{m\pi i}z) = (-1)^{mn} [N_n(z) + 2imJ_n(z)].$$

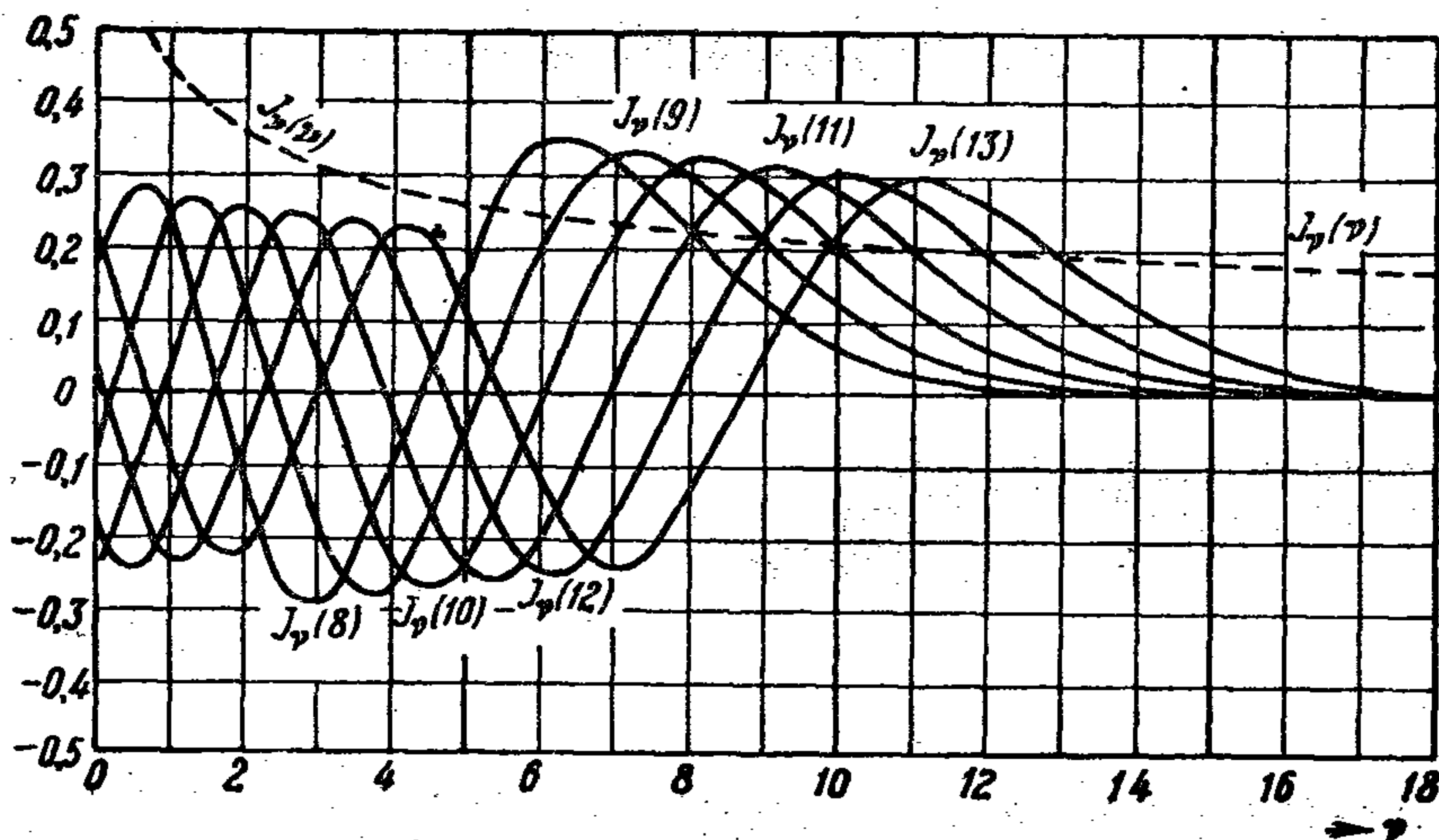
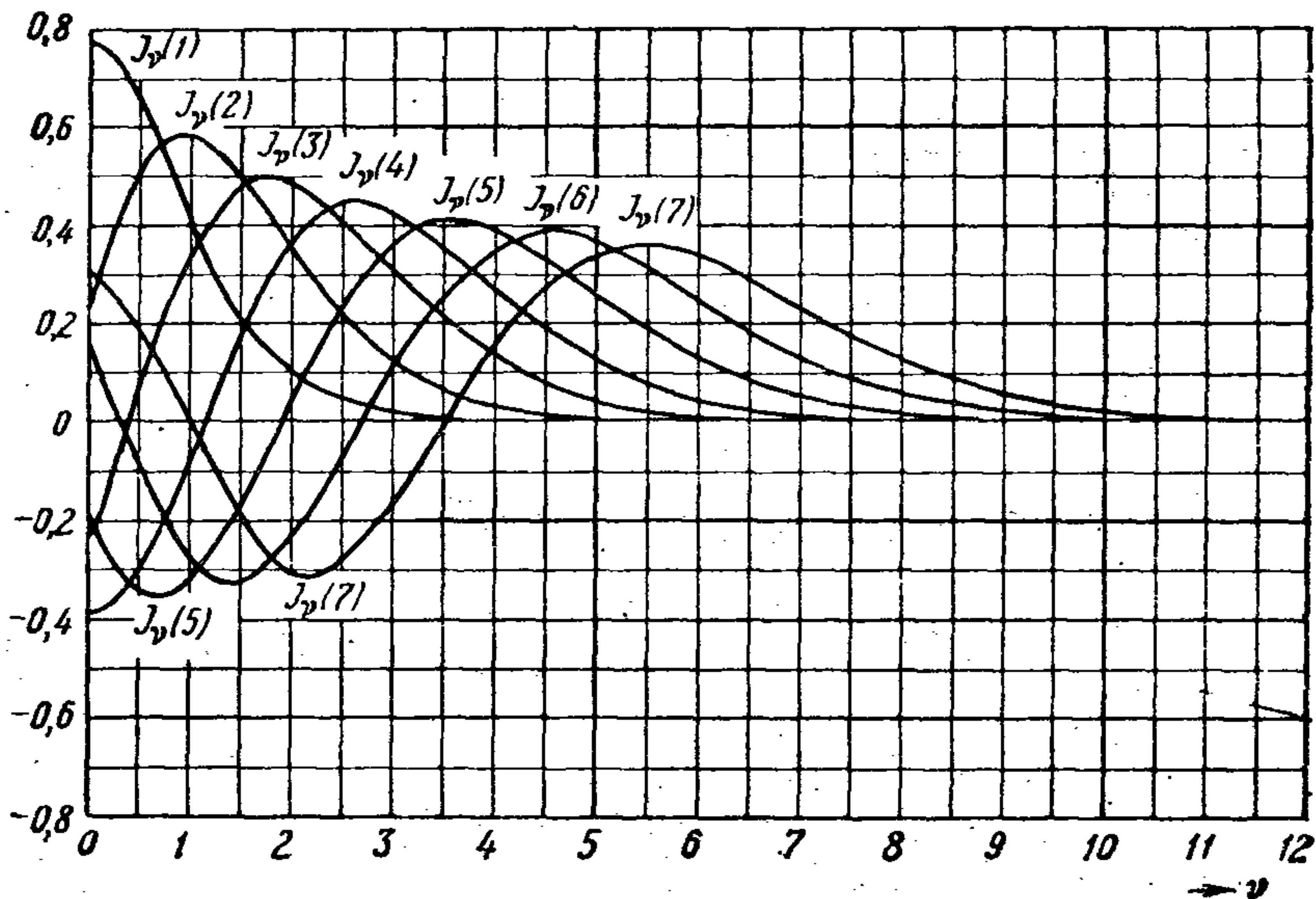


Рис. 109 и 110. Функции Бесселя при постоянном аргументе и переменном порядке.

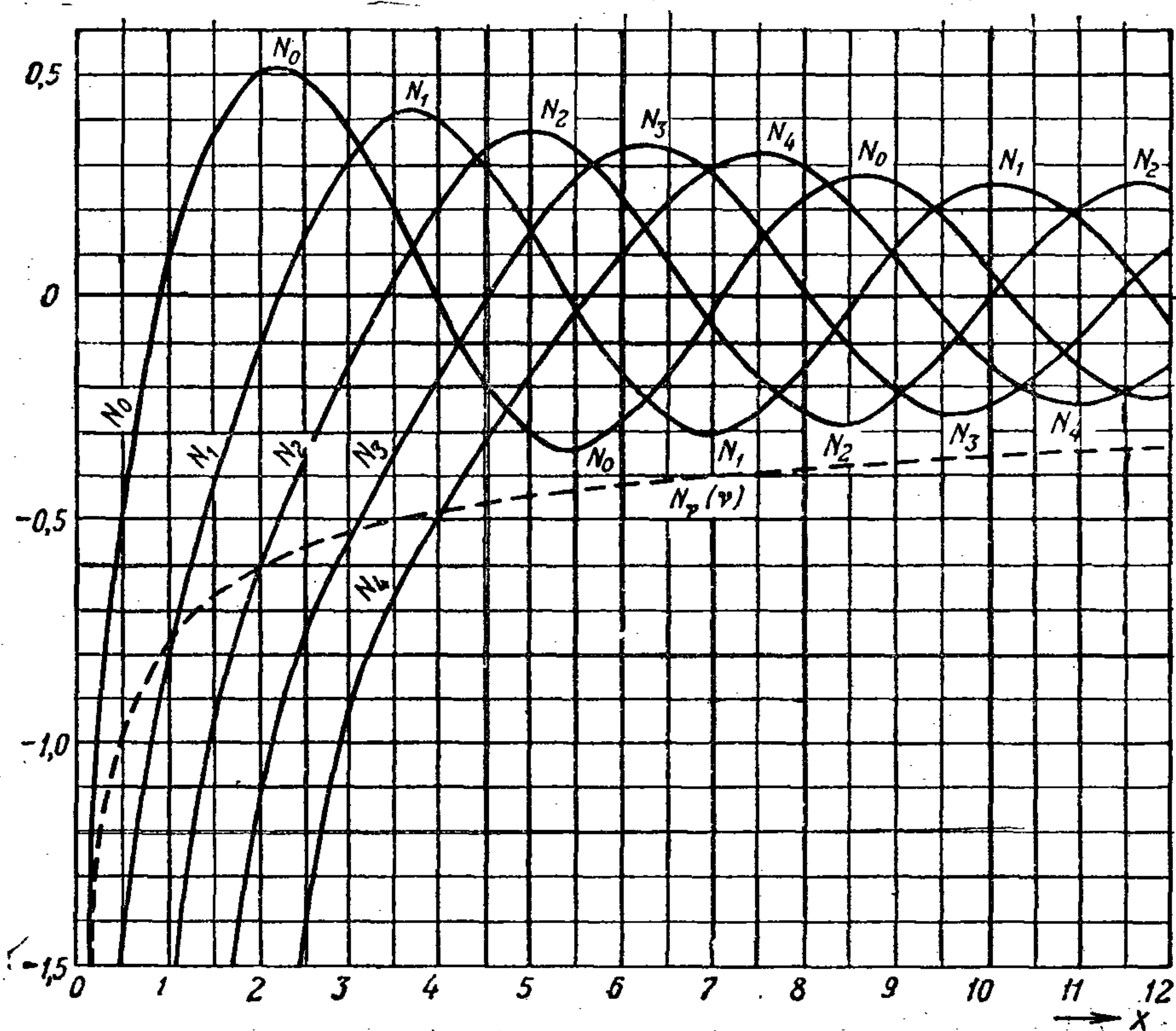


Рис. 113. Функция Неймана $N_v(x)$, $v=0, 1, 2, 3, 4$.

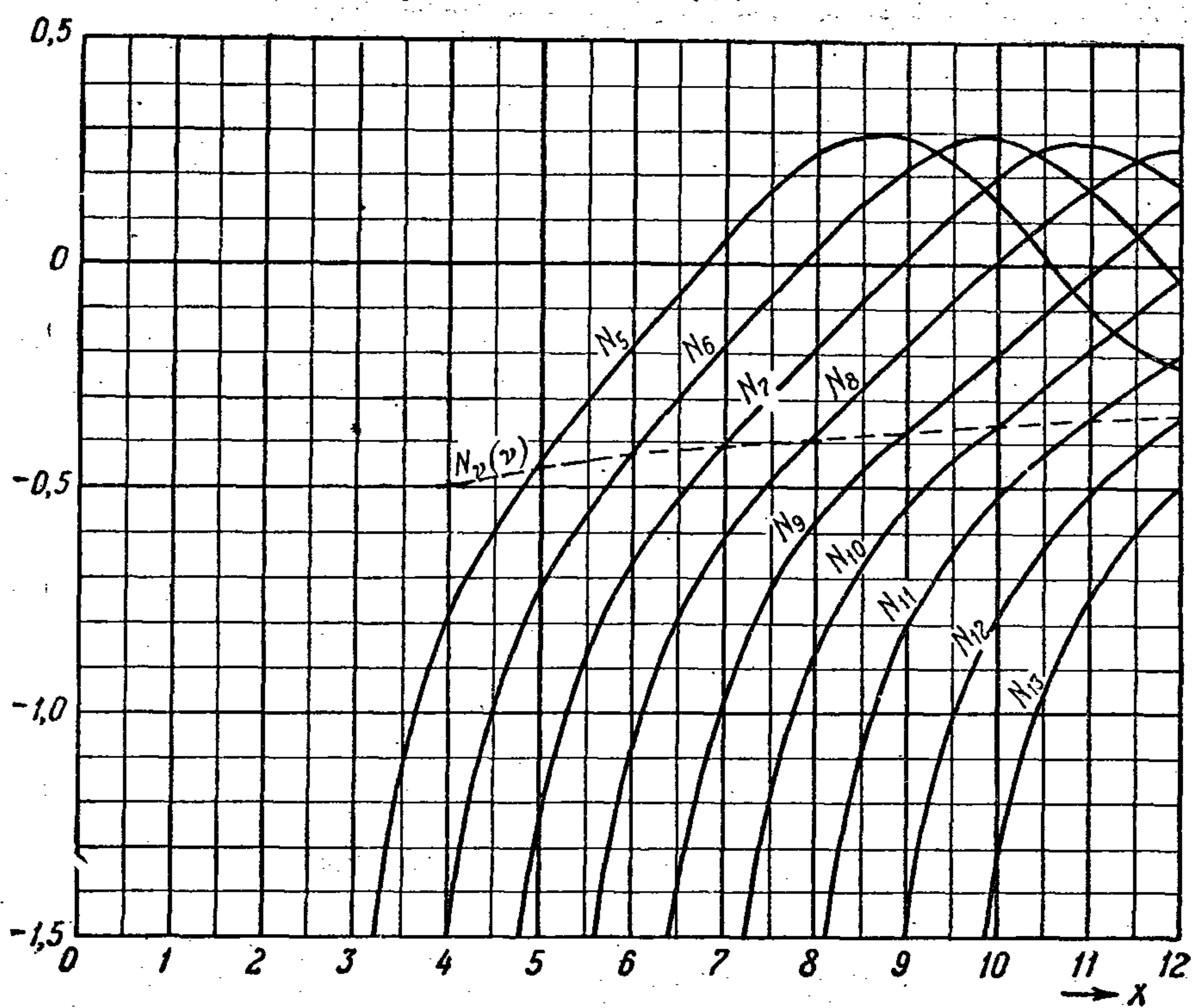


Рис. 114. Функции Неймана $N_v(x)$, $v=5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$.

Для действительного $\nu \geq 0$ поведение $N_\nu(z)$ при $|z| \ll 1$ описывается формулами

$$N_0(z) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{yz}, \quad N_\nu(z) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \quad (\nu > 0).$$

Для действительного порядка ν функции Неймана от действительного аргумента $x > 0$ будут действительными функциями $N_\nu(x)$; $N_\nu(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ (рис. 113, 114, таблица 47).

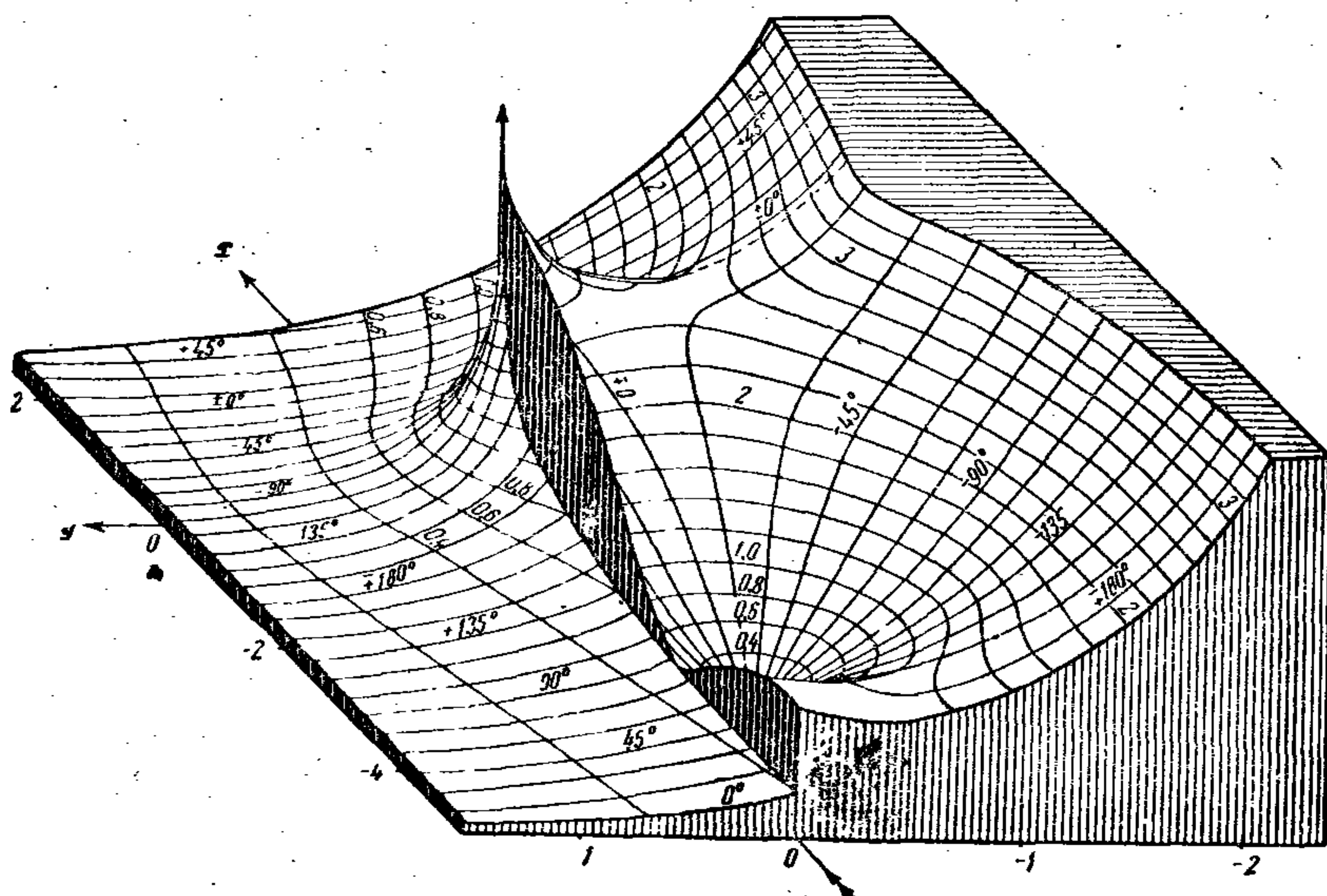
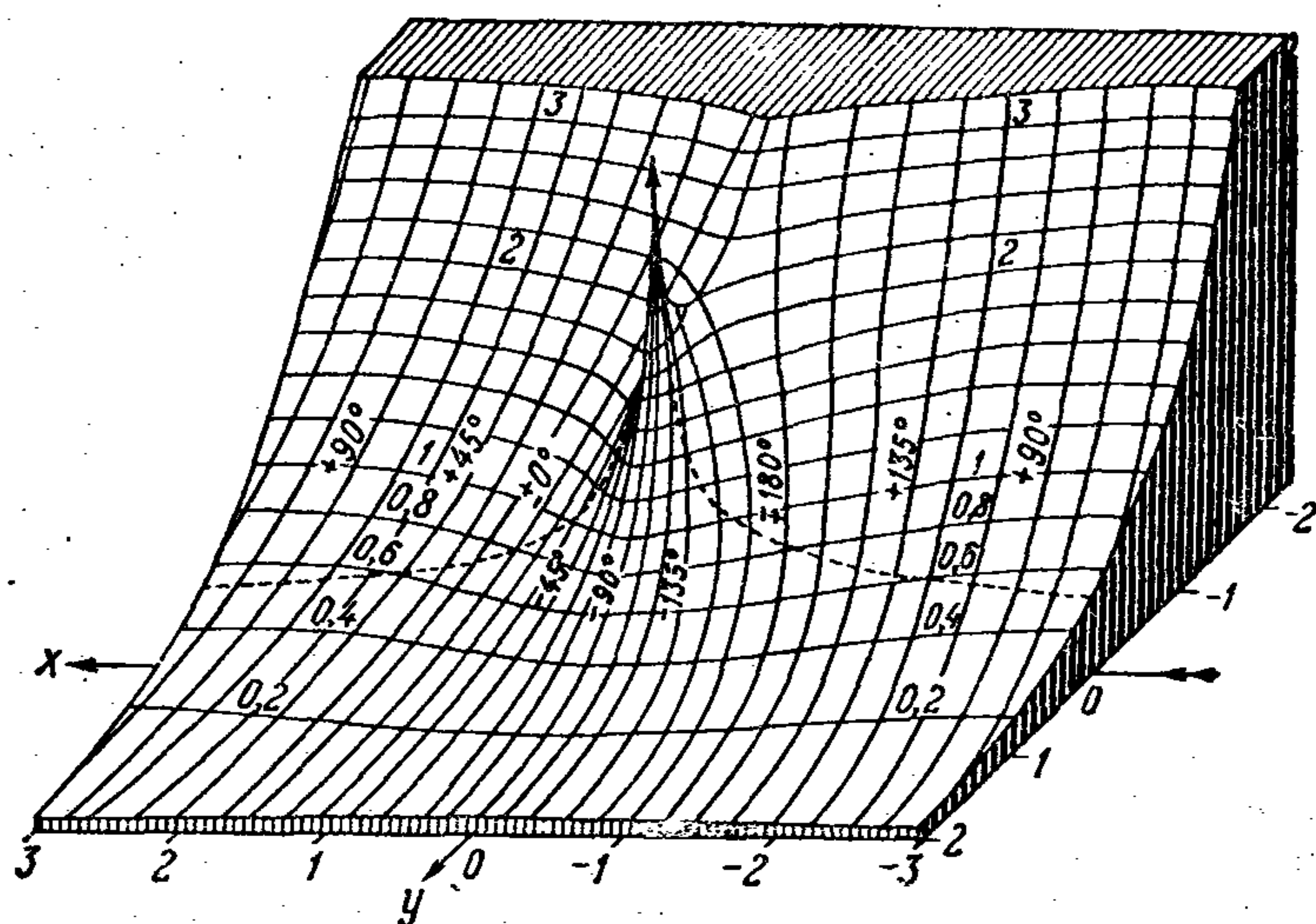


Рис. 115 и 116. Рельеф функции Ганкеля $H_0^{(1)}(z)$; $z = x + iy = re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.
Линия ветвления — вдоль отрицательной действительной полуоси.

2.3. Функции Ганкеля $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ (бесселевы функции 3-го рода) определяются как

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z),$$

что для нецелого ν эквивалентно

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{1}{\sin \nu \pi} \left[e^{-\nu \pi i} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \right], \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{-1}{\sin \nu \pi} \left[e^{\nu \pi i} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \right].$$

Из определений следует, что

$$J_{\nu}(z) = H_{\nu}^{(1)}(z) - iN_{\nu}(z) = H_{\nu}^{(2)}(z) + iN_{\nu}(z) = \frac{1}{2} [H_{\nu}^{(2)}(z) + H_{\nu}^{(1)}(z)],$$

$$N_{\nu}(z) = iJ_{\nu}(z) - iH_{\nu}^{(1)}(z) = iH_{\nu}^{(2)}(z) - iJ_{\nu}(z) = \frac{i}{2} [H_{\nu}^{(2)}(z) - H_{\nu}^{(1)}(z)],$$

$$2J_{-\nu}(z) = e^{\nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(z) + e^{-\nu \pi i} H_{\nu}^{(2)}(z), \quad H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(z),$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu \pi i} H_{\nu}^{(2)}(z), \quad H_{\nu}^{(1)}(\bar{z}) = \overline{H_{\nu}^{(2)}(z)}, \quad H_{\nu}^{(2)}(\bar{z}) = \overline{H_{\nu}^{(1)}(z)}.$$

Функции Ганкеля многозначны; после m обходов вокруг точки ветвления $z=0$ получим:

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(e^{m\pi i} z) &= -\frac{\sin(m-1)\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z) - e^{-\nu\pi i} \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(z), \\ H_{\nu}^{(2)}(e^{m\pi i} z) &= e^{\nu\pi i} \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z) + \frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(z); \end{aligned} \quad (m - \text{целое})$$

В частности, для целого $\nu = n$

$$H_n^{(1)}(e^{m\pi i} z) = (-1)^{mn} [H_n^{(1)}(z) - 2mJ_n(z)],$$

$$H_n^{(2)}(e^{m\pi i} z) = (-1)^{mn} [H_n^{(2)}(z) + 2mJ_n(z)].$$

В отличие от $J_{\nu}(z)$ и $N_{\nu}(z)$, функции Ганкеля действительного порядка ν принимают комплексные значения для действительного аргумента $x > 0$. Роль функций Ганкеля в приложениях заключается в том, что они — единственные из бесселевых функций которые обращаются в нуль при бесконечных значениях комплексного аргумента (рис. 115—120), а именно: $H_{\nu}^{(1)}(z)$ — когда мнимая часть аргумента положительна, $H_{\nu}^{(2)}(z)$ — когда она отрицательна:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} H_{\nu}^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} H_{\nu}^{(2)}(\rho e^{-i\varphi}) = 0 \quad \text{для } 0 < \varphi < \pi.$$

2.4. Бесселевы функции порядка $\nu = n + \frac{1}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) являются элементарными функциями (рис. 108, таблица 44):

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z},$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\cos z}{z} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$N_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n+1} J_{-n-\frac{1}{2}}(z),$$

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-\frac{i\pi}{2}(n+1)} e^{iz} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+k)!}{k! (n-k)!} \frac{1}{(2iz)^k},$$

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\frac{i\pi}{2}(n+1)} e^{iz} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+k)!}{k! (n-k)!} \frac{1}{(2iz)^k}.$$

В частности,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad N_{\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z,$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{iz}}{i}, \quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{-iz}}{-i}.$$

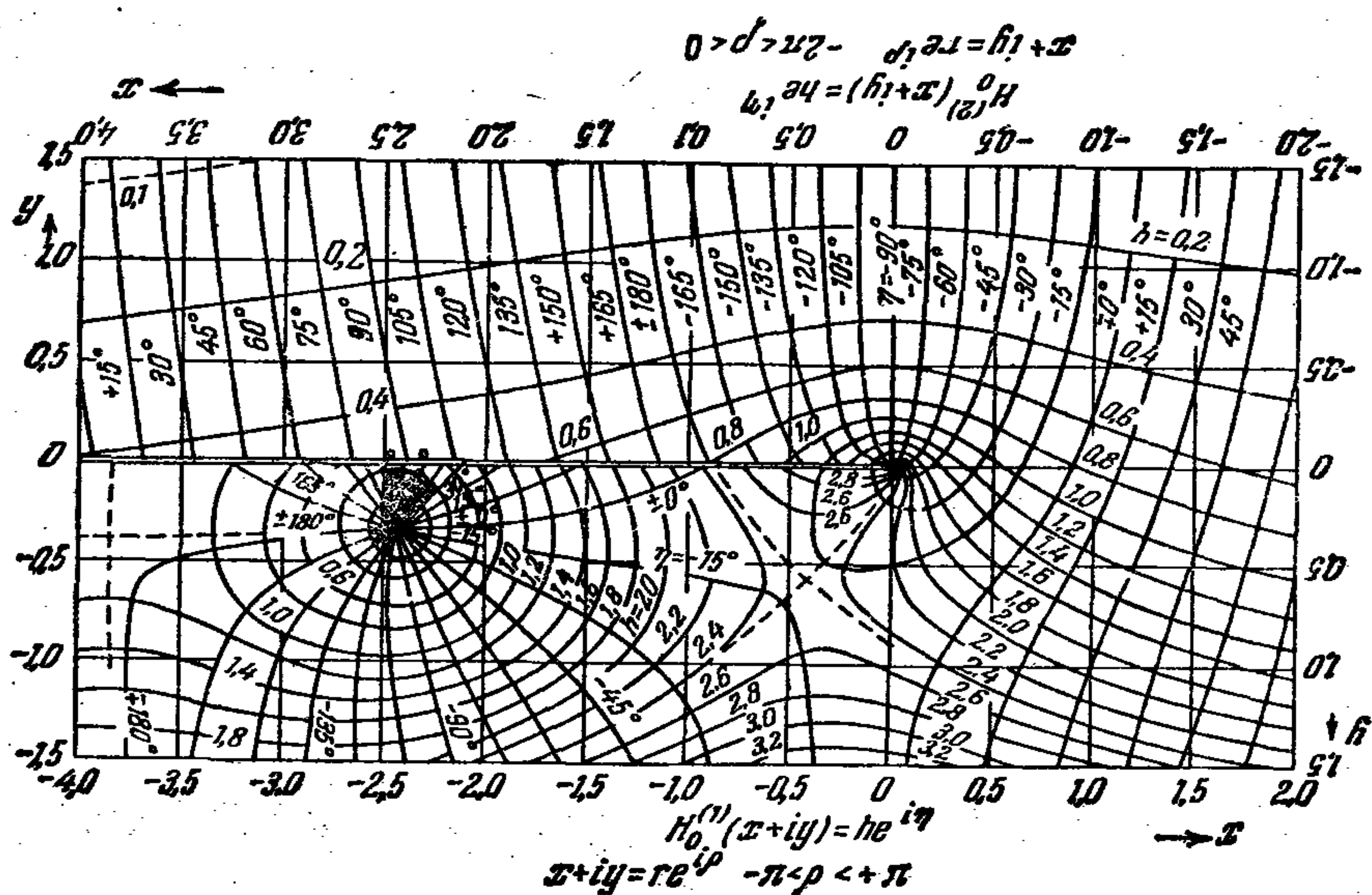


Рис. 117. Карта горизонталей рельефа функций Ганкеля $H_0^{(1)}(z)$ и $H_0^{(2)}(z)$.

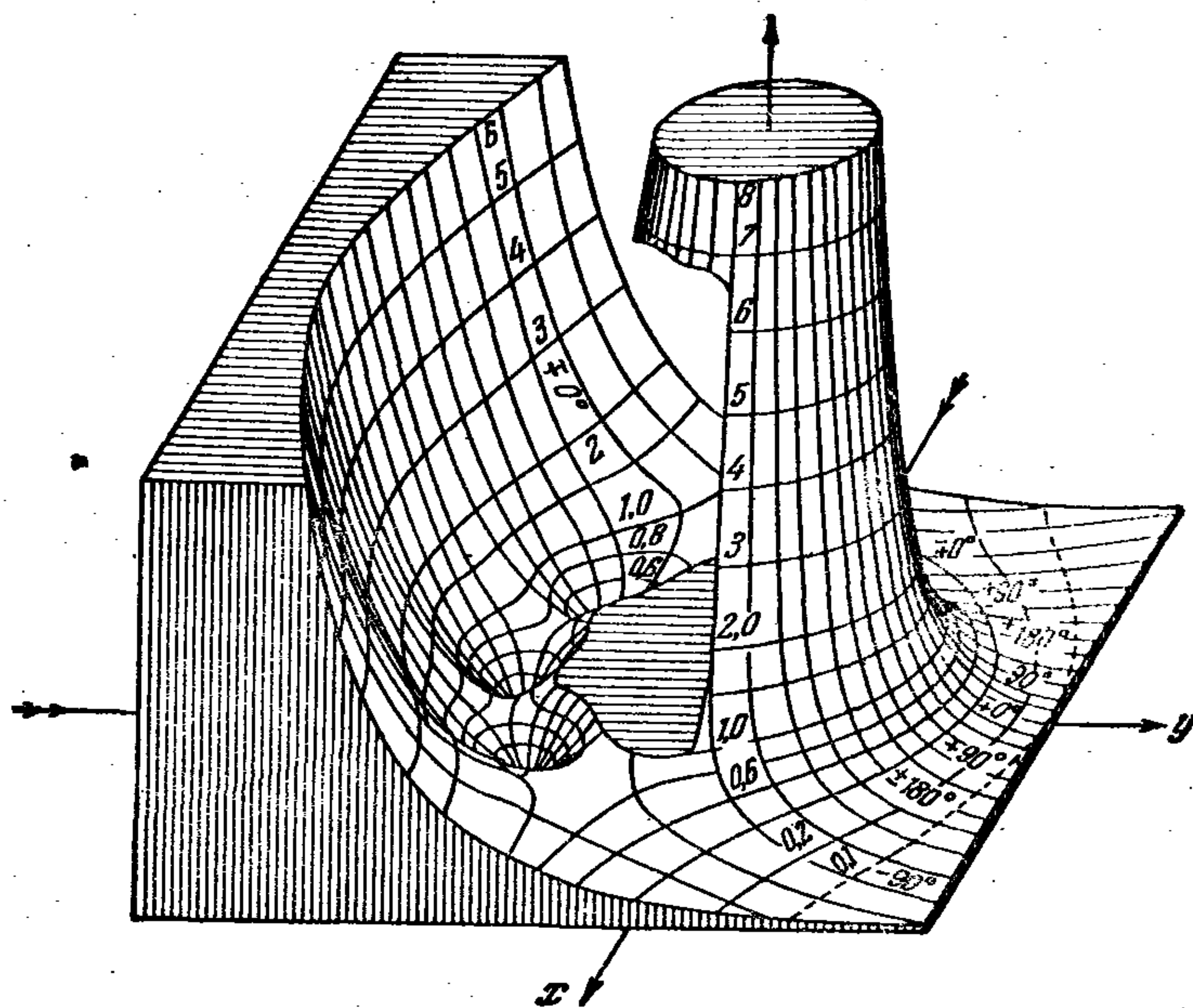


Рис. 118. Рельеф функции Ганкеля $H_{3.5}^{(1)}(z)$.

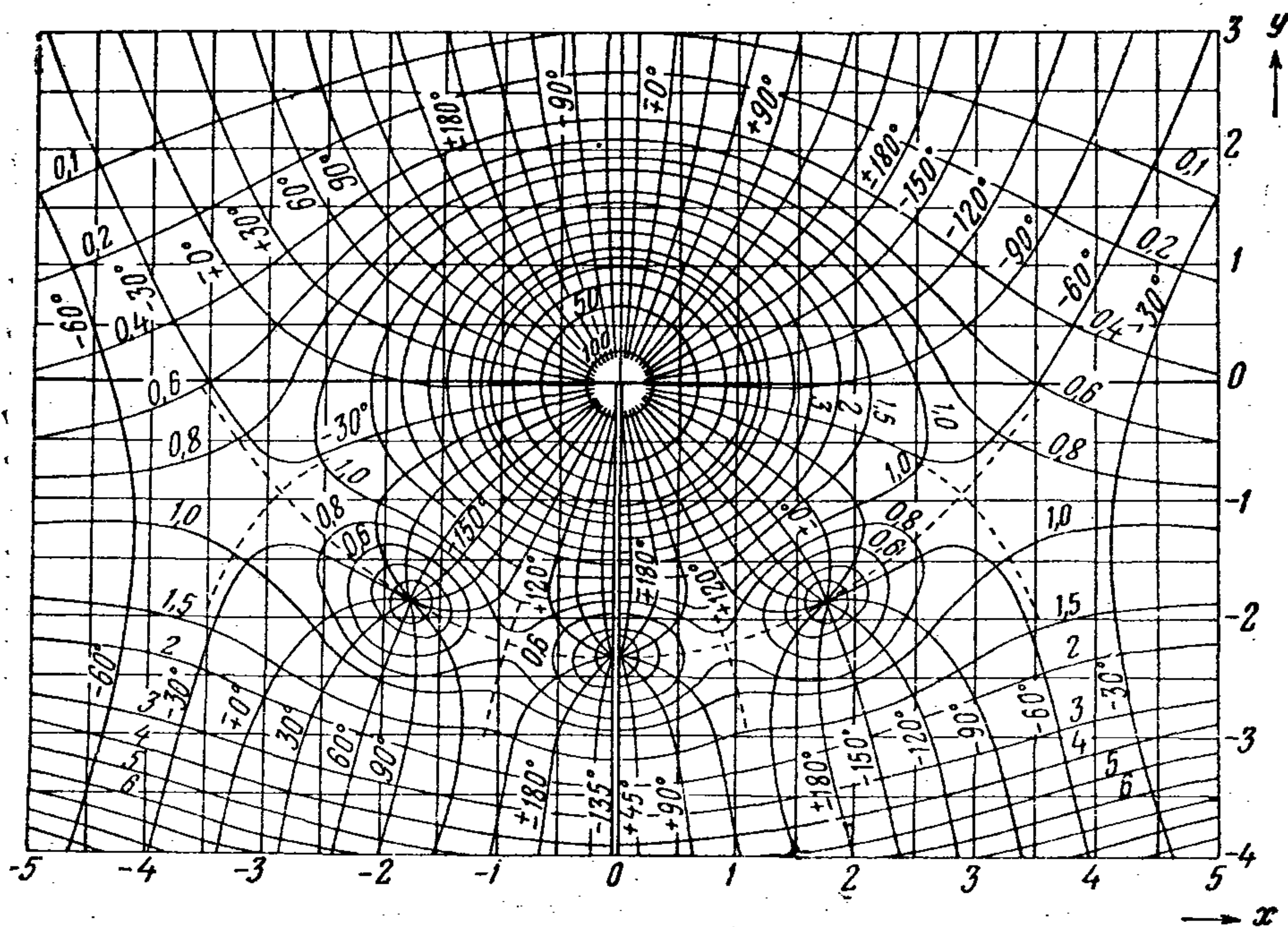


Рис. 119. Карта горизонталей рельефа функции Ганкеля $H_{s,s}^{(1)}(z)$.

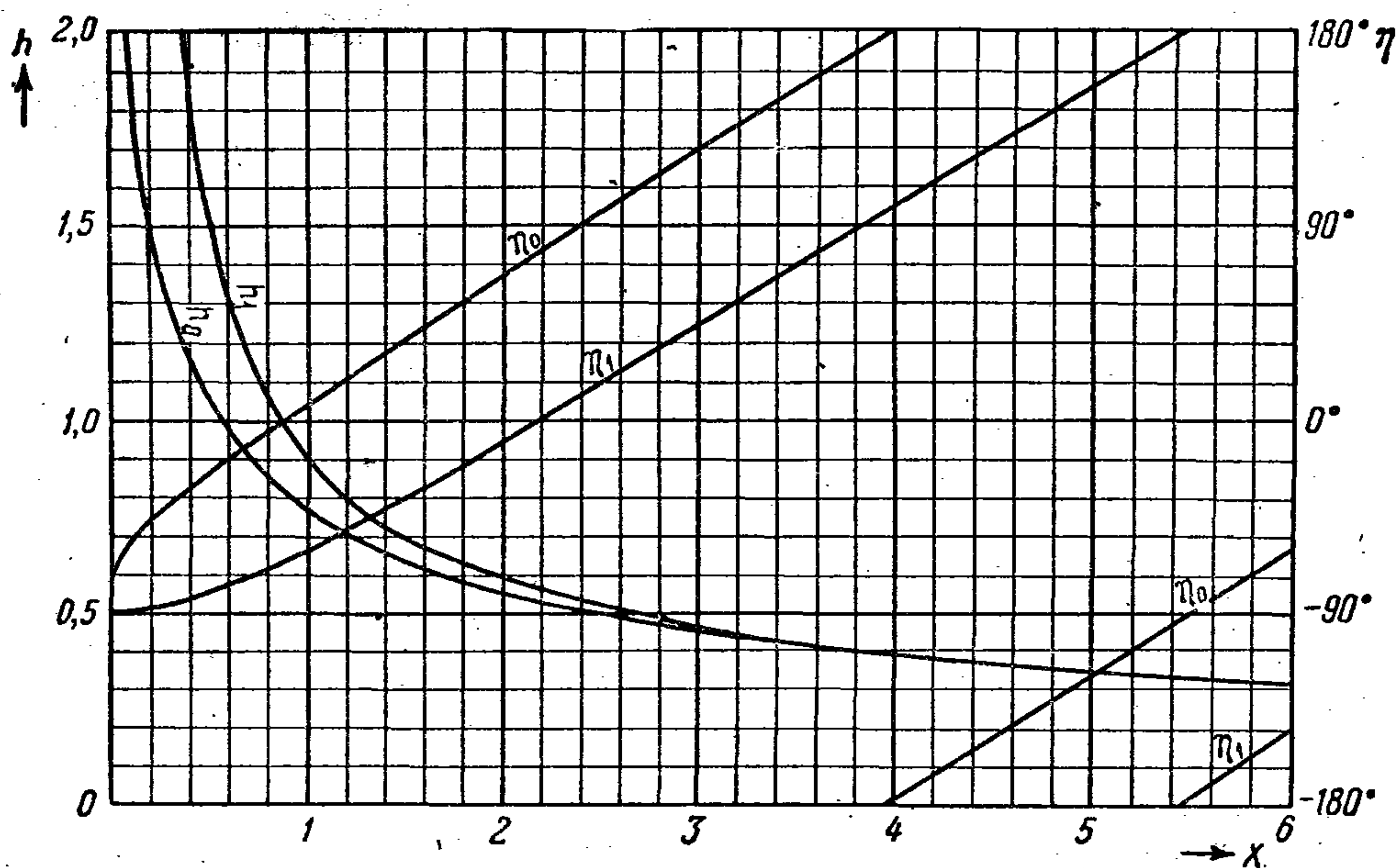


Рис. 120. Функция Ганкеля $H_v^{(1)}(x) = h_v e^{i\eta_v}$, $v=0, 1$.

Т а б л и ц а 42. Функции $\Lambda_n(x) = n! \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_n(x)$

x	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_2(x)$	$\Lambda_3(x)$	$\Lambda_4(x)$	$\Lambda_5(x)$	$\Lambda_6(x)$	$\Lambda_7(x)$	$\Lambda_8(x)$
0,00	+ 1, 0000 — 0,5	+ 1, 0000 0	+ 1, 0000 0	+ 1, 0000 0	+ 1, 0000 0	+ 1, 0000 0	+ 1, 0000 0	+ 1, 0000 0
02	*9999 0,5	0000 — 0,5	0000 — 0,5	0000 — 0,5	0000 — 0,5	0000 — 0,5	0000 0	0000 0
04	9998 1	*9999 1	*9999 0,5	*9999 0,5	*9999 0	*9999 0	0000 — 0,5	0000 — 0,5
06	9996 2	9997 1	9998 1	9998 0,5	9999 1	9999 0,5	*9999 0,5	*9999 0,5
08	9992 2	9995 1,5	9996 1	9997 1	9997 0,5	9998 1	9998 0,5	9998 0,5
0,10	9988 — 3	9992 — 2	9994 — 1,5	9995 — 1	9996 — 1	9996 — 0,5	9997 — 1	9997 — 0,5
12	9982 3	9988 2	9991 1,5	9993 1,5	9994 1	9995 1	9995 1	9996 0,5
14	9976 4	9984 2,5	9983 2	9990 1,5	9992 1,5	9993 1	9993 1	9995 1
16	9968 4	9979 3	9984 2	9987 1,5	9989 1	9991 1,5	9991 0,5	9993 1
18	9960 5	9973 3	9980 2,5	9984 2	9987 2	9988 1	9990 1	9991 1
0,20	9950 — 5	9967 — 3,5	9975 — 2,5	9980 — 2	9983 — 1,5	9986 — 1,5	9988 — 1,5	9989 — 1
22	9940 6	9960 4	9970 3	9976 2,5	9980 2	9983 2	9985 1,5	9987 1,5
24	9928 6	9952 4	9964 3	9971 2,5	9976 2	9979 1,5	9982 1,5	9984 1,5
26	9916 7	9944 4,5	9958 3,5	9966 2,5	9972 2,5	9976 2	9979 1,5	9981 1,5
28	9902 7	9935 5	9951 3,5	9961 3	9967 2	9972 2	9976 2	9978 1,5
0,30	9888 — 7,5	9925 — 5	9944 — 4	9955 — 3	9963 — 3	9968 — 2	9972 — 2	9975 — 1,5
32	9873 8,5	9915 5,5	9936 4	9949 3,5	9957 2,5	9964 2,5	9968 2	9972 2
34	9856 8,5	9904 6	9928 4,5	9942 3,5	9952 3	9959 2,5	9964 2	9968 2
36	9839 9	9892 6	9919 4,5	9935 3,5	9946 3	9954 2,5	9960 2,5	9964 2
38	9821 10	9880 6,5	9910 5	9928 4	9940 3	9949 3	9955 2,5	9960 2
0,40	9801 — 10	9867 — 6,5	9900 — 5	9920 — 4	9934 — 3,5	9943 — 3	9950 — 2,5	9956 — 2,5
42	9781 10,5	9854 7	9890 5	9912 4	9927 3,5	9937 3	9945 2,5	9951 2,5
44	9760 11	9840 7,5	9880 6	9904 4,5	9920 4	9931 3	9940 3	9946 2,5
46	9738 11,5	9825 8	9868 5,5	9895 5	9912 4	9925 3,5	9934 3	9941 2,5
48	9715 12	9809 8	9857 6	9885 4,5	9904 4	9918 3,5	9928 3	9936 2,5
0,50	9691 — 12,5	9793 — 8	9845 — 6,5	9876 — 5	9896 — 4	9911 — 3,5	9922 — 3	9931 — 3
52	9666 13	9777 9	9832 6,5	9866 5,5	9888 4,5	9904 4	9916 3,5	9925 3
54	9640 13,5	9759 9	9819 6,5	9855 5,5	9879 4,5	9896 3,5	9909 3,5	9919 3
56	9613 14	9741 9	9806 7	9844 5,5	9870 4,5	9889 4	9902 3,5	9913 3
58	9585 14	9723 10	9792 7,5	9833 6	9861 5	9881 4,5	9895 3,5	9907 3,5
0,60	9557 — 15	9703 — 9,5	9777 — 7,5	9821 — 6	9851 — 5	9872 — 4	9888 — 3,5	9900 — 3
62	9527 15	9684 10,5	9762 7,5	9809 6	9841 5	9864 4,5	9881 4	9894 3,5
64	9497 16	9663 10,5	9747 8	9797 6,5	9831 5,5	9855 4,5	9873 4	9887 3,5
66	9465 16	9642 11	9731 8,5	9784 6,5	9820 5,5	9846 5	9865 4,5	9880 4
68	9433 16,5	9620 11	9714 8	9771 6,5	9809 5,5	9836 5	9856 4	9872 3,5
0,70	9400 — 17	9598 — 11,5	9698 — 9	9758 — 7	9798 — 6	9826 — 5	9848 — 4,5	9865 — 4
72	9366 17,5	9575 12	9680 9	9744 7,5	9786 6	9816 5	9839 4,5	9857 4
74	9331 18	9551 12	9662 9	9729 7	9774 6	9806 5	9830 4,5	9849 4
76	9295 18,5	9527 12	9644 9	9715 7,5	9762 6,5	9796 5,5	9821 4,5	9841 4,5
78	9258 18,5	9503 13	9626 10	9700 8	9749 6,5	9785 5,5	9812 5	9832 4
0,80	9221 — 19	9477 — 13	9606 — 9,5	9684 — 7,5	9736 — 6,5	9774 — 6	9802 — 5	9824 — 4,5
82	9183 19,5	9451 13	9587 10	9669 8,5	9723 6,5	9762 5,5	9792 5	9815 4,5
84	9144 20	9425 13,5	9567 10,5	9652 8	9710 7	9751 6	9782 5,5	9806 5
86	9104 20,5	9398 14	9546 10,5	9636 8,5	9696 7	9739 6	9771 5	9796 4,5
88	9063 21	9370 14	9525 10,5	9619 8,5	9682 7,5	9727 6,5	9761 5,5	9787 5
0,90	9021 — 21	9342 — 14,5	9504 — 11	9602 — 9	9667 — 7	9714 — 6	9750 — 5,5	9777 — 5
92	8979 22	9313 14,5	9482 11	9584 9	9653 7,5	9702 6,5	9739 6	9767 5
94	8935 22	9284 15	9460 11,5	9566 9	9638 8	9689 6,5	9727 5,5	9757 5
96	8891 22	9254 15,5	9437 11,5	9548 9,5	9622 7,5	9676 7	9716 6	9747 5,5
98	8847 23	9223 15,5	9414 12	9529 9,5	9607 8	9662 7	9704 6	9736 5
1,00	8801 + 0,	9192 + 0,	9390 + 0,	9510 + 0,	9591 + 0,	9648 + 0,	9692 + 0,	9726 + 0

Продолжение табл. 42

x	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
1.00	8801 -23	9192 -15,5	9390 -12	9510 -9,5	9591 -8	9648 -7	9692 -6	9726 -5,5
02	8755 23,5	9161 16	9366 12	9491 10	9575 8,5	9634 7	9680 6,5	9715 6
04	8708 24	9129 16,5	9342 12,5	9471 10	9558 8,5	9620 7	9667 6,5	9704 6
06	8660 24,5	9096 16,5	9317 12,5	9451 10	9541 8,5	9606 7,5	9654 6,5	9692 6
08	8611 24,5	9063 17	9292 13	9431 10,5	9524 8,5	9591 7,5	9641 6,5	9681 6
1.10	8562 -25	9029 -17	9266 -13	9410 -10,5	9507 -9	9576 -7,5	9628 -6,5	9669 -6
12	8512 25,5	8995 17,5	9240 13	9389 10,5	9489 9	9561 8	9615 7	9657 6,5
14	8461 25,5	8960 17,5	9214 13,5	9368 11	9471 9	9545 8	9601 7	9645 6,5
16	8410 26	8925 18	9187 13,5	9346 11	9453 9,5	9529 8	9587 7	9632 6
18	8358 26,5	8889 18	9160 14	9324 11,5	9434 9,5	9513 8	9573 7	9620 6,5
1.20	8305 -27	8853 -18,5	9132 -14	9301 -11	9415 -9,5	9497 -8	9559 -7,5	9607 -6,5
22	8251 -27	8816 18,5	9104 14,5	9279 12	9396 9,5	9481 8,5	9544 7	9594 6,5
24	8197 27	8779 19	9075 14,5	9255 11,5	9377 10	9464 8,5	9530 7,5	9581 6,5
26	8143 28	8741 19	9046 14,5	9232 12	9357 10	9447 8,5	9515 7,5	9568 7
28	8087 28	8703 19,5	9017 15	9208 12	9337 10	9430 9	9500 8	9554 7
1.30	8031 -28	8664 -19,5	8987 -15	9184 -12	9317 -10,5	9412 -9	9484 -7,5	9540 -7
32	7975 29	8625 20	8957 15	9160 12,5	9296 10,5	9394 9	9469 8	9526 7
34	7917 28,5	8585 20	8927 15,5	9135 12,5	9275 10,5	9376 9	9453 8	9512 7
36	7860 29,5	8545 20	8896 15,5	9110 12,5	9254 10,5	9358 9	9437 8,5	9498 7,5
38	7801 29,5	8505 20,5	8865 16	9085 13	9233 11	9340 9,5	9420 8	9483 7
1.40	7742 -29,5	8464 -21	8833 -15,5	9059 -13	9211 -10,5	9321 -9,5	9404 -8,5	9469 -7,5
42	7683 30	8422 21	8802 16,5	9033 13	9190 11,5	9302 9,5	9387 8,5	9454 7,5
44	7623 30,5	8380 21	8769 16	9007 13,5	9167 11	9283 9,5	9370 8,5	9439 8
46	7562 30,5	8338 21,5	8737 16,5	8980 13	9145 11,5	9264 10	9353 8,5	9423 7,5
48	7501 31	8295 21,5	8704 17	8954 14	9122 11,5	9244 10	9336 9	9408 8
1.50	7439 -31	8252 -21,5	8670 -16,5	8926 -13,5	9099 -11,5	9224 -10	9318 -8,5	9392 -8
52	7377 31,5	8209 22	8637 17	8899 14	9076 11,5	9204 10	9301 9	9376 8
54	7314 31,5	8165 22,5	8603 17	8871 14	9053 12	9184 10,5	9283 9	9360 8
56	7251 31,5	8120 22,5	8569 17,5	8843 14	9029 12	9163 10,5	9265 9,5	9344 8
58	7188 32	8075 22,5	8534 17,5	8815 14,5	9005 12	9142 10,5	9246 9	9328 8,5
1.60	7124 -32,5	8030 -22,5	8499 -17,5	8786 -14,5	8981 -12,5	9121 -10,5	9228 -9,5	9311 -8,5
62	7059 32,5	7985 23	8464 18	8757 14,5	8956 12	9100 10,5	9209 9,5	9294 8
64	6994 32,5	7939 23	8428 18	8728 14,5	8932 12,5	9079 11	9190 9,5	9278 9
66	6929 33	7893 23,5	8392 18	8699 15	8907 12,5	9057 11	9171 9,5	9260 8,5
68	6863 33	7846 23,5	8356 18,5	8669 15	8882 13	9035 11	9152 10	9243 8,5
1.70	6797 -33	7799 -23,5	8319 -18,5	8639 -15	8856 -12,5	9013 -11	9132 -9,5	9226 -9
72	6731 33,5	7752 24	8282 18,5	8609 15,5	8831 13	8991 11	9113 10	9208 9
74	6664 33,5	7704 24	8245 18,5	8578 15	8805 13	8969 11,5	9093 10	9190 9
76	6597 34	7656 24	8208 19	8548 16	8779 13,5	8946 11,5	9073 10,5	9172 9
78	6529 34	7608 24,5	8170 19	8516 15,5	8752 13	8923 11,5	9052 10	9154 9
1.80	6461 -34	7559 -24,5	8132 -19	8485 -15,5	8726 -13,5	8900 -12	9032 -10,5	9136 -9,5
82	6393 34	7510 24,5	8094 19,5	8454 16	8699 13,5	8876 11,5	9011 10,5	9117 9,5
84	6325 34,5	7461 25	8055 19,5	8422 16	8672 14	8853 12	8990 10,5	9098 9
86	6256 34,5	7411 24,5	8016 19,5	8390 16	8644 13,5	8829 12	8969 10,5	9080 9,5
88	6187 35	7362 25,5	7977 19,5	8358 16,5	8617 14	8805 12	8948 10,5	9061 10
1.90	6117 -34,5	7311 -25	7938 -20	8325 -16,5	8589 -14	8781 -12	8927 -11	9041 -9,5
92	6048 35	7261 25,5	7898 20	8292 16,5	8561 14	8757 12,5	8905 10,5	9022 10
94	5978 35	7210 25,5	7858 20	8259 16,5	8533 14	8732 12	8884 11	9002 9,5
96	5908 35	7159 25,5	7818 20,5	8226 16,5	8505 14,5	8708 12,5	8862 11	8983 10
98	5838 35,5	7108 25,5	7777 20	8193 17	8476 14	8683 12,5	8840 11,5	8963 10
2.00	5767 + 0,	7057 + 0,	7737 + 0,	8159 + 0,	8448 + 0,	8658 + 0,	8817 + 0	8943 + 0,

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_2(x)$	$\Lambda_3(x)$	$\Lambda_4(x)$	$\Lambda_5(x)$	$\Lambda_6(x)$	$\Lambda_7(x)$	$\Lambda_8(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
2,00	5767 — 35	7057 — 26	7737 — 20,5	8159 — 17	8448 — 14,5	8658 — 13	8817 — 11	8943 — 10
02	5697 35,5	7005 26	7696 20,5	8125 17	8419 15	8632 12,5	8795 11,5	8923 10,5
04	5626 35,5	6953 26	7655 21	8091 17	8389 14,5	8607 13	8772 11,5	8902 10
06	5555 35,5	6901 26	7613 20,5	8057 17,5	8360 14,5	8581 13	8749 11,5	8882 10,5
08	5484 36	6849 26,5	7572 21	8022 17,5	8331 15	8555 13	8726 11,5	8861 10,5
2,10	5412 — 35,5	6796 — 26,5	7530 — 21	7987 — 17,5	8301 — 15	8529 — 13	8703 — 11,5	8840 — 10,5
12	5341 36	6743 26,5	7488 21,5	7952 17,5	8271 15	8503 13	8680 11,5	8819 10,5
14	5269 35,5	6690 26,5	7445 21	7917 17,5	8241 15,5	8477 13,5	8657 12	8798 10,5
16	5198 36	6637 26,5	7403 21,5	7882 18	8210 15	8450 13,5	8633 12	8777 10,5
18	5126 36	6584 27	7360 21	7846 17,5	8180 15,5	8423 13	8609 12	8756 11
2,20	5054 — 36	6530 — 27	7318 — 22	7811 — 18	8149 — 15,5	8397 — 14	8585 — 12	8734 — 11
22	4982 36	6476 27	7274 21,5	7775 18,5	8118 15,5	8369 13,5	8561 12	8712 11
24	4910 35,5	6422 27	7231 21,5	7738 18	8087 15,5	8342 13,5	8537 12,5	8690 11
26	4839 36	6368 27	7188 22	7702 18	8056 15,5	8315 14	8512 12	8668 11
28	4767 36	6314 27	7144 22	7666 18,5	8025 16	8287 13,5	8488 12,5	8646 11
2,30	4695 — 36	6260 — 27,5	7100 — 22	7629 — 18,5	7993 — 16	8260 — 14	8463 — 12,5	8624 — 11
32	4623 36	6205 27,5	7056 22	7592 18,5	7961 16	8232 14	8438 12,5	8602 11,5
34	4551 36	6150 27	7012 22	7555 18,5	7929 16	8204 14,5	8413 12,5	8579 11,5
36	4479 36	6096 27,5	6968 22	7518 19	7897 16	8175 14	8388 12,5	8556 11,5
38	4407 36	6041 27,5	6924 22,5	7480 18,5	7865 16	8147 14	8363 13	8533 11,5
2,40	4335 — 36	5986 — 27,5	6879 — 22,5	7443 — 19,5	7833 — 16,5	8119 — 14,5	8337 — 12,5	8510 — 11,5
42	4263 36	5931 27,5	6834 22,5	7404 18,5	7800 16,5	8090 14,5	8312 13	8487 11,5
44	4191 35,5	5876 28	6789 22,5	7367 18,5	7767 16	8061 14,5	8286 13	8464 11,5
46	4120 36	5820 27,5	6744 22,5	7330 19,5	7735 16,5	8032 14,5	8260 13	8441 12
48	4048 35,5	5765 27,5	6699 22,5	7291 19	7702 17	8003 14,5	8234 13	8417 12
2,50	3977 — 36	5710 — 28	6654 — 22,5	7253 — 19	7668 — 16,5	7974 — 15	8208 — 13	8393 — 11,5
52	3905 35,5	5654 27,5	6609 23	7215 19,5	7635 16,5	7944 14,5	8182 13,5	8370 12
54	3834 35,5	5599 28	6563 23	7176 19,5	7602 17	7915 15	8155 13	8346 12
56	3763 35,5	5543 28	6517 22,5	7137 19	7568 17	7885 15	8129 13,5	8322 12,5
58	3692 35	5487 27,5	6472 23	7099 19,5	7534 16,5	7855 15	8102 13,5	8297 12
2,60	3622 — 35,5	5432 — 28	6426 — 23	7060 — 19,5	7501 — 17,5	7825 — 15	8075 — 13,5	8273 — 12
62	3551 35	5376 28	6380 23	7021 20	7466 17	7795 15	8048 13,5	8249 12,5
64	3481 35	5320 27,5	6334 23	6981 19,5	7432 17	7765 15	8021 13,5	8224 12,5
66	3411 35	5265 28	6288 23	6942 19,5	7398 17	7735 15,5	7994 14	8199 12
68	3341 35	5209 28	6242 23,5	6903 20	7364 17,5	7704 15	7966 13,5	8175 12,5
2,70	3271 — 34,5	5153 — 28	6195 — 23	6863 — 19,5	7329 — 17	7674 — 15,5	7939 — 13,5	8150 — 12,5
72	3202 34,5	5097 28	6149 23	6824 20	7295 17,5	7643 15,5	7912 14	8125 12,5
74	3133 34,5	5041 27,5	6103 23,5	6784 20	7260 17,5	7612 15	7884 14	8100 13
76	3064 34,5	4986 28	6056 23,5	6744 20	7225 17,5	7582 16	7856 14	8074 12,5
78	2995 34,5	4930 28	6009 23	6704 20	7190 17,5	7550 15,5	7828 14	8049 12,5
2,80	2926 — 34	4874 — 27,5	5963 — 23,5	6664 — 20	7155 — 17,5	7519 — 15,5	7800 — 14	8024 — 13
82	2858 33,5	4819 28	5916 23,5	6624 20	7120 17,5	7488 15,5	7772 14	7998 13
84	2791 34	4763 27,5	5869 23	6584 20,5	7085 17,5	7457 16	7744 14,5	7972 13
86	2723 33,5	4708 28	5823 23,5	6543 20	7050 18	7425 15,5	7715 14	7946 12,5
88	2656 33,5	4652 27,5	5776 23,5	6503 20	7014 17,5	7394 16	7687 14,5	7921 13
2,90	2589 — 33	4597 — 28	5729 — 23,5	6463 — 20,5	6979 — 18	7362 — 16	7658 — 14	7895 — 13,5
92	2523 33	4541 27,5	5682 23,5	6422 20	6943 18	7330 16	7630 14,5	7868 13
94	2457 33	4486 27,5	5635 23,5	6382 20,5	6907 18	7298 16	7601 14,5	7842 13
96	2391 33	4431 27,5	5588 23,5	6341 20,5	6871 17,5	7266 16	7572 14,5	7816 13,5
98	2325 32,5	4376 27,5	5541 23,5	6300 20,5	6836 18	7234 16	7543 14,5	7789 13
3,00	2260	4321	5494	6259	6800	7202	7514	7763
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 42

x	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
3,00	2260 — 32	4321 — 27,5	5494 — 23	6259 — 20	6800 — 18	7202 — 16	7514 — 14,5	7763 — 13,5
02	2196 32	4266 27,5	5448 24	6219 20,5	6764 18,5	7170 16	7485 14,5	7736 13
04	2132 32	4211 27,5	5400 23	6178 20,5	6727 18	7138 16,5	7456 15	7710 13,5
06	2068 32	4156 27	5354 23,5	6137 20,5	6691 18	7105 16	7426 14,5	7683 13,5
08	2004 31,5	4102 27	5307 23,5	6096 20,5	6655 18	7073 16,5	7397 15	7656 13,5
3,10	1941 — 31	4048 — 27,5	5260 — 23,5	6055 — 20,5	6619 — 18,5	7040 — 16,5	7367 — 14,5	7629 — 13,5
12	1879 31	3993 27	5213 23,5	6014 20,5	6582 18	7007 16	7338 15	7602 13,5
14	1817 31	3939 27	5166 23,5	5973 21	6546 18,5	6975 16,5	7308 15	7575 13,5
16	1755 30,5	3885 27	5119 23,5	5931 20,5	6509 18	6942 16,5	7278 15	7548 14
18	1694 30,5	3831 26,5	5072 23,5	5890 20,5	6473 18,5	6909 16,5	7248 15	7520 13,5
3,20	1633 — 30	3778 — 27	5025 — 23	5849 — 20,5	6436 — 18,5	6876 — 16,5	7218 — 15	7493 — 14
22	1573 29,5	3724 26,5	4979 23,5	5808 20,5	6399 18	6843 16,5	7188 15	7465 13,5
24	1514 30	3671 26,5	4932 23,5	5767 20,5	6363 18,5	6810 16,5	7158 15	7438 14
26	1454 29	3618 26,5	4885 23	5726 21	6326 18,5	6777 17	7128 15	7410 14
28	1396 29,5	3565 26,5	4839 23,5	5684 20,5	6289 18,5	6743 16,5	7098 15	7382 13,5
3,30	1337 — 28,5	3512 — 26,5	4792 — 23,5	5643 — 20,5	6252 — 18,5	6710 — 16,5	7068 — 15,5	7355 — 14
32	1280 29	3459 26	4745 23	5602 21	6215 18,5	6677 17	7037 15	7327 14
34	1222 28	3407 26	4699 23	5560 20,5	6178 18,5	6643 16,5	7007 15,5	7299 14
36	1166 28	3355 26	4653 23,5	5519 20,5	6141 18,5	6610 17	6976 15	7271 14
38	1110 28	3303 26	4606 23	5478 20,5	6104 18,5	6576 16,5	6946 15,5	7243 14
3,40	1054 — 27,5	3251 — 26	4560 — 23	5437 — 21	6067 — 18,5	6543 — 17	6915 — 15,5	7215 — 14,5
42	0999 27	3199 25,5	4514 23	5395 20,5	6030 18,5	6509 16,5	6884 15	7186 14
44	0945 27	3148 25,5	4468 23	5354 20,5	5993 18,5	6476 17	6854 15,5	7158 14
46	0891 26,5	3097 25,5	4422 23	5313 20,5	5956 18,5	6442 17	6823 15,5	7130 14,5
48	0838 26,5	3046 25,5	4376 23	5272 20,5	5919 19	6408 17	6792 15,5	7101 14
3,50	0785 — 26	2995 — 25	4330 — 23	5231 — 21	5881 — 18,5	6374 — 16,5	6761 — 15,5	7073 — 14,5
52	0733 26	2945 25	4284 22,5	5189 20,5	5844 18,5	6341 17	6730 15,5	7044 14
54	0681 25,5	2895 25	4239 23	5148 20,5	5807 18,5	6307 17	6699 15,5	7016 14,5
56	0630 25	2845 25	4193 22,5	5107 20,5	5770 18,5	6273 17	6668 15,5	6987 14,5
58	0580 25	2795 24,5	4148 22,5	5066 20,5	5733 19	6239 17	6637 15,5	6958 14
3,60	0530 — 24,5	2746 — 24,5	4103 — 23	5025 — 20,5	5695 — 18,5	6205 — 17	6606 — 15,5	6930 — 14,5
62	0481 24	2697 24,5	4057 22,5	4984 20,5	5658 18,5	6171 17	6575 16	6901 14,5
64	0438 24	2648 24,5	4012 22,5	4943 20,5	5621 18,5	6137 17	6543 15,5	6872 14,5
66	0385 23,5	2599 24	3967 22	4902 20	5584 19	6103 17	6512 15,5	6843 14,5
68	0338 23,5	2551 24	3923 22,5	4862 20,5	5546 18,5	6069 17	6481 16	6814 14,5
3,70	02910 — 230	2503 — 24	3878 — 22,5	4821 — 20,5	5509 — 18,5	6035 — 17	6449 — 15,5	6785 — 14,5
72	02450 226,5	2455 23,5	3833 22	4780 20,5	5472 18,5	6001 17,5	6418 15,5	6756 14,5
74	01997 223,5	2408 23,5	3789 22	4739 20	5435 18,5	5966 17	6387 16	6727 14,5
76	01550 220,5	2361 23,5	3745 22	4699 20,5	5398 19	5932 17	6355 15,5	6698 14,5
78	01109 217	2314 23	3701 22	4658 20	5360 18,5	5898 17	6324 16	6669 15
3,80	00675 — 214	2268 — 23	3657 — 22	4618 — 20,5	5323 — 18,5	5864 — 17	6292 — 16	6639 — 14,5
82	00247 210,5	2222 23	3613 22	4577 20	5286 18,5	5830 17	6260 15,5	6610 14,5
84	*00174 207	2176 23	3569 21,5	4537 20	5249 18,5	5796 17	6229 16	6581 15
86	00588 204	2130 22,5	3526 21,5	4497 20,5	5212 18,5	5762 17,5	6197 15,5	6551 14,5
88	00996 200,5	2085 22,5	3483 22	4456 20	5175 18,5	5727 17	6166 16	6522 14,5
3,90	01397 — 197,5	2040 — 22	3439 — 21,5	4416 — 20	5138 — 18,5	5693 — 17	6134 — 16	6493 — 15
92	01792 193,5	1996 22,5	3396 21	4376 20	5101 18,5	5659 17	6102 15,5	6463 14,5
94	02179 190,5	1951 22	3354 21,5	4336 20	5064 18,5	5625 17	6071 16	6434 15
96	02560 187,5	1907 21,5	3311 21	4296 19,5	5027 18,5	5591 17	6039 16	6404 14,5
98	02935 183,5	1864 21,5	3269 21,5	4257 20	4990 18,5	5557 17,5	6007 15,5	6375 15
4,00	03302 — 0,	1821 + 0,	3226 + 0,	4217 + 0,	4953 + 0,	5522 + 0,	5976 + 0,	6345 + 0,

Продолжение табл. 42

x	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	- 0,0	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
4.00	3302 -180,5	1821 -21,5	3226 -21	4217 -20	4953 -18	5522 -17	5976 -16	6345 -14,5
02	3663 177	1778 21,5	3184 21	4177 19,5	4917 18,5	5488 17	5944 16	6316 15
04	4017 173,5	1735 21	3142 20,5	4138 19,5	4880 18,5	5454 17	5912 16	6286 15
06	4364 170	1693 21	3101 21	4099 20	4843 18,5	5420 17	5880 15,5	6256 14,5
08	4704 167	1651 20,5	3059 20,5	4059 19,5	4806 18	5386 17	5849 16	6227 15
4.10	5038 -163	1610 -20,5	3018 -20,5	4020 -19,5	4770 -18,5	5352 -17	5817 -16	6197 -15
12	5364 160	1569 20,5	2977 20,5	3981 19,5	4733 18	5318 17	5785 16	6167 15
14	5684 156,5	1528 20	2936 20,5	3942 19,5	4697 18,5	5284 17	5753 15,5	6137 14,5
16	5997 153	1488 20	2895 20	3903 19	4660 18	5250 17	5722 16	6108 15
18	6303 149,5	1448 20	2855 20,5	3865 19,5	4624 18	5216 17	5690 16	6078 14,5
4.20	6602 -146,5	1408 -19,5	2814 -20	3826 -19,5	4588 -18,5	5182 -17	5658 -16	6049 -15
22	6895 142,5	1369 19,5	2774 20	3787 19	4551 18	5148 17	5626 15,5	6019 15
24	7180 139,5	1330 19	2734 19,5	3749 19	4515 18	5114 17	5595 16	5989 15
26	7459 135,5	1292 19	2695 20	3711 19	4479 18	5080 17	5563 16	5959 15
28	7730 132,5	1254 19	2655 19,5	3673 19	4443 18	5046 17	5531 16	5929 14,5
4.30	7995 -129	1216 -18,5	2616 -19,5	3635 -19	4407 -18	5012 -16,5	5499 -15,5	5900 -15
32	8253 125,5	1179 18,5	2577 19,5	3597 19	4371 18	4979 17	5468 16	5870 15
34	8504 122,5	1142 18,5	2538 19	3559 18,5	4335 17,5	4945 17	5436 16	5840 15
36	8749 118,5	1105 18	2500 19	3522 19	4300 18	4911 16,5	5404 15,5	5810 14,5
38	8986 115,5	1069 18	2462 19	3484 18,5	4264 17,5	4878 17	5373 16	5781 15
4.40	9217 -112	1033 -17,5	2424 -19	3447 -18,5	4229 -18	4844 -17	5341 -16	5751 -15
42	9441 108,5	0998 17,5	2386 19	3410 18,5	4193 17,5	4810 16,5	5309 15,5	5721 15
44	9658 105,5	0963 17	2348 18,5	3373 18,5	4158 18	4777 16,5	5278 16	5691 15
46	9869 101,5	0929 17,5	2311 18,5	3336 18,5	4122 17,5	4744 17	5246 15,5	5661 15
48	*0072 98,5	0894 16,5	2274 18,5	3299 18	4087 17,5	4710 16,5	5215 16	5631 14,5
4.50	0269 -95,5	0861 -17	2237 -18	3263 -18,5	4052 -17,5	4677 -17	5183 -15,5	5602 -15
52	0460 91,5	0827 16,5	2201 18,5	3226 18	4017 17,5	4643 16,5	5152 16	5572 15
54	0643 88,5	0794 16	2164 18	3190 18	3982 17,5	4610 16,5	5120 15,5	5542 15
56	0820 85,5	0762 16	2128 18	3154 18	3947 17,5	4577 16,5	5089 16	5512 14,5
58	0991 81,5	0730 16	2092 17,5	3118 18	3912 17	4544 16,5	5057 15,5	5483 15
4.60	1154 -79	06979 -156,5	2057 -18	3082 -17,5	3878 -17,5	4511 -16,5	5026 -15,5	5453 -15
62	1312 75	06666 155	2021 17,5	3047 18	3843 17	4478 16,5	4995 16	5423 14,5
64	1462 72,5	06356 152,5	1986 17	3011 17,5	3809 17	4445 16,5	4963 15,5	5394 15
66	1607 68,5	06051 150,5	1952 17,5	2976 17,5	3775 17,5	4412 16,5	4932 15,5	5364 15
68	1744 66	05750 148,5	1917 17	2941 17,5	3740 17	4379 16	4901 15,5	5334 14,5
4.70	1876 -62,5	05453 -146,5	1883 -17	2906 -17,5	3706 -17	4347 -16,5	4870 -15,5	5305 -15
72	2001 59	05160 144,5	1849 17	2871 17	3672 17	4314 16,5	4839 16	5275 14,5
74	2119 56,5	04871 142	1815 16,5	2837 17,5	3638 16,5	4281 16	4807 15,5	5246 15
76	2232 53	04587 140,5	1782 17	2802 17	3605 17	4249 16,5	4776 15,5	5216 15
78	2338 49,5	04306 138	1748 16,5	2768 17	3571 17	4216 16	4745 15,5	5186 14,5
4.80	2437 -47	04030 -136,5	1715 -16	2734 -17	3537 -16,5	4184 -16	4714 -15	5157 -15
82	2531 44	03757 134	1683 16,5	2700 17	3504 16,5	4152 16	4684 15,5	5127 14,5
84	2619 40,5	03489 132	1650 16	2666 16,5	3471 16,5	4120 16,5	4653 15,5	5098 14,5
86	2700 37,5	03225 130	1618 16	2633 16,5	3438 16,5	4087 16	4622 15,5	5069 15
88	2775 35	02965 128	1586 15,5	2600 16,5	3405 16,5	4055 16	4591 15,5	5039 14,5
4.90	2845 -31,5	02709 -126	1555 -16	2567 -16,5	3372 -16,5	4023 -16	4560 -15	5010 -15
92	2908 29	02457 124	1523 15,5	2534 16,5	3339 16,5	3991 15,5	4530 15,5	4980 14,5
94	2966 25,5	02209 122	1492 15	2501 16,5	3306 16	3960 16	4499 15	4951 14,5
96	3017 23	01965 119,5	1462 15,5	2468 16	3274 16,5	3928 16	4469 15,5	4922 14,5
98	3063 20	01726 118	1431 15	2436 16	3241 16	3896 15,5	4438 15	4893 15
5.00	3103 -0,1	01490 + 0,	1401 + 0,	2404 + 0,	3209 + 0,	3865 + 0,	4408 + 0,	4863 + 0,

Продолжение табл. 42

x	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$	$J_7(x)$	$J_8(x)$
	- 0,1	+ 0,0	+ 0,1	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
5,00	3103 — 17,5	1490 — 115,5	4010 — 150	2404 — 16	3209 — 16	3865 — 16	4408 — 15,5	4863 — 14,5
02	3138 14	1259 114	3710 148	2372 16	3177 16	3833 15,5	4377 15	4834 14,5
04	3166 12	1031 111,5	3414 146,5	2340 16	3145 16	3802 15,5	4347 15	4805 14,5
06	3190 8,5	0808 109,5	3121 145,5	2308 15,5	3113 16	3771 15,5	4317 15	4776 14,5
08	3207 6	0589 108	2830 144	2277 15,5	3081 15,5	3740 15,5	4287 15,5	4747 14,5
5,10	3219 — 3,5	0373 — 105,5	2542 — 142	2246 — 15,5	3050 — 16	3709 — 15,5	4256 — 15	4718 — 14,5
12	3226 — 1	0162 103,5	2258 141,5	2215 15,5	3018 15,5	3678 15,5	4226 15	4689 14,5
14	3228 — 2	*0045 101,5	1975 139,5	2184 15,5	2987 15,5	3647 15,5	4196 15	4660 14,5
16	3224 4,5	0248 99,5	1696 138	2153 15	2956 15,5	3616 15,5	4166 14,5	4631 14
18	3215 7	0447 98	1420 137	2123 15	2925 15,5	3585 15	4137 15	4603 14,5
5,20	3201 — 9,5	0643 — 95,5	1146 — 135	2093 — 15	2894 — 15,5	3555 — 15,5	4107 — 15	4574 — 14,5
22	3182 12,5	0834 93,5	0876 134	2063 15	2863 15,5	3524 15	4077 14,5	4545 14,5
24	3157 14,5	1021 91,5	0608 132,5	2033 15	2832 15	3494 15	4048 15	4516 14
26	3128 17	1204 90	0343 131	2003 14,5	2802 15	3464 15	4018 14,5	4488 14,5
28	3094 19,5	1384 87,5	0081 129,5	1974 14,5	2772 15	3434 15	3989 15	4459 14
5,30	3055 — 22	1559 — 86	*9822 — 128	1945 — 14,5	2742 — 15	3404 — 15	3959 — 14,5	4431 — 14,5
32	3011 24	1731 83,5	9566 127	1916 14,5	2712 15	3374 15	3930 14,5	4402 14
34	2963 26,5	1898 82	9312 125	1887 14	2682 15	3344 15	3901 15	4374 14
36	2910 28,5	2062 80	9062 124	1859 14,5	2652 14,5	3314 14,5	3871 14,5	4346 14,5
38	2853 31	2222 78	8814 122	1830 14	2623 15	3285 15	3842 14,5	4317 14
5,40	2791 — 33,5	2378 — 76,5	8570 — 121	1802 — 14	2593 — 14,5	3255 — 14,5	3813 — 14,5	4289 — 14
42	2724 35,5	2531 74	8329 119,5	1774 13,5	2564 14,5	3226 15	3784 14	4261 14
44	2653 37,5	2679 72,5	8089 118	1747 14	2535 14,5	3196 14,5	3756 14,5	4233 14
46	2578 39,5	2824 70,5	7853 117	1719 13,5	2506 14,5	3167 14,5	3727 14,5	4205 14
48	2499 41,5	2965 69	7619 115	1692 13,5	2477 14	3138 14,5	3698 14	4177 14
5,50	2416 — 43,5	3103 — 66,5	7389 — 113,5	16648 — 134	2449 — 14,5	3109 — 14	3670 — 14,5	4149 — 14
52	2329 46	3236 65	7162 112,5	16380 133	2420 14	3081 14,5	3641 14	4121 14
54	2237 47,5	3366 63	6937 111	16114 132	2392 14	3052 14,5	3613 14	4093 13,5
56	2142 49,5	3492 61,5	6715 109,5	15850 131	2364 14	3023 14	3585 14,5	4066 14
58	2043 51,5	3615 59,5	6496 108	15588 130	2336 14	2995 14	3556 14	4038 14
5,60	1940 — 53	3734 — 58	6280 — 106,5	15328 — 128,5	2308 — 13,5	2967 — 14	3528 — 14	4010 — 13,5
62	1834 55	3850 55,5	6067 105	15071 127,5	2281 14	2939 14	3500 14	3983 14
64	1724 56,5	3961 54,5	5857 104	14816 126,5	2253 13,5	2911 14	3472 14	3955 13,5
66	1611 58,5	4070 52,5	5649 102	14563 125,5	2226 13,5	2883 14	3444 13,5	3928 13,5
68	1494 60	4175 50,5	5445 101	14312 124,5	2199 13,5	2855 14	3417 14	3901 14
5,70	1374 — 62	4276 — 49	5243 — 99,5	14063 — 123	2172 — 13,5	2827 — 13,5	3389 — 14	3873 — 13,5
72	1250 63,5	4374 47	5044 98	13817 122,5	2145 13,5	2800 14	3361 13,5	3846 13,5
74	1123 64,5	4468 45,5	4848 97	13572 121	2118 13	2772 13,5	3334 13,5	3819 13,5
76	0994 66,5	4559 44	4654 95	13330 120	2092 13	2745 13,5	3307 14	3792 13,5
78	0861 68	4647 42	4464 94	13090 118,5	2066 13	2718 13,5	3279 13,5	3765 13,5
5,80	0725 + 69,5	4731 — 40,5	4276 — 92,5	12853 — 118	2040 — 13	2691 — 13,5	3252 — 13,5	3738 — 13
82	0586 70,5	4812 39	4091 91	12617 116,5	2014 13	2664 13,5	3225 13,5	3712 13,5
84	0445 72	4890 37,5	3909 89,5	12384 115,5	1988 13	2637 13	3198 13,5	3685 13,5
86	0301 73,5	4965 35,5	3730 88,5	12153 114,5	1962 12,5	2611 13,5	3171 13	3658 13
88	0154 74,5	5036 34	3553 87	11924 113,5	1937 12,5	2584 13	3145 13,5	3632 13,5
5,90	0005 + 76	5104 — 32,5	3379 — 85,5	11697 — 112	1912 — 12,5	2558 — 13	3118 — 13,5	3605 — 13
92	*9853 77	5169 30,5	3208 84,5	11473 111,5	1887 12,5	2532 13,5	3091 13	3579 13
94	9699 78,5	5230 29,5	3039 82,5	11250 110	1862 12,5	2505 12,5	3065 13	3553 13,5
96	9542 79	5289 28	2874 81,5	11030 109	1837 12	2480 13	3039 13	3526 13
98	9384 80,5	5345 26	2711 80,5	10812 107,5	1813 12,5	2454 13	3013 13,5	3500 13
5,00	9223	5397	2550	10597	1788	2428	2986	3474
	0,0	- 0,0	- 0,0	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_2(x)$	$\Lambda_3(x)$	$\Lambda_4(x)$	$\Lambda_5(x)$	$\Lambda_6(x)$	$\Lambda_7(x)$	$\Lambda_8(x)$
	- 0,0	- 0,0	+ 0,0	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,	+ 0,	+ 0,
6,00	9223 + 81,5	5397 - 25	2550 - 78,5	0597 - 107	7881 - 121	2428 - 12,5	2986 - 13	3474 - 13
02	9060 82,5	5447 23	2393 77,5	0383 105,5	7639 120	2403 13	2960 12,5	3448 13
04	8895 83,5	5493 22	2238 76	0172 104,5	7399 119,5	2377 12,5	2935 13	3422 12,5
06	8728 84,5	5537 20	2086 75	*9963 103,5	7160 118	2352 12,5	2909 13	3397 13
08	8559 85	5577 19	1936 73,5	9756 102,5	6924 117,5	2327 12,5	2883 13	3371 13
6,10	8389 + 86	5615 - 17,5	1789 - 72	9551 - 101	6689 - 116,5	2302 - 12,5	2857 - 12,5	3345 - 12,5
12	8217 87	5650 16	1645 71	9349 100	6456 116	2277 12,5	2832 12,5	3320 13
14	8043 87,5	5682 15	1503 69,5	9149 99,5	6224 114,5	2252 12	2807 13	3294 12,5
16	7868 88,5	5712 13	1364 68,5	8950 98	5995 114	2228 12,5	2781 12,5	3269 12,5
18	7691 89	5738 12	1227 67	8754 96,5	5767 113	2203 12	2756 12,5	3244 13
6,20	7513 + 89,5	5762 - 11	1093 - 65,5	8561 - 96	5541 - 112	2179 - 12	2731 - 12,5	3218 - 12,5
22	7334 90	5784 9	0962 64,5	8369 94,5	5317 111,5	2155 12	2706 12	3193 12,5
24	7154 91	5802 8	0833 63	8180 94	5094 110,5	2131 12	2682 12,5	3168 12,5
26	6972 91	5818 7	0707 62	7992 92,5	4873 109,5	2107 12	2657 12	3143 12
28	6790 92	5832 5,5	0583 60,5	7807 91,5	4654 108,5	2083 11,5	2633 12,5	3119 12,5
6,30	6606 + 92,5	5843 - 4	0462 - 59,5	7624 - 90,5	4437 - 107,5	2060 - 11,5	2608 - 12	3094 - 12,5
32	6421 92,5	5851 3	0343 58,5	7443 89	4222 107	2037 12	2584 12	3069 12
34	6236 93	5857 2	0226 57	7265 88,5	4008 106	2013 11,5	2560 12	3045 12,5
36	6050 93,5	5861 - 0,5	0112 55,5	7088 87	3796 105	1990 11,5	2536 12	3020 12
38	5863 93,5	5862 + 0,5	0001 54,5	6914 86,5	3586 104	1967 11,5	2512 12	2996 12
6,40	5676 + 94	5861 + 2	*0108 - 53,5	6741 - 85	3378 - 103,5	1944 - 11	2488 - 12	2972 - 12
42	5488 94	5857 2,5	0215 52	6571 84	3171 102	1922 11,5	2464 12	2948 12,5
44	5300 94	5852 4	0319 51	6403 83	2967 101,5	1899 11	2440 11,5	2923 11,5
46	5112 94,5	5844 5,5	0421 50	6237 82	2764 100,5	1877 11	2417 11,5	2900 12
48	4923 94,5	5833 6	0521 48,5	6073 80,5	2563 100	1855 11,5	2394 12	2876 12
6,50	4734 + 95	5821 + 7	0618 - 47,5	5912 - 80	2363 - 98,5	1832 - 10,5	2370 - 11,5	2852 - 12
52	4544 94,5	5807 8,5	0713 46	5752 79	2166 98	1811 11	2347 11,5	2828 11,5
54	4355 94,5	5790 9	0805 45,5	5594 77,5	1970 97	1789 11	2324 11,5	2805 12
56	4166 95	5772 10,5	0896 44	5439 77	1776 96,5	1767 10,5	2301 11	2781 11,5
58	3976 94,5	5751 11,5	0984 43	5285 75,5	1583 95	1746 11	2279 11,5	2758 11,5
6,60	3787 + 94,5	5728 + 12	1070 - 41,5	5134 - 75	1393 - 94,5	17242 - 106	2256 - 11	2735 - 12
62	3598 94	5704 13	1153 41	4984 73,5	1204 93,5	17030 105	2234 11,5	2711 11,5
64	3410 94,5	5678 14,5	1235 39,5	4837 72,5	1017 92,5	16820 104,5	2211 11	2688 11,5
66	3221 94	5649 15	1314 38,5	4692 71,5	0832 92	16611 104	2189 11	2665 11
68	3033 93,5	5619 16	1391 37,5	4549 71	0648 91	16403 103	2167 11	2643 11,5
6,70	2846 + 93,5	5587 + 16,5	1466 - 36	4407 - 69,5	0466 - 90	16197 - 102	2145 - 11	2620 - 11,5
72	2659 93	5554 17,5	1538 35,5	4268 68,5	0286 89	15993 101,5	2123 11	2597 11
74	2473 93	5519 18,5	1609 34,5	4131 67,5	0108 88	15790 101	2101 10,5	2575 11,5
76	2287 92,5	5482 19,5	1678 33	3996 67	*9932 87,5	15588 100	2080 11	2552 11
78	2102 92	5443 20	1744 32,5	3862 65,5	9757 86,5	15388 99,5	2058 10,5	2530 11
6,80	1918 + 91,5	5403 + 21	1809 - 31	3731 - 64,5	9584 - 85,5	15189 - 98,5	2037 - 11	2508 - 11
82	1735 91	5361 21,5	1871 30	3602 64	9413 85	14992 97,5	2015 10,5	2486 11
84	1553 91	5318 22,5	1931 29,5	3474 62,5	9243 84	14797 97	1994 10,5	2464 11
86	1371 90	5273 23	1990 28	3349 62	9075 83	14603 96,5	1973 10,5	2442 11
88	1191 89,5	5227 24	2046 27,5	3225 60,5	8909 82	14410 95,5	1952 10	2420 11
6,90	1012 + 89	5179 + 24,5	2101 - 26	3104 - 60	8745 - 81,5	14219 - 95	1932 - 10,5	2398 - 10,5
92	0834 88,5	5130 25	2153 25,5	2984 59	8582 80,5	14029 94	1911 10	2377 11
94	0657 88	5080 26	2204 24,5	2866 58	8421 79,5	13841 93,5	1891 10,5	2355 10,5
96	041 87	5028 26,5	2253 23,5	2750 57	8262 79	13654 92,5	1870 10	2334 10,5
98	0307 86,5	4975 27	2300 22,5	2636 56	8104 77,5	13469 92	1850 10	2313 11
7,00	0134 - 8,8	4921 - 0,0	2345 - 0,0	2524 + 0,0	7949 + 0,0	13285 + 0,	1830 + 0,	2291 + 0,

Продолжение табл. 42

x	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	- 0,0	- 0,0	- 0,0	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,
7,00	0134 + 86	4921 + 27,5	2345 - 21,5	2524 - 55,5	7949 - 77,5	3285 - 91	830 - 10	2291 - 10,5
02	*0038 85	4866 28,5	2388 21	2413 54	7794 76	3103 90,5	810 10	2270 10,5
04	0208 84	4809 28,5	2430 19,5	2305 53,5	7642 75,5	2922 89,5	790 10	2249 10
06	0376 83,5	4752 29,5	2469 19	2198 52,5	7491 74,5	2743 89	770 9,5	2229 10,5
08	0543 83	4693 30	2507 18	2093 51,5	7342 73,5	2565 88	751 10	2208 10,5
7,10	0709 + 81,5	4633 + 30	2543 - 17,5	1990 - 50,5	7195 - 73	2389 - 87,5	7311 - 96,5	2187 - 10
12	0872 81	4573 31	2578 16,5	1889 50	7049 72	2214 86,5	7118 96	2167 10,5
14	1034 80	4511 31	2611 15,5	1789 48,5	6905 71,5	2041 86	6926 95,5	2146 10
16	1194 79,5	4449 32	2642 14,5	1692 48	6762 70	1869 85,5	6735 95	2126 10
18	1353 78	4385 32	2671 14	1596 47	6622 70	1698 84	6545 94	2106 10
7,20	1509 + 77,5	4321 + 33	2699 - 13	1502 - 46,5	6482 - 68,5	1530 - 84	6357 - 93,5	2086 - 10
22	1664 76	4255 32,5	2725 12,5	1409 45,5	6345 68	1362 83	6170 93	2066 10
24	1816 75,5	4190 33,5	2750 11,5	1318 44,5	6209 67	1196 82,5	5984 92,5	2046 10
26	1967 74,5	4123 34	2773 10,5	1229 43,5	6075 66,5	1031 81,5	5799 91,5	2026 9,5
28	2116 73	4055 34	2794 10,5	1142 43	5942 65,5	0868 80,5	5616 91	2007 10
7,30	2262 + 72,5	3987 + 34,5	2815 - 9	1056 - 42	5811 - 65	0707 - 80,5	5434 - 90,5	1987 - 9,5
32	2407 71	3918 34,5	2833 8,5	0972 41	5681 63,5	0546 79	5253 89,5	1968 9,5
34	2549 70	3849 35	2850 8	0890 40,5	5554 63,5	0388 79	5074 89	1949 10
36	2689 69	3779 35,5	2866 7	0809 39,5	5427 62	0230 78	4896 88,5	1929 9,5
38	2827 68	3708 35,5	2880 6,5	0730 38,5	5303 62	0074 77	4719 88	1910 9,5
7,40	2963 + 66,5	3637 + 35,5	2893 - 5,5	0653 - 38	5179 - 60,5	*9920 - 76,5	4543 - 87	1891 - 9,5
42	3096 65,5	3566 36	2904 5	0577 37	5058 60	9767 76	4369 86,5	1872 9
44	3227 64,5	3494 36,5	2914 4,5	0503 36,5	4938 59,5	9615 75	4196 86	1854 9,5
46	3356 63,5	3421 36,5	2923 3,5	0430 35,5	4819 58,5	9465 74,5	4024 85	1835 9
48	3483 62	3348 36,5	2930 3	0359 35	4702 57,5	9316 73,5	3854 84,5	1817 9,5
7,50	3607 + 60,5	3275 + 37	2936 - 2,5	0289 - 34	4587 - 57	9169 - 73	3685 - 84	17982 - 91,5
52	3728 59,5	3201 36,5	2941 1,5	0221 33	4473 56	9023 72	3517 83,5	17799 91
54	3847 58,5	3128 37,5	2944 1,5	0155 32,5	4361 55,5	8879 72	3350 83	17617 90
56	3964 57	3053 37	2947 - 0,5	0090 32	4250 54,5	8735 70,5	3184 82	17437 90
58	4078 56	2979 37,5	2948 0	0026 31	4141 54	8594 70,5	3020 81,5	17257 89
7,60	4190 + 54,5	2904 + 37	2948 + 0,5	*0036 - 30,5	4033 - 53	8453 - 69	2857 - 80,5	17079 - 88,5
62	4299 53	2830 37,5	2947 1,5	0097 29,5	3927 52,5	8315 69	2696 80,5	16902 88
64	4405 52	2755 37,5	2944 1,5	0156 28,5	3822 52	8177 68	2535 79,5	16726 87,5
66	4509 51	2680 37,5	2941 2,5	0213 28,5	3718 51	8041 67,5	2376 78,5	16551 87
68	4611 49	2605 38	2936 3	0270 27	3616 50	7906 66,5	2219 78,5	16377 86,5
7,70	4709 + 48	2529 + 37,5	2930 + 3,5	0324 - 27	3516 - 49,5	7773 - 66	2062 - 77,5	16204 - 85,5
72	4805 47	2454 37,5	2923 3,5	0378 26	3417 49	7641 65,5	1907 77,5	16033 85,5
74	4899 45,5	2379 37,5	2916 4,5	0430 25,5	3319 48	7510 64,5	1752 76	15862 84,5
76	4990 44	2304 37,5	2907 5	0481 24,5	3223 47,5	7381 64	1600 76	15693 84
78	5078 42,5	2229 37,5	2897 5,5	0530 24	3128 46,5	7253 63,5	1448 75	15525 83,5
7,80	5163 + 41,5	2154 + 37,5	2886 + 6	0578 - 23,5	3035 - 46	7126 - 62	1298 - 74,5	15358 - 83
82	5246 40	2079 37,5	2874 6	0625 22,5	2943 45	7002 62,5	1149 74	15192 82,5
84	5326 38,5	2004 37,5	2862 7	0670 22	2853 45	6877 61	1001 73,5	15027 82
86	5403 37	1929 37,5	2848 7	0714 21,5	2763 43,5	6755 60,5	0854 72,5	14863 81,5
88	5477 36	1854 37	2834 8	0757 21	2676 43,5	6634 60	0709 72,5	14700 80,5
7,90	5549 + 34,5	1780 + 37	2818 + 8	0799 - 20	2589 - 42,5	6514 - 59,5	0564 - 71,5	14539 - 80,5
92	5618 33	1706 37	2802 8,5	0839 19,5	2504 42	6395 58,5	0421 70,5	14378 79,5
94	5684 31,5	1632 36,5	2785 9	0878 19	2420 41	6278 58	0280 70,5	14219 79
96	5747 30,5	1559 37	2767 9	0916 18	2338 40,5	6162 57,5	0139 69,5	14061 78,5
98	5808 29	1485 36,5	2749 10	0952 18	2257 40	6047 56,5	0000 69	13904 78
8,00	5866 + 0,0	1412 - 0,0	2729 - 0,0	0988 - 0,0	2177 + 0,0	5934 + 0,0	*9862 + 0,0	13748 + 0,

Продолжение табл. 42

x	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	+ 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,1
8,00	5866 + 27,5	1412 + 36	2729 + 10	0988 - 17	2177 - 39	5934 - 56	9862 - 68,5	3748 - 77,5
02	5921 26	1340 36	2709 10,5	1022 16,5	2099 39	5822 55,5	9725 68	3593 77
04	5973 25	1268 36	2688 10,5	1055 16	2021 37,5	5711 54,5	9589 67	3439 76,5
06	6023 23,5	1196 36	2667 11	1087 15,5	1946 37,5	5602 54,5	9455 66,5	3286 75,5
08	6070 22	1124 35,5	2645 11,5	1118 14,5	1871 36,5	5493 53,5	9322 66	3135 75,5
8,10	6114 + 20,5	1053 + 35	2622 + 12	1147 - 14,5	1798 - 36,5	5386 - 52,5	9190 - 65,5	2984 - 74,5
12	6155 19,5	0983 35	2598 12	1176 14	1725 35	5281 52,5	9059 65	2835 74
14	6194 17,5	0913 35	2574 12,5	1204 13	1655 35	5176 51,5	8929 64	2687 73,5
16	6229 16,5	0843 34,5	2549 12,5	1230 12,5	1585 34	5073 51	8801 64	2540 73,5
18	6262 15,5	0774 34,5	2524 13	1255 12,5	1517 34	4971 50,5	8673 63	2393 72,5
8,20	6293 + 13,5	0705 + 34	2498 + 13,5	1280 - 11,5	1449 - 32,5	4870 - 49,5	8547 - 62,5	2248 - 71,5
22	6320 12,5	0637 33,5	2471 13,5	1303 11	1384 32,5	4771 49	8422 62	2105 71,5
24	6345 11	0570 33,5	2444 13,5	1325 10,5	1319 32	4673 49	8298 61	1962 71
26	6367 10	0503 33	2417 14	1346 10,5	1255 31	4575 47,5	8176 61	1820 70,5
28	6387 8	0437 33	2389 14,5	1367 9,5	1193 30,5	4480 47,5	8054 60	1679 69,5
8,30	6403 + 7	0371 + 32,5	2360 + 14,5	1386 - 9	1132 - 30,5	4385 - 47	7934 - 59,5	1540 - 69,5
32	6417 6	0306 32	2331 14,5	1404 8,5	1071 29	4291 46	7815 59	1401 68,5
34	6429 4,5	0242 32	2302 15	1421 8,5	1013 29	4199 45,5	7697 58,5	1264 68
36	6438 3	0178 31,5	2272 15	1438 7,5	0955 28,5	4108 45	7580 58	1128 68
38	6444 1,5	0115 31	2242 15,5	1453 7,5	0898 28	4018 44,5	7464 57	0992 67
8,40	6447 + 0,5	0053 + 30,5	2211 + 15,5	1468 - 7	0842 - 27	3929 - 43,5	7350 - 57	0858 - 66,5
42	6448 - 0,5	*0008 30,5	2180 15,5	1482 6,5	0788 26,5	3842 43,5	7236 56	0725 66
44	6447 2,5	0069 30	2149 16	1495 5,5	0735 26,5	3755 42,5	7124 55,5	0593 65,5
46	6442 3	0129 30	2117 16	1506 6	0682 25,5	3670 42	7013 55	0462 65
48	6436 5	0189 29	2085 16	1518 5	0631 25	3586 41,5	6903 54,5	0332 64,5
8,50	6426 - 5,5	0247 + 29	2053 + 16,5	1528 - 4,5	0581 - 24,5	3503 - 41	6794 - 54	0203 - 64
52	6415 7,5	0305 28,5	2020 16,5	1537 4,5	0532 24	3421 40,5	6686 53,5	0075 63
54	6400 8	0362 28	1987 16,5	1546 4	0484 23,5	3340 40	6579 53	*9949 63
56	6384 9,5	0418 27,5	1954 16,5	1554 3,5	0437 23	3260 39	6473 52	9823 62,5
58	6365 11	0473 27,5	1921 17	1561 3	0391 22,5	3182 39	6369 52	9698 62
8,60	6343 - 12	0528 + 27	1887 + 17	1567 - 3	0346 - 22	3104 - 38	6265 - 51	9574 - 61
62	6319 13	0582 26	1853 17	1573 2,5	0302 21,5	3028 38	6163 50,5	9452 61
64	6293 14,5	0634 26	1819 17	1578 2	0259 21	2952 37	6062 50,5	9330 60
66	6264 15	0686 25,5	1785 17	1582 1,5	0217 20,5	2878 36,5	5961 49,5	9210 60
68	6234 17	0737 25,5	1751 17,5	1585 1,5	0176 20	2805 36	5862 49	9090 59
8,70	6200 - 17,5	0788 + 24,5	1716 + 17	1588 - 1	0136 - 20	2733 - 36	5764 - 48,5	8972 - 59
72	6165 19	0837 24	1682 17,5	1590 0,5	0096 19	2661 35	5667 48	8854 58
74	6127 19,5	0885 24	1647 17,5	1591 - 0,5	0058 18,5	2591 34,5	5571 47,5	8738 58
76	6088 21	0933 23,5	1612 17,5	1592 0	0021 18	2522 34	5476 47	8622 57
78	6046 22	0980 22,5	1577 17,5	1592 + 0,5	*0015 18	2454 33,5	5382 46,5	8508 57
8,80	6002 - 23	1025 + 22,5	1542 + 17,5	1591 + 0,5	0051 - 17	2387 - 33	5289 - 45,5	8394 - 56
82	5956 24,5	1070 22	1507 17,5	1590 1	0085 17	2321 32,5	5198 45,5	8282 55,5
84	5907 25	1114 21,5	1472 17,5	1588 1	0119 16,5	2256 32	5107 45	8171 55,5
86	5857 26	1157 21	1437 17,5	1586 1,5	0152 16	2192 31,5	5017 44,5	8060 54,5
88	5805 27	1199 20,5	1402 17,5	1583 1,5	0184 15,5	2129 31	4928 43,5	7951 54,5
8,90	5751 - 28,5	1240 + 20	1367 + 17,5	1580 + 2,5	0215 - 15	2067 - 30,5	4841 - 43,5	7842 - 53,5
92	5694 29	1280 19,5	1332 18	1575 2	0245 15	2006 30	4754 43	7735 53
94	5636 29,5	1319 19	1296 17,5	1571 2,5	0275 14	1946 29,5	4668 42,5	7629 53
96	5577 31	1357 18,5	1261 17,5	1566 3	0303 14	1887 29	4583 41,5	7523 52
98	5515 32	1394 18,5	1226 17,5	1560 3	0331 13,5	1829 28,5	4500 41,5	7419 52
9,00	5451 + 0,0	1431 + 0,0	1191 - 0,0	1554 - 0,0	0358 - 0,0	1772 + 0,0	4417 + 0,0	7315 + 0,0

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_2(x)$	$\Lambda_3(x)$	$\Lambda_4(x)$	$\Lambda_5(x)$	$\Lambda_6(x)$	$\Lambda_7(x)$	$\Lambda_8(x)$
	+ 0,0	+ 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,0
9,00	5451 - 32,5	1431 + 17,5	1191 + 17,5	1554 + 3,5	0358 - 13	1772 - 28,5	4417 - 41	7315 - 51,5
02	5386 33,5	1466 17	1156 17	1547 3,5	0384 12,5	1715 27,5	4335 40,5	7212 50,5
04	5319 34	1500 16,5	1122 17,5	1540 4	0409 12,5	1660 27,5	4254 40	7111 50,5
06	5251 33,5	1533 16,5	1087 17,5	1532 4	0434 12	1605 26,5	4174 39,5	7010 49,5
08	5180 36	1566 15,5	1052 17	1524 4	0458 11,5	1552 26,5	4095 39	6911 49,5
9,10	5108 - 36,5	1597 + 15,5	1018 + 17,5	1516 + 4,5	0481 - 11	1499 - 26	4017 - 38,5	6812 - 49
12	5035 37,5	1628 14,5	0983 17	1507 5	0503 11	1447 25,5	3940 38	6714 48,5
14	4960 38,5	1657 14	0949 17	1497 5	0525 10,5	1396 25	3864 37,5	6617 48
16	4883 38,5	1685 14	0915 17	1487 5	0546 10	1346 24,5	3789 37	6521 47,5
18	4806 40	1713 13	0881 17	1477 5	0566 10	1297 24	3715 36,5	6426 47
9,20	4726 - 40	1739 + 13	0847 + 17	1467 + 5,5	0586 - 9,5	1249 - 23,5	3642 - 36,5	6332 - 46,5
22	4646 41	1765 12	0813 16,5	1456 6	0605 9	1202 23,5	3569 35,5	6239 46
24	4564 42	1789 12	0780 16,5	1444 5,5	0623 8,5	1155 23	3498 35,5	6147 45,5
26	4480 42	1813 11	0747 16,5	1433 6	0640 8,5	1109 22,5	3427 34,5	6056 45,5
28	4396 43	1835 11	0714 16,5	1421 6,5	0657 8	1064 22	3358 34,5	5965 44,5
9,30	4310 - 43,5	1857 + 10,5	0681 + 16,5	1408 + 6	0673 - 8	1020 - 21,5	3289 - 34	5876 - 44,5
32	4223 44	1878 9,5	0648 16	1396 6,5	0689 7	0977 21,5	3221 33,5	5787 43,5
34	4135 44,5	1897 9,5	0616 16	1383 7	0703 7,5	0934 20,5	3154 33	5700 43,5
36	4046 45	1916 9	0584 16	1369 6,5	0718 6,5	0893 20,5	3088 32,5	5613 43
38	3956 45,5	1934 8	0552 16	1356 7	0731 6,5	0852 20	3023 32,5	5527 42,5
9,40	3865 - 46,5	1950 + 8	0520 + 15,5	1342 + 7	0744 - 6,5	0812 - 20	2958 - 31,5	5442 - 42
42	3772 46,5	1966 7,5	0489 16	1328 7,5	0757 5,5	0772 19	2895 31,5	5358 41,5
44	3679 47	1981 7	0457 15	1313 7	0768 6	0734 19	2832 31	5275 41,5
46	3585 47	1995 6,5	0427 15,5	1299 7,5	0780 5	0696 18,5	2770 30,5	5192 40,5
48	3491 48	2008 6	0396 15	1284 7,5	0790 5,5	0659 18	2709 30	5111 40,5
9,50	3395 - 48	2020 + 5,5	0366 + 15	1269 + 7,5	0801 - 4,5	0623 - 18	2649 - 29,5	5030 - 40
52	3299 48,5	2031 5	0336 15	1254 8	0810 4,5	0587 17,5	2590 29,5	4950 39,5
54	3202 49	2041 5	0306 14,5	1238 8	0819 4	0552 17	2531 28,5	4871 39
56	3104 49	2051 4	0277 14,5	1222 8	0827 4,5	0518 16,5	2474 28,5	4793 38,5
58	3006 49,5	2059 3,5	0248 14,5	1206 8	0836 3,5	0485 16,5	2417 28	4716 38
9,60	2907 - 50	2066 + 3,5	0219 + 14,5	1190 + 8	0843 - 3,5	0452 - 16	2361 - 28	4640 - 38
62	2807 50	2073 3	0190 14	1174 8	0850 3,5	0420 16	2305 27	4564 37,5
64	2707 50	2079 2	0162 13,5	1158 8,5	0857 3	0388 15	2251 27	4489 36,5
66	2607 50,5	2083 2	0135 14	1141 8,5	0863 2,5	0358 15	2197 26,5	4416 36,5
68	2506 50,5	2087 1,5	0107 13,5	1124 8,5	0868 2,5	0328 14,5	2144 26	4343 36,5
9,70	2405 - 51	2090 + 1	0080 + 13	1107 + 8,5	0873 - 2,5	0299 - 14,5	2092 - 25,5	4270 - 35,5
72	2303 50,5	2092 + 1	0054 13,5	1090 8,5	0878 2	0270 14	2041 25,5	4199 35,5
74	2202 51,5	2094 0	0027 13	1073 8,5	0882 2	0242 14	1990 25	4128 35
76	2099 51	2094 0	0001 12,5	1056 8,5	0886 1,5	0214 13	1940 24,5	4058 34,5
78	1997 51	2094 - 0,5	*0024 12,5	1039 9	0889 1,5	0188 13	1891 24	3989 34
9,80	1895 - 51,5	2093 - 1	0049 + 12,5	1021 + 8,5	0892 - 1	0162 - 13	1843 - 24	3921 - 33,5
82	1792 51,5	2091 1,5	0074 12,5	1004 9	0894 1	0136 12,5	1795 23,5	3854 33,5
84	1689 51	2088 2	0099 12	0986 9	0896 1	0111 12	1748 23	3787 33
86	1587 51,5	2084 2	0123 11,5	0968 8,5	0898 0,5	0087 12	1702 23	3721 32,5
88	1484 51,5	2080 2,5	0146 12	0951 9	0899 0,5	0063 11,5	1656 22	3656 32,5
9,90	1381 - 51	2075 - 3	0170 + 11,5	0933 + 9	0900 0	0040 - 11	1612 - 22	3591 - 31,5
92	1279 51,5	2069 3,5	0193 11	0915 9	0900 - 0,5	0018 11	1568 22	3528 31,5
94	1176 51	2062 4	0215 11	0897 9	0901 + 0,5	*0004 11	1524 21,5	3465 31
96	1074 51,5	2054 4	0237 11	0879 9	0900 0	0026 10	1481 21	3403 31
98	0971 51	2046 4,5	0259 10,5	0861 9	0900 0,5	0046 10,5	1439 20,5	3341 30
10,00	0869 + 0,0	2037 + 0,0	0280 + 0,0	0843 - 0,0	0899 - 0,0	0067 - 0,0	1398 + 0,0	3281 + 0,0

Т а б л и ц а 43. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,00	+ 1, 0000 — 0,5	+ 0, 0000 + 50	1,00	+ 0, 7652 — 44,5	+ 0, 4401 + 32	2,00	+ 0, 2239 — 57,5	+ 0, 5767 — 6,5
02	*9999 1,5	0100 50	02	7563 45	4465 31,5	02	2124 57,5	5754 8
04	9996 2,5	0200 50	04	7473 45,5	4528 31	04	2009 57,5	5738 8,5
06	9991 3,5	0300 50	06	7382 46	4590 30	06	1894 57	5721 9
08	9984 4,5	0400 49,5	08	7290 47	4650 29,5	08	1780 57	5703 10
0,10	9975 — 5,5	0499 + 50	1,10	7196 — 47,5	4709 + 29	2,10	1666 — 56,5	5683 — 11
12	9964 6,5	0599 49,5	12	7101 47,5	4767 28	12	1553 56,5	5661 11,5
14	9951 7,5	0698 49,5	14	7006 48,5	4823 27,5	14	1440 56,5	5638 12
16	9936 8,5	0797 49,5	16	6909 49,5	4878 26,5	16	1327 56	5614 13,5
18	9919 9,5	0896 49,5	18	6810 49,5	4931 26	18	1215 55,5	5587 13,5
0,20	9900 — 10,5	0995 + 49	1,20	6711 — 50	4983 + 25	2,20	1104 — 55,5	5560 — 15
22	9879 11	1093 49	22	6611 50,5	5033 24,5	22	0993 55,5	5530 15
24	9857 12,5	1191 49	24	6510 51	5082 24	24	0882 54,5	5500 16
26	9832 13,5	1289 48,5	26	6408 51,5	5130 23	26	0773 54,5	5468 17
28	9805 14,5	1386 48,5	28	6305 52	5176 22	28	0664 54,5	5434 17,5
0,30	9776 — 15	1483 + 48,5	1,30	6201 — 52,5	5220 + 21,5	2,30	0555 — 53,5	5399 — 18,5
32	9746 16,5	1580 48	32	6096 53	5263 21	32	0448 53,5	5362 19
34	9713 17	1676 47,5	34	5990 53	5305 19,5	34	0341 53	5324 19,5
36	9679 18,5	1771 47,5	36	5884 53,5	5344 19,5	36	0235 52,5	5285 20,5
38	9642 19	1866 47	38	5777 54	5383 18,5	38	0130 52,5	5244 21
0,40	9604 — 20	1960 + 47	1,40	5669 — 54,5	5419 + 18	2,40	0025 — 52	5202 — 22
42	9564 21	2054 46,5	42	5560 55	5455 16,5	42	*0079 51	5158 22,5
44	9522 22	2147 46,5	44	5450 55	5488 16	44	0181 51	5113 23
46	9478 23	2240 46	46	5340 55	5520 15,5	46	0283 50,5	5067 23,5
48	9432 23,5	2332 45,5	48	5230 56	5551 14	48	0384 50	5020 24,5
0,50	9385 — 25	2423 + 45	1,50	5118 — 56	5579 + 14	2,50	0484 — 49,5	4971 — 25
52	9335 25,5	2513 45	52	5006 56	5607 12,5	52	0583 49	4921 25,5
54	9284 26,5	2603 44,5	54	4894 56,5	5632 12	54	0681 48,5	4870 26,5
56	9231 27	2692 44	56	4781 56,5	5656 11	56	0778 47,5	4817 27
58	9177 28,5	2780 43,5	58	4668 57	5678 10,5	58	0873 47,5	4763 27,5
0,60	9120 — 29	2867 + 43	1,60	4554 — 57	5699 + 9,5	2,60	0968 — 47	4708 — 28
62	9062 30	2953 43	62	4440 57,5	5718 8,5	62	1062 46	4652 28,5
64	9002 31	3039 42,5	64	4325 57,5	5735 8	64	1154 45,5	4595 29,5
66	8940 31,5	3124 41,5	66	4210 57,5	5751 7	66	1245 45,5	4536 29,5
68	8877 32,5	3207 41,5	68	4095 57,5	5765 6,5	68	1336 44	4477 30,5
0,70	8812 — 33,5	3290 + 41	1,70	3980 — 58	5778 + 5	2,70	1424 — 44	4416 — 31
72	8745 34	3372 40	72	3864 58	5788 5	72	1512 43,5	4354 31,5
74	8677 35	3452 40	74	3748 58	5798 3,5	74	1599 42,5	4291 31,5
76	8607 35,5	3532 39,5	76	3632 58	5805 3	76	1684 42	4228 32,5
78	8536 36,5	3611 38,5	78	3516 58	5811 2	78	1768 41	4163 33
0,80	8463 — 37,5	3688 + 38,5	1,80	3400 — 58	5815 + 1,5	2,80	1850 — 41	4097 — 33,5
82	8388 38	3765 37,5	82	3284 58,5	5818 + 0,5	82	1932 40	4030 33,5
84	8312 38,5	3840 37,5	84	3167 58	5819 — 0,5	84	2012 39	3963 34,5
86	8235 39,5	3915 36,5	86	3051 58,5	5818 1	86	2090 38,5	3894 34,5
88	8156 40,5	3988 35,5	88	2934 58	5816 2	88	2167 38	3825 35,5
0,90	8075 — 41	4059 + 35,5	1,90	2818 — 58	5812 — 3	2,90	2243 — 37	3754 — 35,5
92	7993 41,5	4130 35	92	2702 58	5806 3,5	92	2317 36,5	3683 36
94	7910 42,5	4200 34	94	2586 58	5799 4,5	94	2390 36	3611 36,5
96	7825 43	4268 33,5	96	2470 58	5790 5,5	96	2462 35	3538 36,5
98	7739 43,5	4335 33	98	2354 57,5	5779 6	98	2532 34,5	3465 37
1,00	7652 + 0,	4401 + 0,	2,00	2239 + 0,	5767 + 0,	3,00	2601 — 0,	3391 + 0,

Продолжение табл. 43

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
3,00	— 0,	+ 0,	4,00	— 0,	— 0,	5,00	— 0,	— 0,
02	2601 — 33,5	3391 — 37,5	02	3971 + 6,5	0660 — 38	02	1776 + 33	3276 — 11
04	2668 32,5	3316 38	04	3958 8	0736 37,5	04	1710 33	3298 10
06	2733 32	3240 38	06	3942 8,5	0811 37,5	06	1644 33	3318 9,5
08	2797 31,5	3164 38,5	08	3925 9	0886 37	08	1578 33,5	3337 9
	2860 30,5	3087 39		3907 10	0960 36,5		1511 34	3355 8
3,10	2921 — 29,5	3009 — 39	4,10	3887 + 11	1033 — 36	5,10	1443 + 33,5	3371 — 7,5
12	2980 29	2931 39,5	12	3865 11,5	1105 36	12	1376 34	3386 7
14	3038 28	2852 39,5	14	3842 12	1177 35	14	1308 34	3400 6
16	3094 27,5	2773 39,5	16	3818 12,5	1247 35	16	1240 34,5	3412 5,5
18	3149 26,5	2694 40,5	18	3793 13,5	1317 34,5	18	1171 34	3423 4,5
3,20	3202 — 25,5	2613 — 40	4,20	3766 + 14,5	1386 — 34,5	5,20	1103 + 34,5	3432 — 4
22	3253 25	2533 40,5	22	3737 15	1455 33,5	22	1034 34,5	3440 3,5
24	3303 24	2452 41	24	3707 15,5	1522 33,5	24	0965 34,5	3447 3
26	3351 23,5	2370 40,5	26	3676 16	1589 32,5	26	0896 34,5	3453 2
28	3398 22,5	2289 41	28	3644 17	1654 32,5	28	0827 34,5	3457 1,5
3,30	3443 — 21,5	2207 — 41,5	4,30	3610 + 17,5	1719 — 32	5,30	0758 + 34,5	3460 — 0,5
32	3486 21	2124 41	32	3575 18	1783 31	32	0689 34,5	3461 0
34	3528 20	2042 41,5	34	3539 19	1845 31	34	0620 35	3461 + 0,5
36	3568 19	1959 41,5	36	3501 19	1907 30,5	36	0550 34,5	3460 1,5
38	3606 18,5	1876 42	38	3463 20	1968 30	38	0481 34,5	3457 2
3,40	3643 — 17,5	1792 — 41,5	4,40	3423 + 21	2028 — 29	5,40	0412 + 34,5	3453 + 2,5
42	3678 16,5	1709 42	42	3381 21	2086 29	42	0343 34,5	3448 3
44	3711 16	1625 42	44	3339 21,5	2144 28,5	44	0274 34,5	3442 4
46	3743 15	1541 41,5	46	3296 22,5	2201 27,5	46	0205 34	3434 4,5
48	3773 14	1458 42	48	3251 23	2256 27,5	48	0137 34,5	3425 5,5
3,50	3801 — 13,5	1374 — 42	4,50	3205 + 23	2311 — 26,5	5,50	0068 + 34	3414 + 5,5
52	3828 12,5	1290 42	52	3159 24	2364 26	52	0000 34	3403 6,5
54	3853 11,5	1206 42	54	3111 24,5	2416 25,5	54	*0068 33,5	3390 7
56	3876 11	1122 42	56	3062 25	2467 25	56	0135 34	3376 8
58	3898 10	1038 41,5	58	3012 25,5	2517 24,5	58	0203 33,5	3360 8,5
3,60	3918 — 9	0955 — 42	4,60	2961 + 25,5	2566 — 23,5	5,60	0270 + 33	3343 + 9
62	3936 8,5	0871 41,5	62	2910 26,5	2613 23	62	0336 33,5	3325 9,5
64	3953 7	0788 42	64	2857 27	2659 22,5	64	0403 33	3306 10
66	3967 7	0704 41,5	66	2803 27	2704 22	66	0469 32,5	3286 11
68	3981 5,5	0621 41,5	68	2749 28	2748 21,5	68	0534 32,5	3264 11,5
3,70	3992 — 5	0538 — 41	4,70	2693 + 28	2791 — 20,5	5,70	0599 + 32,5	3241 + 11,5
72	4002 4,5	0456 41,5	72	2637 28,5	2832 20	72	0664 32	3218 13
74	4011 3	0373 41	74	2580 29	2872 19,5	74	0728 31,5	3192 13
76	4017 2,5	0291 40,5	76	2522 29	2911 19	76	0791 32	3166 13,5
78	4022 2	0210 41	78	2464 30	2949 18	78	0855 31	3139 14,5
3,80	4026 — 0,5	0128 — 40,5	4,80	2404 + 30	2985 — 17,5	5,80	0917 + 31	3110 + 14,5
82	4027 0	0047 40	82	2344 30,5	3020 17	82	0979 30,5	3081 15,5
84	4027 + 0,5	*0033 40,5	84	2283 30,5	3054 16	84	1040 30,5	3050 16
86	4026 1,5	0114 39,5	86	2222 31	3086 15,5	86	1101 30	3018 16,5
88	4023 2,5	0193 39,5	88	2160 31,5	3117 15	88	1161 29,5	2985 17
3,90	4018 + 3	0272 — 39,5	4,90	2097 + 31,5	3147 — 14	5,90	1220 + 29,5	2951 + 17
92	4012 4	0351 39	92	2034 32	3175 13,5	92	1279 29	2917 18
94	4004 4,5	0429 39	94	1970 32	3202 13	94	1337 28,5	2881 18,5
96	3995 5,5	0507 38,5	96	1906 32,5	3228 12,5	96	1394 28,5	2844 19
98	3984 6,5	0584 38	98	1841 32,5	3253 11,5	98	1451 27,5	2806 19,5
4,00	3971 — 0,	0660 — 0,	5,00	1776 — 0,	3276 — 0,	5,00	1506 + 0,	2767 — 0,

Продолжение табл. 43

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
6,00	+ 0, 1506 + 27,5	- 0, 2767 + 20	7,00	+ 0, 3001 0	- 0, 0047 + 30	8,00	+ 0, 1717 - 24	+ 0, 2346 + 14
02	1561 27,5	2727 20,5	02	3001 - 0,5	*0013 30	02	1669 23,5	2374 13,5
04	1616 26,5	2686 20,5	04	3000 1	0073 30	04	1622 24,5	2401 13
06	1669 26	2645 21,5	06	2998 1,5	0133 29,5	06	1573 24,5	2427 12,5
08	1721 26	2602 21,5	08	2995 2	0192 30	08	1524 24,5	2452 12
6,10	1773 + 25,5	2559 + 22,5	7,10	2991 - 3	0252 + 29	8,10	1475 - 25	2476 + 11,5
12	1824 24,5	2514 22,5	12	2985 3,5	0310 29,5	12	1425 25	2499 11
14	1873 24,5	2469 23	14	2978 4	0369 29,5	14	1375 25	2521 10,5
16	1922 24	2423 23	16	2970 4,5	0428 29	16	1325 25,5	2542 9,5
18	1970 23,5	2377 24	18	2961 5	0486 28,5	18	1274 26	2561 9,5
6,20	2017 + 23,5	2329 + 24	7,20	2951 - 6	0543 + 29	8,20	1222 - 26	2580 + 9
22	2064 22,5	2281 24,5	22	2939 6	0601 28,5	22	1170 26	2598 8
24	2109 22	2232 25	24	2927 7	0658 28	24	1118 26	2614 8
26	2153 21,5	2182 25	26	2913 7,5	0714 28	26	1066 26,5	2630 7
28	2196 21	2132 25,5	28	2898 8	0770 28	28	1013 26,5	2644 6,5
6,30	2238 + 20,5	2081 + 26	7,30	2882 - 8,5	0826 + 27,5	8,30	0960 - 26,5	2657 + 6,5
32	2279 20	2029 26	32	2865 9	0881 27	32	0907 27	2670 5,5
34	2319 19,5	1977 26,5	34	2847 9,5	0935 27,5	34	0853 26,5	2681 5
36	2358 19	1924 27	36	2828 10,5	0990 26,5	36	0800 27	2691 4,5
38	2396 18,5	1870 27	38	2807 10,5	1043 26,5	38	0746 27	2700 4
6,40	2433 + 18	1816 + 27	7,40	2786 - 11	1096 + 26,5	8,40	0692 - 27,5	2708 + 3,5
42	2469 17,5	1762 27,5	42	2764 12	1149 26	42	0637 27	2715 2,5
44	2504 16,5	1707 28	44	2740 12,5	1201 25,5	44	0583 27	2720 2,5
46	2537 16,5	1651 28	46	2715 12,5	1252 25	46	0529 27,5	2725 2
48	2570 15,5	1595 28,5	48	2690 13,5	1302 25	48	0474 27,5	2729 1
6,50	2601 + 15	1538 + 28,5	7,50	2663 - 13,5	1352 + 25	8,50	0419 - 27	2731 + 1
52	2631 14,5	1481 28,5	52	2636 14,5	1402 24	52	0365 27,5	2733 0
54	2660 14	1424 29	54	2607 14,5	1450 24	54	0310 27,5	2733 - 0,5
56	2688 13,5	1366 29	56	2578 15,5	1498 24	56	0255 27	2732 1
58	2715 12,5	1308 29	58	2547 15,5	1546 23	58	0201 27,5	2730 1
6,60	2740 + 12,5	1250 + 29,5	7,60	2516 - 16	1592 + 23	8,60	0146 - 27	2728 - 2
62	2765 11,5	1191 29,5	62	2484 16,5	1638 22,5	62	0092 27,5	2724 2,5
64	2788 11	1132 29,5	64	2451 17,5	1683 22	64	0037 27	2719 3
66	2810 10,5	1073 30	66	2416 17,5	1727 22	66	*0017 27	2713 4
68	2831 10	1013 30	68	2381 17,5	1771 21	68	0071 27	2705 4
6,70	2851 + 9	0953 + 30	7,70	2346 - 18,5	1813 + 21	8,70	0125 - 27	2697 - 4,5
72	2869 8,5	0893 30	72	2309 19	1855 20,5	72	0179 27	2688 5
74	2886 8	0833 30	74	2271 19	1896 20	74	0233 26,5	2678 6
76	2902 7,5	0773 30	76	2233 19,5	1936 19,5	76	0286 26,5	2666 6
78	2917 7	0713 30,5	78	2194 20	1975 19,5	78	0339 26,5	2654 6,5
6,80	2931 + 6	0652 + 30	7,80	2154 - 20,5	2014 + 18,5	8,80	0392 - 26,5	2641 - 7,5
82	2943 6	0592 30,5	82	2113 20,5	2051 18,5	82	0445 26	2626 7,5
84	2955 5	0531 30,5	84	2072 21	2088 17,5	84	0497 26	2611 8
86	2965 4	0470 30	86	2030 21,5	2123 17,5	86	0549 26	2595 9
88	2973 4	0410 30,5	88	1987 21,5	2158 17	88	0601 26	2577 9
6,90	2981 + 3	0349 + 30,5	7,90	1944 - 22,5	2192 + 16,5	8,90	0653 - 25,5	2559 - 9,5
92	2987 3	0288 30	92	1899 22	2225 16	92	0704 25	2540 10,5
94	2993 2	0228 30,5	94	1855 23	2257 15	94	0754 25	2519 10,5
96	2997 1	0167 30	96	1809 23	2287 15	96	0804 25	2498 11
98	2999 1	0107 30	98	1763 23	2317 14,5	98	0854 24,5	2476 11,5
7,00	3001 + 0,	0047 - 0,	8,00	1717 + 0,	2346 + 0,	9,00	0903 - 0,	2453 + 0,

Продолжение табл. 43

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
	— 0,	+ 0,		— 0,	+ 0,		— 0,	— 0,
9 00	0903 — 24 5	2453 — 12	10 00	2459 — 4 5	0435 — 25	11 00	1712 + 18	1768 — 15
02	0952 24	2429 12,5	02	2468 3 5	0385 25 5	02	1676 18	1798 15
04	1000 24	2404 13	04	2475 3	0334 25	04	1640 18 5	1828 14 5
06	1048 24	2378 13	06	2481 2 5	0284 25	06	1603 18,5	1857 14 5
08	1096 23	2352 14	08	2486 2	0234 25	08	1566 19	1886 13 5
9 10	1142 — 23 5	2324 — 14	10,10	2490 — 1 5	0184 — 25	11 10	1528 + 19 5	1913 — 13 5
12	1189 22 5	2296 14 5	12	2493 1 5	0134 25	12	1489 19 5	1940 13
14	1234 22 5	2267 15	14	2496 — 0 5	0084 25	14	1450 19 5	1966 12 5
16	1279 22 5	2237 15 5	16	2497 0	0034 25	16	1411 20 5	1991 12
18	1324 21 5	2206 16	18	2497 + 0 5	*0016 25	18	1370 20	2015 12
9 20	1367 — 22	2174 — 16	10 20	2496 + 1	0066 — 25	11,20	1330 + 20 5	2039 — 11
22	1411 21	2142 17	22	2494 1	0116 24 5	22	1289 21	2061 11
24	1453 21	2108 17	24	2492 2	0165 25	24	1247 20 5	2083 10 5
26	1495 20 5	2074 17	26	2488 2 5	0215 24 5	26	1206 21 5	2104 9 5
28	1536 20 5	2040 18	28	2483 3	0264 24 5	28	1163 21	2123 10
9 30	1577 — 19 5	2004 — 18	10 30	2477 + 3 5	0313 — 24 5	11 30	1121 + 21 5	2143 — 9
32	1616 19 5	1968 18 5	32	2470 3 5	0362 24 5	32	1078 22	2161 8 5
34	1655 19 5	1931 19	34	2453 4 5	0411 24	34	1034 21 5	2178 8
36	1694 18 5	1893 19	36	2454 5	0459 24	36	0991 22 5	2194 8
38	1731 18 5	1855 19 5	38	2444 5	0507 24	38	0946 22	2210 7 5
9 40	1768 — 18	1816 — 19 5	10 40	2434 + 6	0555 — 23 5	11 40	0902 + 22	2225 — 6 5
42	1804 17 5	1777 20	42	2422 6	0602 23 5	42	0858 22 5	2238 6 5
44	1839 17	1737 20 5	44	2410 7	0649 23,5	44	0813 23	2251 6
46	1873 17	1696 20 5	46	2396 7	0696 23	46	0767 22 5	2263 5 5
48	* 1907 16	1655 21	48	2382 8	0742 23 5	48	0722 22 5	2274 5
9 50	1939 — 16	1613 — 21 5	10 50	2366 + 8	0789 — 22 5	11 50	0677 + 23	2284 — 4 5
52	1971 15 5	1570 21 5	52	2350 8 5	0834 22 5	52	0631 23	2293 4
54	2002 15	1527 21 5	54	2333 9	0879 22 5	54	0585 23	2301 3 5
56	2032 14 5	1484 22	56	2315 9 5	0924 22	56	0539 23	2308 3 5
58	2061 14 5	1440 22 5	58	2296 10	0968 22	58	0493 23 5	2315 2 5
9 60	2090 — 13 5	1395 — 22 5	10 60	2276 + 10	1012 — 22	11 60	0446 + 23	2320 — 2
62	2117 13 5	1350 22 5	62	2256 11	1056 21 5	62	0400 23 5	2324 2
64	2144 12 5	1305 23	64	2234 11	1099 21	64	0353 23	2328 1 5
66	2169 12 5	1259 23	66	2212 12	1141 21	66	0307 23 5	2331 0 5
68	2194 12	1213 23 5	68	2188 12	1183 20 5	68	0260 23 5	2332 — 0 5
9 70	2218 — 11 5	1166 — 23 5	10 70	2164 + 12	1224 — 20 5	11 70	0213 + 23	2333 0
72	2241 11	1119 23 5	72	2140 13	1265 20	72	0167 23 5	2333 + 0 5
74	2263 10 5	1072 23 5	74	2114 13 5	1305 19 5	74	0120 23 5	2332 1
76	2284 10	1025 24	76	2087 13 5	1344 19 5	76	0073 23	2330 1 5
78	2304 9 5	0977 24 5	78	2060 14	1383 19 5	78	0027 23 5	2327 2
9 80	2323 — 9	0928 — 24	10 80	2032 + 14 5	1422 — 18 5	11 80	*0020 + 23	2323 + 2 5
82	2341 8 5	0880 24 5	82	2003 14 5	1459 18 5	82	0066 23	2318 3
84	2358 8	0831 24 5	84	1974 15 5	1496 18 5	84	0112 23 5	2312 3
86	2374 7 5	0782 24 5	86	1943 15 5	1533 17 5	86	0159 23	2306 4
88	2389 7	0733 24 5	88	1912 15 5	1568 17 5	88	0205 22 5	2298 4
9 90	2403 — 7	0684 — 25	10 90	1881 + 16 5	1603 — 17 5	11 90	0250 + 23	2290 + 4,5
92	2417 6	0634 25	92	1848 16 5	1638 16 5	92	0296 23	2281 5,5
94	2429 5 5	0584 24 5	94	1815 17	1671 16 5	94	0342 22 5	2270 5,5
96	2440 5	0535 25	96	1781 17	1704 16	96	0387 22 5	2259 6
98	2450 4 5	0485 25	98	1747 17 5	1736 16	98	0432 22 5	2247 6,5
10 00	2459 — 0,	0435 + 0,	11,00	1712 — 0,	1768 — 0,	12 00	0477 + 0,	2234 — 0,

Продолжение табл 43

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
12,00	+ 0,	- 0,	13,20	+ 0,	- 0,	14,40	+ 0,	+ 0,
02	0477 + 22	2234 + 6,5	22	2167 + 2,5	0271 + 22	42	1065 - 18,5	1850 + 9,5
04	0521 22,5	2221 7,5	24	2172 2	0227 22	44	1028 19	1869 8,5
06	0566 22	2206 7,5	26	2176 1,5	0183 22	46	0990 19	1886 8,5
08	0610 21,5	2191 8	28	2179 1,5	0139 21,5	48	0952 19	1903 8
	0653 22	2175 9		2182 0,5	0096 22		0914 19,5	1919 7,5
12,10	0697 + 21,5	2157 + 8,5	13,30	2183 + 0,5	0052 + 22	14,50	0875 - 19	1934 + 7,5
12	0740 21	2140 9,5	32	2184 - 0,5	0008 22	52	0837 19,5	1949 6,5
14	0782 21	2121 10	34	2183 0,5	*0036 21,5	54	0798 20	1962 6,5
16	0824 21	2101 10	36	2182 1	0079 22	56	0758 19,5	1975 6
18	0866 21	2081 10,5	38	2180 1,5	0123 21,5	58	0719 20	1987 6
12,20	0908 + 20,5	2060 + 11	13,40	2177 - 2	0166 + 21,5	14,60	0679 - 20	1999 + 5
22	0949 20	2038 11,5	42	2173 2	0209 21,5	62	0639 20,5	2009 5
24	0989 20	2015 11,5	44	2169 3	0252 21,5	64	0598 20	2019 4
26	1029 20	1992 12	46	2163 3	0295 21,5	66	0558 20,5	2027 4
28	1069 19,5	1968 12,5	48	2157 3,5	0338 21	68	0517 20,5	2035 4
12,30	1108 + 19,5	1943 + 13	13,50	2150 - 4	0380 + 21,5	14,70	0476 - 20	2043 + 3
32	1147 19	1917 13	52	2142 4,5	0423 21	72	0436 21	2049 2,5
34	1185 18,5	1891 14	54	2133 5	0465 21	74	0394 20,5	2054 2,5
36	1222 18,5	1863 13,5	56	2123 5	0507 20,5	76	0353 20,5	2059 2
38	1259 18,5	1836 14,5	58	2113 6	0548 21	78	0312 20,5	2063 1,5
12,40	1296 + 17,5	1807 + 14,5	13,60	2101 - 6	0590 + 20,5	14,80	0271 - 21	2066 + 1
42	1331 18	1778 15	62	2089 6,5	0631 20	82	0229 20,5	2068 + 1
44	1367 17	1748 15	64	2076 7	0671 20,5	84	0188 20,5	2070 0
46	1401 17	1718 15,5	66	2062 7	0712 20	86	0147 21	2070 0
48	1435 17	1687 16	68	2048 8	0752 19,5	88	0105 20,5	2070 - 0,5
12,50	1469 + 16,5	1655 + 16	13,70	2032 - 8	0791 + 20	14,90	0064 - 20,5	2069 - 1
52	1502 16	1623 16,5	72	2016 8,5	0831 19,5	92	0023 21	2067 1,5
54	1534 15,5	1590 17	74	1999 9	0870 19	94	*0019 20,5	2064 1,5
56	1565 15,5	1556 17	76	1981 9	0908 19	96	0060 20,5	2061 2,5
58	1596 15	1522 17,5	78	1963 10	0946 19	98	0101 20,5	2056 2,5
12,60	1626 + 14,5	1487 + 17,5	13,80	1943 - 10	0984 + 18,5	15,00	0142 - 20,5	2051 - 3
62	1655 14,5	1452 17,5	82	1923 10	1021 18,5	02	0183 20,5	2045 3,5
64	1684 14	1417 18,5	84	1903 11	1058 18	04	0224 20,5	2038 3,5
66	1712 13,5	1380 18	86	1881 11	1094 18	06	0265 20	2031 4,5
68	1739 13,5	1344 18,5	88	1859 11,5	1130 17,5	08	0305 20,5	2022 4,5
12,70	1766 + 13	1307 + 19	13,90	1836 - 12	1165 + 17,5	15,10	0346 - 20	2013 - 5
72	1792 12,5	1269 19	92	1812 12	1200 17	12	0386 20	2003 5,5
74	1817 12	1231 19,5	94	1788 12,5	1234 17	14	0426 19,5	1992 5,5
76	1841 11,5	1192 19	96	1763 13	1268 16,5	16	0465 20	1981 6
78	1864 11,5	1154 20	98	1737 13	1301 16,5	18	0505 19,5	1969 7
12,80	1887 + 11	1114 + 19,5	14,00	1711 - 13,5	1334 + 16	15,20	0544 - 19,5	1955 - 6,5
82	1909 10,5	1075 20	02	1684 14	1366 15,5	22	0583 19,5	1942 7,5
84	1930 10	1035 20,5	04	1656 14	1397 15,5	24	0622 19	1927 7,5
86	1950 10	0994 20	06	1628 14,5	1428 15	26	0660 19	1912 8
88	1970 9	0954 21	08	1599 14,5	1458 15	28	0698 19	1896 8,5
12,90	1988 + 9	0912 + 20,5	14,10	1570 - 15,5	1488 + 14,5	15,30	0736 - 18,5	1879 - 9
92	2006 8,5	0871 20,5	12	1539 15	1517 14	32	0773 19	1861 9
94	2023 8	0830 21	14	1509 15,5	1545 14	34	0811 18	1843 9,5
96	2039 8	0788 21	16	1478 16	1573 13,5	36	0847 18	1824 10
98	2055 7	0746 21,5	18	1446 16	1600 13	38	0883 18	1804 10
13,00	2069 + 7	0703 + 21	14,20	1414 - 16,5	1626 + 13	15,40	0919 - 18	1784 - 10,5
02	2083 6,5	0661 21,5	22	1381 16,5	1652 12,5	42	0955 17,5	1763 11
04	2096 6	0618 21,5	24	1348 17	1677 12	44	0990 17	1741 11
06	2108 5,5	0575 21,5	26	1314 17	1701 11,5	46	1024 17,5	1719 11,5
08	2119 5	0532 21,5	28	1280 17,5	1724 11,5	48	1059 16,5	1696 12
13,10	2129 + 4,5	0489 + 22	14,30	1245 - 17,5	1747 + 11	15,50	1092 - 0,	1672 + 0,
12	2138 4,5	0445 21,5	32	1210 18	1769 11			
14	2147 3,5	0402 22	34	1174 18	1791 10			
16	2154 3,5	0358 22	36	1138 18	1811 10			
18	2161 3	0314 21,5	38	1102 18,5	1831 9,5			
13,20	2167	0271	14,40	1065	1850			
	+ 0,	- 0,		+ 0,	+ 0,			

Т а б л и ц а 44. Функции Бесселя $J_{n/2}(x)$

x	$J_{1/2}(x)$	$J_{3/2}(x)$	$J_{5/2}(x)$	$J_{7/2}(x)$	$J_{9/2}(x)$	$J_{11/2}(x)$	$J_{13/2}(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+ 0,6714	+ 0,2403	+ 0,4950 (— 1)	+ 0,7186 (— 2)	+ 0,8067 (— 3)	+ 0,7385 (— 4)	+ 0,5710 (— 5)
2	+ 0,5130	+ 0,4913	+ 0,2239	+ 0,6852 (— 1)	+ 0,1589 (— 1)	+ 0,2973 (— 2)	+ 0,4672 (— 3)
3	+ 0,6501 (— 1)	+ 0,4777	+ 0,4127	+ 0,2101	+ 0,7760 (— 1)	+ 0,2266 (— 1)	+ 0,5493 (— 2)
4	— 0,3019	+ 0,1853	+ 0,4409	+ 0,3658	+ 0,1993	+ 0,8261 (— 1)	+ 0,2787 (— 1)
5	— 0,3422	— 0,1697	+ 0,2404	+ 0,4100	+ 0,3337	+ 0,1906	+ 0,8558 (— 1)
6	— 0,9102 (— 1)	— 0,3279	— 0,7295 (— 1)	+ 0,2671	+ 0,3846	+ 0,3098	+ 0,1833
7	+ 0,1981	— 0,1991	— 0,2834	— 0,3403 (— 2)	+ 0,2800	+ 0,3634	+ 0,2911
8	+ 0,2791	+ 0,7593 (— 1)	— 0,2506	— 0,2326	+ 0,4712 (— 1)	+ 0,2856	+ 0,3456
9	+ 0,1096	+ 0,2545	— 0,2477 (— 1)	— 0,2683	— 0,1839	+ 0,8439 (— 1)	+ 0,2870
10	— 0,1373	+ 0,1980	+ 0,1967	— 0,9965 (— 1)	— 0,2664	— 0,1401	+ 0,1123
11	— 0,2406	— 0,2293 (— 1)	+ 0,2343	+ 0,1294	— 0,1519	— 0,2538	— 0,1018
12	— 0,1236	— 0,2047	+ 0,7242 (— 1)	+ 0,2348	+ 0,6457 (— 1)	— 0,1864	— 0,2356
13	+ 0,9298 (— 1)	— 0,1937	— 0,1377	+ 0,1407	+ 0,2134	+ 0,7055 (— 2)	— 0,2075
14	+ 0,2112	— 0,1407 (— 1)	— 0,2143	— 0,6245 (— 1)	+ 0,1830	+ 0,1801	— 0,4151 (— 1)
15	+ 0,1340	+ 0,1654	— 0,1009	— 0,1991	+ 0,7984 (— 2)	+ 0,2039	+ 0,1415
16	— 0,5743 (— 1)	+ 0,1874	+ 0,9257 (— 1)	— 0,1585	— 0,1619	+ 0,6743 (— 1)	+ 0,2083
17	— 0,1860	+ 0,4230 (— 1)	+ 0,1935	+ 0,1461 (— 1)	— 0,1875	— 0,1139	+ 0,1138
18	— 0,1412	— 0,1320	+ 0,1192	+ 0,1651	— 0,5500 (— 1)	— 0,1926	— 0,6273 (— 1)
19	+ 0,2743 (— 1)	— 0,1795	— 0,5578 (— 1)	+ 0,1649	+ 0,1165	— 0,1097	— 0,1800
20	+ 0,1629	— 0,6466 (— 1)	— 0,1726	+ 0,2152 (— 1)	+ 0,1801	+ 0,5953 (— 1)	— 0,1674
21	+ 0,1457	+ 0,1023	— 0,1311	— 0,1335	+ 0,8656 (— 1)	+ 0,1706	+ 0,2808 (— 2)
22	— 0,1506 (— 2)	+ 0,1700	+ 0,2469 (— 1)	— 0,1644	— 0,7701 (— 1)	+ 0,1329	+ 0,1435
23	— 0,1408	+ 0,8253 (— 1)	+ 0,1516	— 0,4958 (— 1)	— 0,1666	— 0,1563 (— 1)	+ 0,1592
24	— 0,1475	— 0,7523 (— 1)	+ 0,1381	+ 0,1040	— 0,1078	— 0,1444	+ 0,4157 (— 1)
25	— 0,2112 (— 1)	— 0,1590	+ 0,2038 (— 2)	+ 0,1594	+ 0,4260 (— 1)	— 0,1441	— 0,1060
26	+ 0,1193	— 0,9664 (— 1)	— 0,1305	+ 0,7155 (— 1)	+ 0,1497	— 0,1972 (— 1)	— 0,1581
27	+ 0,1469	+ 0,5030 (— 1)	— 0,1413	— 0,7646 (— 1)	+ 0,1214	+ 0,1169	— 0,7390 (— 1)
28	+ 0,4085 (— 1)	+ 0,1466	— 0,2514 (— 1)	— 0,1511	— 0,1263 (— 1)	+ 0,1470	+ 0,7040 (— 1)
29	— 0,9833 (— 1)	+ 0,1074	+ 0,1094	— 0,8858 (— 1)	— 0,1308	+ 0,4798 (— 1)	+ 0,1490
30	— 0,1439	— 0,2727 (— 1)	+ 0,1412	+ 0,5080 (— 1)	— 0,1293	— 0,8961 (— 1)	+ 0,9649 (— 1)
31	— 0,5790 (— 1)	— 0,1330	+ 0,4503 (— 1)	+ 0,1402	— 0,1337 (— 1)	— 0,1441	— 0,3776 (— 1)
32	+ 0,7778 (— 1)	— 0,1152	— 0,8858 (— 1)	+ 0,1014	+ 0,1108	— 0,7024 (— 1)	— 0,1349
33	+ 0,1389	+ 0,6053 (— 2)	— 0,1383	— 0,2701 (— 1)	+ 0,1326	+ 0,6318 (— 1)	— 0,1115
34	+ 0,7240 (— 1)	+ 0,1182	— 0,6196 (— 1)	— 0,1274	+ 0,3574 (— 1)	+ 0,1368	+ 0,8521 (— 2)
35	— 0,5775 (— 1)	+ 0,1202	+ 0,6805 (— 1)	— 0,1105	— 0,9015 (— 1)	+ 0,8732 (— 1)	+ 0,1176
36	— 0,1319	+ 0,1335 (— 1)	+ 0,1330	+ 0,5119 (— 2)	— 0,1320	— 0,3812 (— 1)	+ 0,1204
37	— 0,8441 (— 1)	— 0,1027	+ 0,7609 (— 1)	+ 0,1130	— 0,5472 (— 1)	— 0,1263	+ 0,1718 (— 1)
38	+ 0,3836 (— 1)	— 0,1226	— 0,4804 (— 1)	+ 0,1163	+ 0,6946 (— 1)	— 0,9984 (— 1)	— 0,9836 (— 1)
39	+ 0,1231	— 0,3091 (— 1)	— 0,1255	+ 0,1482 (— 1)	+ 0,1252	+ 0,1476 (— 1)	— 0,1240
40	+ 0,9400 (— 1)	+ 0,8649 (— 1)	— 0,8751 (— 1)	— 0,9743 (— 1)	+ 0,7046 (— 1)	+ 0,1133	— 0,3931 (— 1)
41	— 0,1977 (— 1)	+ 0,1225	+ 0,2873 (— 1)	— 0,1190	— 0,4906 (— 1)	+ 0,1083	+ 0,7811 (— 1)
42	— 0,1128	+ 0,4656 (— 1)	+ 0,1162	— 0,3273 (— 1)	— 0,1216	+ 0,6668 (— 2)	+ 0,1234
43	— 0,1012	— 0,6990 (— 1)	+ 0,9632 (— 1)	+ 0,8110 (— 1)	— 0,8313 (— 1)	— 0,9850 (— 1)	+ 0,5793 (— 1)
44	+ 0,2129 (— 2)	— 0,1202	— 0,1033 (— 1)	+ 0,1190	+ 0,2927 (— 1)	— 0,1131	— 0,5753 (— 1)
45	+ 0,1012	— 0,6023 (— 1)	— 0,1052	+ 0,4854 (— 1)	+ 0,1128	— 0,2599 (— 1)	— 0,1191
46	+ 0,1061	+ 0,5315 (— 1)	— 0,1026	— 0,6430 (— 1)	+ 0,9284 (— 1)	— 0,8247 (— 1)	— 0,7312 (— 1)
47	+ 0,1438 (— 1)	+ 0,1158	— 0,6991 (— 2)	— 0,1165	— 0,1037 (— 1)	+ 0,1146	+ 0,3718 (— 1)
48	— 0,8848 (— 1)	+ 0,7188 (— 1)	+ 0,9297 (— 1)	— 0,6220 (— 1)	— 0,1020	+ 0,4306 (— 1)	+ 0,1119
49	— 0,1087	— 0,3648 (— 1)	+ 0,1065	+ 0,4735 (— 1)	— 0,9972 (— 1)	— 0,6566 (— 1)	+ 0,8497 (— 1)
50	— 0,2961 (— 1)	— 0,1095	+ 0,2304 (— 1)	+ 0,1118	— 0,7388 (— 2)	— 0,1131	— 0,1750 (— 1)

Продолжение табл. 44

x	$J_{-1/2}(x)$	$J_{-3/2}(x)$	$J_{-5/2}(x)$	$J_{-7/2}(x)$	$J_{-9/2}(x)$	$J_{-11/2}(x)$	$J_{-13/2}(x)$
0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
1	+ 0,4311	- 1,1025	+ 2,8764	- 13,279	+ 90,080	- 797,44	+ 8681,7
2	- 0,2348	- 0,3956	+ 0,8282	- 1,6749	+ 5,0340	- 20,978	+ 110,35
3	- 0,4560	+ 0,8701 (- 1)	+ 0,3690	- 0,7021	+ 1,2691	- 3,1053	+ 10,117
4	- 0,2608	+ 0,3671	- 0,1457 (- 1)	- 0,3489	+ 0,6251	- 1,0577	+ 2,2834
5	+ 0,1012	+ 0,3219	- 0,2944	- 0,2755 (- 1)	+ 0,3329	- 0,5717	+ 0,9249
6	+ 0,3128	+ 0,3889 (- 1)	- 0,3322	+ 0,2379	+ 0,5460 (- 1)	- 0,3198	+ 0,5318
7	+ 0,2274	- 0,2306	- 0,1285	+ 0,3224	- 0,1939	- 0,7313 (- 1)	+ 0,3088
8	- 0,4104 (- 1)	- 0,2740	+ 0,1438	+ 0,1841	- 0,3049	+ 0,1589	+ 0,8641 (- 1)
9	- 0,2423	- 0,8268 (- 1)	+ 0,2699	- 0,6725 (- 1)	- 0,2176	+ 0,2848	- 0,1306
10	- 0,2117	+ 0,1584	+ 0,1642	- 0,2405	+ 0,4188 (- 2)	+ 0,2368	- 0,2646
11	+ 0,1065 (- 2)	+ 0,2405	- 0,6665 (- 1)	- 0,2102	+ 0,2004	+ 0,4622 (- 1)	- 0,2466
12	+ 0,1944	+ 0,1074	- 0,2212	- 0,1522 (- 1)	+ 0,2301	- 0,1573	- 0,8586 (- 1)
13	+ 0,2008	- 0,1084	- 0,1758	+ 0,1760	+ 0,8100 (- 1)	- 0,2321	+ 0,1154
14	+ 0,2916 (- 1)	- 0,2133	+ 0,1655 (- 1)	+ 0,2074	- 0,1203	- 0,1301	+ 0,2225
15	- 0,1565	- 0,1235	+ 0,1812	+ 0,6313 (- 1)	- 0,2107	+ 0,6327 (- 1)	+ 0,1643
16	- 0,1910	+ 0,6937 (- 1)	+ 0,1780	- 0,1250	- 0,1233	+ 0,1944	- 0,1030 (- 1)
17	- 0,5325 (- 1)	+ 0,1892	+ 0,1986 (- 1)	- 0,1950	+ 0,6044 (- 1)	+ 0,1630	- 0,1659
18	+ 0,1242	+ 0,1343	- 0,1466	- 0,9362 (- 1)	+ 0,1830	+ 0,2131 (- 2)	- 0,1843
19	+ 0,1810	- 0,3696 (- 1)	- 0,1751	+ 0,8305 (- 1)	+ 0,1445	- 0,1515	- 0,5682 (- 1)
20	+ 0,7281 (- 1)	- 0,1665	- 0,4783 (- 1)	+ 0,1785	- 0,1464 (- 1)	- 0,1719	+ 0,1092
21	- 0,9537 (- 1)	- 0,1411	+ 0,1155	+ 0,1136	- 0,1534	- 0,4788 (- 1)	+ 0,1785
22	- 0,1701	+ 0,9238 (- 2)	+ 0,1688	- 0,4761 (- 1)	- 0,1537	+ 0,1105	+ 0,9845 (- 1)
23	- 0,8865 (- 1)	+ 0,1446	+ 0,6978 (- 1)	- 0,1598	- 0,2114 (- 1)	+ 0,1681	- 0,5924 (- 1)
24	+ 0,6908 (- 1)	+ 0,1446	- 0,8716 (- 1)	+ 0,1265	+ 0,1240	+ 0,7994 (- 1)	- 0,1607
25	+ 0,1582	+ 0,1479 (- 1)	- 0,1599	+ 0,1720 (- 1)	+ 0,1551	- 0,7304 (- 1)	- 0,1230
26	+ 0,1012	- 0,1232	- 0,8701 (- 1)	+ 0,1399	+ 0,4933 (- 1)	- 0,1570	+ 0,1710 (- 1)
27	- 0,4486 (- 1)	- 0,1452	+ 0,6099 (- 1)	+ 0,1339	- 0,9571 (- 1)	- 0,1020	+ 0,1373
28	- 0,1451	- 0,3566 (- 1)	+ 0,1490	+ 0,9064 (- 2)	- 0,1512	+ 0,3955 (- 1)	+ 0,1357
29	- 0,1108	+ 0,1021	+ 0,1003	- 0,1194	- 0,7144 (- 1)	+ 0,1416	+ 0,1773 (- 1)
30	+ 0,2247 (- 1)	+ 0,1432	- 0,3679 (- 1)	- 0,1370	+ 0,6877 (- 1)	+ 0,1164	- 0,1115
31	+ 0,1311	+ 0,5367 (- 1)	- 0,1363	- 0,3169 (- 1)	+ 0,1434	- 0,9951 (- 2)	- 0,1399
32	+ 0,1177	- 0,8145 (- 1)	- 0,1100	+ 0,9865 (- 1)	+ 0,8845 (- 1)	- 0,1235	- 0,4599 (- 1)
33	- 0,1844 (- 2)	- 0,1388	+ 0,1447 (- 1)	+ 0,1366	- 0,4345 (- 1)	- 0,1248	+ 0,8504 (- 1)
34	- 0,1161	- 0,6898 (- 1)	+ 0,1222	+ 0,5101 (- 1)	- 0,1327	- 0,1588 (- 1)	+ 0,1378
35	- 0,1219	+ 0,6123 (- 1)	+ 0,1166	- 0,7789 (- 1)	- 0,1011	+ 0,1039	+ 0,6841 (- 1)
36	- 0,1702 (- 1)	+ 0,1324	+ 0,5987 (- 2)	- 0,1332	+ 0,1991 (- 1)	+ 0,1282	- 0,5909 (- 1)
37	+ 0,1004	+ 0,8170 (- 1)	- 0,1070	- 0,6724 (- 1)	+ 0,1197	+ 0,3811 (- 1)	- 0,1311
38	+ 0,1236	- 0,4161 (- 1)	- 0,1203	+ 0,5745 (- 1)	+ 0,1098	- 0,8344 (- 1)	- 0,8560 (- 1)
39	+ 0,3407 (- 1)	- 0,1240	- 0,2453 (- 1)	+ 0,1272	+ 0,1705 (- 2)	- 0,1276	+ 0,3427 (- 1)
40	- 0,8414 (- 1)	- 0,9190 (- 1)	+ 0,9103 (- 1)	+ 0,8052 (- 1)	- 0,1051	- 0,5687 (- 1)	+ 0,1208
41	- 0,1230	+ 0,2277 (- 1)	+ 0,1214	- 0,3757 (- 1)	- 0,1150	+ 0,6280 (- 1)	+ 0,9810 (- 1)
42	- 0,4924 (- 1)	+ 0,1140	+ 0,4110 (- 1)	- 0,1189	- 0,2128 (- 1)	+ 0,1204	- 0,1026 (- 1)
43	+ 0,6754 (- 1)	+ 0,9964 (- 1)	- 0,7450 (- 1)	- 0,9097 (- 1)	+ 0,8931 (- 1)	+ 0,7228 (- 1)	- 0,1078
44	+ 0,1203	- 0,4863 (- 2)	- 0,1200	+ 0,1849 (- 1)	+ 0,1170	- 0,4243 (- 1)	- 0,1064
45	+ 0,6248 (- 1)	- 0,1026	- 0,5564 (- 1)	+ 0,1088	+ 0,3874 (- 1)	- 0,1165	- 0,1026 (- 1)
46	- 0,5084 (- 1)	- 0,1050	+ 0,5769 (- 1)	+ 0,9971 (- 1)	- 0,7271 (- 1)	- 0,8449 (- 1)	+ 0,9291 (- 1)
47	- 0,1155	- 0,1192 (- 1)	+ 0,1163	- 0,4427 (- 3)	- 0,1162	+ 0,2269 (- 1)	+ 0,1109
48	- 0,7372 (- 1)	+ 0,9001 (- 1)	+ 0,6810 (- 1)	- 0,8292 (- 1)	- 0,5600 (- 1)	+ 0,9342 (- 1)	+ 0,3460 (- 1)
49	+ 0,3426 (- 1)	+ 0,1080	- 0,4088 (- 1)	- 0,1038	+ 0,5571 (- 1)	+ 0,9361 (- 1)	- 0,7673 (- 1)
50	+ 0,1089	+ 0,2743 (- 1)	- 0,1105	- 0,1638 (- 1)	+ 0,1128	- 0,3933 (- 2)	- 0,1120

Т а б л и ц а 45. Функции Бесселя $J_{n/2}(x)$ и $J_{-n/2}(x)$

x	$J_{1/4}(x)$	$J_{-1/4}(x)$	$J_{3/4}(x)$	$J_{-3/4}(x)$	$J_{1/2}(x)$	$J_{-1/2}(x)$	$J_{2/3}(x)$	$J_{-2/3}(x)$
0.0	0.0000	∞	0.0000	∞	0.0000	∞	0.0000	∞
2	+ 0.6155	+ 1.4319	+ 0.1924	+ 1.4892	+ 0.5159	+ 1.5672	+ 0.2372	+ 1.6808
4	0.7144	1.1559	0.3180	0.7770	0.6354	1.1879	0.3698	0.9625
6	0.7589	0.9737	0.4187	0.4442	0.7000	0.9582	0.4701	0.6156
8	0.7690	0.8170	0.4987	0.2193	0.7294	0.7731	0.5453	0.3769
1.0	+ 0.7522	+ 0.6694	+ 0.5587	+ 0.0447	+ 0.7309	+ 0.6069	+ 0.5979	+ 0.1883
2	0.7129	0.5260	0.5989	- 0.0985	0.7085	0.4516	0.6289	+ 0.0307
4	0.6545	0.3862	0.6194	0.2172	0.6654	0.3049	0.6391	- 0.1033
6	0.5804	0.2512	0.6208	0.3143	0.6048	0.1672	0.6296	0.2163
8	0.4937	0.1229	0.6038	0.3906	0.5296	+ 0.0397	0.6016	0.3093
2.0	+ 0.3978	+ 0.0036	+ 0.5698	- 0.4467	+ 0.4429	- 0.0757	+ 0.5570	- 0.3823
2	0.2962	- 0.1045	0.5204	0.4829	0.3482	0.1774	0.4978	0.4355
4	0.1923	0.1992	0.4578	0.4996	0.2488	0.2636	0.4265	0.4689
6	+ 0.0895	0.2788	0.3844	0.4977	0.1479	0.3330	0.3459	0.4831
8	- 0.0092	0.3418	0.3029	0.4784	+ 0.0490	0.3847	0.2589	0.4789
3.0	- 0.1006	- 0.3875	+ 0.2162	- 0.4434	- 0.0450	- 0.4182	+ 0.1684	- 0.4576
2	0.1824	0.4154	0.1273	0.3945	0.1312	0.4336	+ 0.0776	0.4209
4	0.2521	0.4256	+ 0.0391	0.3343	0.2071	0.4314	- 0.0105	0.3708
6	0.3081	0.4188	- 0.0455	0.2651	0.2707	0.4129	0.0932	0.3098
8	0.3493	0.3962	0.1238	0.1899	0.3205	0.3794	0.1680	0.2405
4.0	- 0.3748	- 0.3595	- 0.1935	- 0.1114	- 0.3554	- 0.3331	- 0.2325	- 0.1657
2	0.3845	0.3106	0.2525	- 0.0326	0.3749	0.2761	0.2852	0.0882
4	0.3788	0.2519	0.2992	+ 0.0438	0.3789	0.2111	0.3245	- 0.0110
6	0.3587	0.1861	0.3325	0.1152	0.3681	0.1409	0.3498	+ 0.0631
8	0.3255	0.1158	0.3518	0.1791	0.3434	- 0.0681	0.3606	0.1317
5.0	- 0.2810	- 0.0439	- 0.3569	+ 0.2336	- 0.3064	+ 0.0043	- 0.3571	+ 0.1925
2	0.2272	+ 0.0269	0.3481	0.2770	0.2589	0.0738	0.3401	0.2434
4	0.1666	0.0940	0.3264	0.3082	0.2032	0.1377	0.3106	0.2831
6	0.1017	0.1550	0.2929	0.3264	0.1415	0.1939	0.2703	0.3105
8	- 0.0351	0.2078	0.2493	0.3314	0.0765	0.2406	0.2209	0.3248
6.0	+ 0.0306	+ 0.2506	- 0.1976	+ 0.3234	- 0.0107	+ 0.2763	- 0.1646	+ 0.3262
2	0.0929	0.2823	0.1399	0.3033	+ 0.0534	0.3001	0.1038	0.3148
4	0.1497	0.3019	0.0787	0.2720	0.1133	0.3113	- 0.0409	0.2916
6	0.1988	0.3090	- 0.0163	0.2312	0.1670	0.3100	+ 0.0216	0.2578
8	0.2387	0.3038	+ 0.0449	0.1827	0.2125	0.2966	0.0815	0.2150
7.0	+ 0.2680	+ 0.2869	+ 0.1025	+ 0.1284	+ 0.2484	+ 0.2720	+ 0.1364	+ 0.1650
2	0.2860	0.2591	0.1545	0.0707	0.2735	0.2374	0.1844	0.1101
4	0.2923	0.2220	0.1991	+ 0.0118	0.2872	0.1944	0.2240	+ 0.0523
6	0.2869	0.1771	0.2348	- 0.0459	0.2893	0.1449	0.2538	- 0.0059
8	0.2704	0.1264	0.2604	0.1004	0.2799	0.0911	0.2729	0.0624
8.0	+ 0.2436	+ 0.0720	+ 0.2752	- 0.1496	+ 0.2598	+ 0.0350	+ 0.2808	- 0.1151
2	0.2080	+ 0.0161	0.2788	0.1917	0.2299	- 0.0211	0.2775	0.1619
4	0.1650	- 0.0390	0.2715	0.2253	0.1918	0.0750	0.2635	0.2013
6	0.1165	0.0913	0.2538	0.2493	0.1470	0.1247	0.2395	0.2319
8	0.0646	0.1388	0.2265	0.2631	0.0974	0.1683	0.2067	0.2526
9.0	+ 0.0113	- 0.1798	+ 0.1910	- 0.2662	+ 0.0451	- 0.2043	+ 0.1665	- 0.2630
2	- 0.0413	0.2128	0.1488	0.2588	- 0.0078	0.2315	0.1206	0.2629
4	0.0911	0.2367	0.1017	0.2415	0.0592	0.2490	0.0710	0.2525
6	0.1363	0.2508	0.0515	0.2150	0.1073	0.2563	+ 0.0197	0.2323
8	0.1752	0.2547	+ 0.0004	0.1807	0.1501	0.2533	- 0.0314	0.2035
10.0	- 0.2064	- 0.2484	- 0.0497	- 0.1399	- 0.1861	- 0.2405	- 0.0801	- 0.1672

Т а б л и ц а 46. Функции Бесселя $J_\nu(n)$

ν	$J_\nu(1)$	$J_\nu(2)$	$J_\nu(3)$	$J_\nu(4)$	$J_\nu(5)$	$J_\nu(6)$
0	+ 0,7652	+ 0,2239	— 0,2601	— 0,3971	— 0,1776	+ 0,1506
0,5	+ 0,6714	+ 0,5130	+ 0,6501 (— 1)	— 0,3019	— 0,3422	— 0,9102 (— 1)
1,0	+ 0,4401	+ 0,5767	+ 0,3391	— 0,6604 (— 1)	— 0,3276	— 0,2767
1,5	+ 0,2403	+ 0,4913	+ 0,4777	+ 0,1853	— 0,1697	— 0,3279
2,0	+ 0,1149	+ 0,3528	+ 0,4861	+ 0,3641	+ 0,4657 (— 1)	— 0,2429
2,5	+ 0,4950 (— 1)	+ 0,2239	+ 0,4127	+ 0,4409	+ 0,2404	— 0,7295 (— 1)
3,0	+ 0,1956 (— 1)	+ 0,1289	+ 0,3091	+ 0,4302	+ 0,3648	+ 0,1148
3,5	+ 0,7186 (— 2)	+ 0,6852 (— 1)	+ 0,2101	+ 0,3658	+ 0,4100	+ 0,2671
4,0	+ 0,2477 (— 2)	+ 0,3400 (— 1)	+ 0,1320	+ 0,2811	+ 0,3912	+ 0,3576
4,5	+ 0,8067 (— 3)	+ 0,1589 (— 1)	+ 0,7760 (— 1)	+ 0,1993	+ 0,3337	+ 0,3846
5,0	+ 0,2498 (— 3)	+ 0,7040 (— 2)	+ 0,4303 (— 1)	+ 0,1321	+ 0,2611	+ 0,3621
5,5	+ 0,7385 (— 4)	+ 0,2973 (— 2)	+ 0,2266 (— 1)	+ 0,8261 (— 1)	+ 0,1906	+ 0,3098
6,0	+ 0,2094 (— 4)	+ 0,1202 (— 2)	+ 0,1739 (— 1)	+ 0,4909 (— 1)	+ 0,1310	+ 0,2458
6,5	+ 0,5710 (— 5)	+ 0,4672 (— 3)	+ 0,5493 (— 2)	+ 0,2787 (— 1)	+ 0,8558 (— 1)	+ 0,1833
7,0	+ 0,1502 (— 5)	+ 0,1749 (— 3)	+ 0,2547 (— 2)	+ 0,1518 (— 1)	+ 0,5338 (— 1)	+ 0,1296
8	+ 0,9422 (— 7)	+ 0,2218 (— 4)	+ 0,4934 (— 3)	+ 0,4029 (— 2)	+ 0,1841 (— 1)	+ 0,5653 (— 1)
9	+ 0,5249 (— 8)	+ 0,2492 (— 5)	+ 0,8440 (— 4)	+ 0,9386 (— 3)	+ 0,5520 (— 2)	+ 0,2117 (— 1)
10	+ 0,2631 (— 9)	+ 0,2515 (— 6)	+ 0,1293 (— 4)	+ 0,1950 (— 3)	+ 0,1468 (— 2)	+ 0,6964 (— 2)
11	+ 0,1198 (— 10)	+ 0,2304 (— 7)	+ 0,1794 (— 5)	+ 0,3660 (— 4)	+ 0,3509 (— 3)	+ 0,2048 (— 2)
12	+ 0,5000 (— 12)	+ 0,1933 (— 8)	+ 0,2276 (— 6)	+ 0,6264 (— 5)	+ 0,7628 (— 4)	+ 0,5452 (— 3)
13	+ 0,1926 (— 13)	+ 0,1455 (— 9)	+ 0,2659 (— 7)	+ 0,9859 (— 6)	+ 0,1521 (— 4)	+ 0,1327 (— 3)
14	+ 0,689 (— 15)	+ 0,1073 (— 10)	+ 0,2880 (— 8)	+ 0,1436 (— 6)	+ 0,2801 (— 5)	+ 0,2976 (— 4)
15	+ 0,23 (— 16)	+ 0,7183 (— 12)	+ 0,2908 (— 9)	+ 0,1948 (— 7)	+ 0,4797 (— 6)	+ 0,6192 (— 5)
16	+ 0,1 (— 17)	+ 0,4506 (— 13)	+ 0,2749 (— 10)	+ 0,2472 (— 8)	+ 0,7675 (— 7)	+ 0,1202 (— 5)
17		+ 0,2659 (— 14)	+ 0,2444 (— 11)	+ 0,2947 (— 9)	+ 0,1153 (— 7)	+ 0,2187 (— 6)
18		+ 0,148 (— 15)	+ 0,2050 (— 12)	+ 0,3313 (— 10)	+ 0,1631 (— 8)	+ 0,3746 (— 7)
19		+ 0,8 (— 17)	+ 0,1628 (— 13)	+ 0,3525 (— 11)	+ 0,2183 (— 9)	+ 0,6062 (— 8)
20			+ 0,1228 (— 14)	+ 0,3560 (— 12)	+ 0,2770 (— 10)	+ 0,9296 (— 9)
21			+ 0,88 (— 16)	+ 0,3420 (— 13)	+ 0,3344 (— 11)	+ 0,1355 (— 9)
22			+ 0,6 (— 17)	+ 0,3134 (— 14)	+ 0,3848 (— 12)	+ 0,1882 (— 10)
23				+ 0,275 (— 15)	+ 0,4231 (— 13)	+ 0,2496 (— 11)
24				+ 0,23 (— 16)	+ 0,4454 (— 14)	+ 0,3168 (— 12)
25				+ 0,2 (— 17)	+ 0,450 (— 15)	+ 0,3855 (— 13)
26					+ 0,44 (— 16)	+ 0,4507 (— 14)
27					+ 0,4 (— 17)	+ 0,507 (— 15)
28						+ 0,55 (— 16)
29						+ 0,6 (— 17)
30						+ 0,1 (— 17)

ν	$J_\nu(7)$	$J_\nu(8)$	$J_\nu(9)$	$J_\nu(10)$	$J_\nu(11)$	$J_\nu(12)$
0	+ 0,3001	+ 0,1717	— 0,9033 (— 1)	— 0,2459	— 0,1712	+ 0,4769 (— 1)
0,5	+ 0,1981	+ 0,2791	+ 0,1096	— 0,1373	— 0,2406	— 0,1236
1,0	— 0,4683 (— 2)	+ 0,2346	+ 0,2453	+ 0,4347 (— 1)	— 0,1768	— 0,2234
1,5	— 0,1991	+ 0,7593 (— 1)	+ 0,2545	+ 0,1980	— 0,2293 (— 1)	— 0,2047
2,0	— 0,3014	— 0,1130	+ 0,1448	+ 0,2546	+ 0,1390	— 0,8493 (— 1)

Продолжение табл. 46

ν	$J_\nu(7)$	$J_\nu(8)$	$J_\nu(9)$	$J_\nu(10)$	$J_\nu(11)$	$J_\nu(12)$
2,5	-0,2834	-0,2506	-0,2477 (-1)	+0,1967	+0,2343	+0,7242 (-1)
3,0	-0,1676	-0,2911	-0,1809	+0,5838 (-1)	+0,2273	+0,1951
3,5	-0,3403 (-2)	-0,2326	-0,2683	-0,9965 (-1)	+0,1294	+0,2348
4,0	+0,1578	-0,1054	-0,2655	-0,2196	-0,1504 (-1)	+0,1825
4,5	+0,2800	+0,4712 (-1)	-0,1839	-0,2664	-0,1519	+0,6487 (-1)
5,0	+0,3479	+0,1858	-0,5504 (-1)	-0,2341	-0,2383	-0,7347 (-1)
5,5	+0,3634	+0,2856	+0,8439 (-1)	-0,1401	-0,2538	-0,1864
6,0	+0,3392	+0,3376	+0,2043	-0,1446 (-1)	-0,2016	-0,2437
6,5	+0,2911	+0,3456	+0,2870	+0,1123	-0,1018	-0,2354
7,0	+0,2336	+0,3206	+0,3275	+0,2167	+0,1838 (-1)	-0,1703
7,5	+0,1772	+0,2759	+0,3302	+0,2861	+0,1334	-0,6865 (-1)
8,0	+0,1280	+0,2235	+0,3051	+0,3179	+0,2250	+0,4510 (-1)
8,5	+0,8853 (-1)	+0,1718	+0,2633	+0,3168	+0,2838	+0,1496
9,0	+0,5892 (-1)	+0,1263	+0,2149	+0,2919	+0,3089	+0,2304
9,5	+0,3785 (-1)	+0,892 (-1)	+0,1672	+0,2526	+0,3051	+0,2806
10,0	+0,2354 (-1)	+0,6077 (-1)	+0,1247	+0,2075	+0,2804	+0,3005
10,5	+0,1420 (-1)	+0,4004 (-1)	+0,8959 (-1)	+0,1630	+0,2433	+0,2947
11,0	+0,8335 (-2)	+0,2560 (-1)	+0,6222 (-1)	+0,1231	+0,2010	+0,2704
11,5	+0,4763 (-2)	+0,1590 (-1)	+0,4188 (-1)	+0,8976 (-1)	+0,1593	+0,2351
12,0	+0,2656 (-2)	+0,9624 (-2)	+0,2739 (-1)	+0,6337 (-1)	+0,1216	+0,1953
12,5	+0,1446 (-2)	+0,5680 (-2)	+0,1744 (-1)	+0,4344 (-1)	+0,8978 (-1)	+0,1559
13,0	+0,7702 (-3)	+0,3275 (-2)	+0,1083 (-1)	+0,2897 (-1)	+0,6429 (-1)	+0,1201
13,5	+0,4016 (-3)	+0,1846 (-2)	+0,6568 (-2)	+0,1884 (-1)	+0,4477 (-1)	+0,8969 (-1)
14,0	+0,2052 (-3)	+0,1019 (-2)	+0,3895 (-2)	+0,1196 (-1)	+0,3037 (-1)	+0,6504 (-1)
15	+0,5059 (-4)	+0,2926 (-3)	+0,1286 (-2)	+0,4508 (-2)	+0,1301 (-1)	+0,3161 (-1)
16	+0,1161 (-4)	+0,7801 (-4)	+0,3933 (-3)	+0,1567 (-2)	+0,5110 (-2)	+0,1399 (-1)
17	+0,2494 (-5)	+0,1942 (-4)	+0,1120 (-3)	+0,5056 (-3)	+0,1856 (-2)	+0,5698 (-2)
18	+0,5037 (-6)	+0,4538 (-5)	+0,2988 (-4)	+0,1524 (-3)	+0,6280 (-3)	+0,2152 (-2)
19	+0,9598 (-7)	+0,9992 (-6)	+0,7497 (-5)	+0,4315 (-4)	+0,1990 (-3)	+0,7590 (-3)
20	+0,1731 (-7)	+0,2081 (-6)	+0,1777 (-5)	+0,1151 (-4)	+0,5931 (-4)	+0,2512 (-3)
21	+0,2966 (-8)	+0,4110 (-7)	+0,3990 (-6)	+0,2907 (-5)	+0,1670 (-4)	+0,7839 (-4)
22	+0,4839 (-9)	+0,7725 (-8)	+0,8515 (-7)	+0,6969 (-6)	+0,4458 (-5)	+0,2315 (-4)
23	+0,7535 (-10)	+0,1385 (-8)	+0,1732 (-7)	+0,1590 (-6)	+0,1132 (-5)	+0,6491 (-5)
24	+0,1122 (-10)	+0,2373 (-9)	+0,3364 (-8)	+0,3463 (-7)	+0,2738 (-6)	+0,1733 (-5)
25	+0,1602 (-11)	+0,3895 (-10)	+0,6257 (-9)	+0,7215 (-8)	+0,6333 (-7)	+0,4418 (-6)
26	+0,2195 (-12)	+0,6135 (-11)	+0,1116 (-9)	+0,1441 (-8)	+0,1403 (-7)	+0,1078 (-6)
27	+0,2893 (-13)	+0,9289 (-12)	+0,1913 (-10)	+0,2762 (-9)	+0,2981 (-8)	+0,2521 (-7)
28	+0,3673 (-14)	+0,1354 (-12)	+0,3154 (-11)	+0,5094 (-10)	+0,6092 (-9)	+0,5665 (-8)
29	+0,450 (-15)	+0,1903 (-13)	+0,5014 (-12)	+0,9050 (-11)	+0,1198 (-9)	+0,1225 (-8)
30	+0,53 (-16)	+0,2583 (-14)	+0,7692 (-13)	+0,1551 (-11)	+0,2274 (-10)	+0,2552 (-9)
31	+0,6 (-17)	+0,339 (-15)	+0,1140 (-13)	+0,2568 (-12)	+0,4165 (-11)	+0,5133 (-10)
32	+0,1 (-17)	+0,43 (-16)	+0,1636 (-14)	+0,4112 (-13)	+0,7375 (-12)	+0,9976 (-11)
33		+0,5 (-17)	+0,227 (-15)	+0,6376 (-14)	+0,1264 (-12)	+0,1876 (-11)
34		+0,1 (-17)	+0,31 (-16)	+0,958 (-15)	+0,2100 (-13)	+0,3417 (-12)
35			+0,4 (-17)	+0,140 (-15)	+0,3383 (-14)	+0,6035 (-13)
36				+0,20 (-16)	+0,529 (-15)	+0,1035 (-13)
37				+0,3 (-17)	+0,80 (-16)	+0,1723 (-14)
38					+0,12 (-16)	+0,279 (-15)
39					+0,2 (-17)	+0,44 (-16)
40						+0,7 (-17)
41						+0,1 (-17)

Продолжение табл. 46

ν	$J_\nu(13)$	$J_\nu(14)$	$J_\nu(15)$	$J_\nu(16)$	$J_\nu(17)$	$J_\nu(18)$
0	+ 0,2069	+ 0,1711	- 0,1422 (- 1)	- 0,1749	- 0,1699	- 0,1336 (- 1)
0,5	+ 0,9298 (- 1)	+ 0,2112	+ 0,1340	- 0,5743 (- 1)	- 0,1860	- 0,1412
1,0	- 0,7032 (- 1)	+ 0,1334	+ 0,2051	+ 0,9040 (- 1)	- 0,9767 (- 1)	- 0,1570
1,5	- 0,1937	- 0,1407 (- 1)	+ 0,1654	+ 0,1874	+ 0,4230 (- 1)	- 0,1420
2,0	- 0,2177	- 0,1520	+ 0,4157 (- 1)	+ 0,1862	+ 0,1584	+ 0,7533 (- 2)
2,5	- 0,1377	- 0,2143	- 0,1009	+ 0,9257 (- 1)	+ 0,1935	+ 0,1192
3,0	+ 0,3320 (- 2)	- 0,1768	- 0,1940	- 0,4385 (- 1)	+ 0,1349	+ 0,1863
3,5	+ 0,1407	- 0,6245 (- 1)	- 0,1991	- 0,1585	+ 0,1461 (- 1)	+ 0,1651
4,0	+ 0,2193	+ 0,7624 (- 1)	- 0,1192	- 0,2026	- 0,1107	- 0,6464 (- 1)
4,5	+ 0,2134	+ 0,1830	+ 0,7984 (- 2)	- 0,1619	- 0,1875	- 0,5500 (- 1)
5,0	+ 0,1316	+ 0,2204	+ 0,1305	- 0,5747 (- 1)	- 0,1870	- 0,1554
5,5	+ 0,7055 (- 2)	+ 0,1801	+ 0,2039	+ 0,6743 (- 1)	- 0,1139	- 0,1926
6,0	- 0,1180	+ 0,8117 (- 1)	+ 0,2061	+ 0,1667	+ 0,7153 (- 3)	- 0,1560
6,5	- 0,2075	- 0,4151 (- 1)	+ 0,1415	+ 0,2083	+ 0,1138	- 0,6273 (- 1)
7,0	- 0,2406	- 0,1508	+ 0,3446 (- 1)	+ 0,1825	+ 0,1875	+ 0,5140 (- 1)
7,5	- 0,2145	- 0,2187	- 0,8121 (- 1)	+ 0,1018	+ 0,2009	+ 0,1473
8,0	- 0,1410	- 0,2320	- 0,1740	- 0,7021 (- 2)	+ 0,1537	+ 0,1959
8,5	- 0,4006 (- 1)	- 0,1928	- 0,2227	- 0,1128	+ 0,6346 (- 1)	+ 0,1855
9,0	+ 0,6698 (- 1)	- 0,1143	- 0,2200	- 0,1895	- 0,4286 (- 1)	+ 0,1228
9,5	+ 0,1621	- 0,1541 (- 1)	- 0,1712	- 0,2217	- 0,1374	+ 0,2786 (- 1)
10,0	+ 0,2338	+ 0,8501 (- 1)	- 0,9007 (- 1)	- 0,2062	- 0,1991	- 0,7317 (- 1)
10,5	+ 0,2770	+ 0,1718	+ 0,5862 (- 2)	- 0,1504	- 0,2171	- 0,1561
11,0	+ 0,2927	+ 0,2357	+ 0,9995 (- 1)	- 0,6822 (- 1)	- 0,1914	- 0,2041
11,5	+ 0,2854	+ 0,2732	+ 0,1794	+ 0,2427 (- 1)	- 0,1307	- 0,2100
12,0	+ 0,2615	+ 0,2855	+ 0,2367	+ 0,1124	- 0,4857 (- 1)	- 0,1762
12,5	+ 0,2279	+ 0,2770	+ 0,2692	+ 0,1853	+ 0,4024 (- 1)	- 0,1122
13,0	+ 0,1901	+ 0,2536	+ 0,2787	+ 0,2368	+ 0,1228	- 0,3092 (- 1)
13,5	+ 0,1528	+ 0,2214	+ 0,2693	+ 0,2653	+ 0,1899	+ 0,5414 (- 1)
14,0	+ 0,1188	+ 0,1855	+ 0,2464	+ 0,2724	+ 0,2364	+ 0,1316
14,5	+ 0,8953 (- 1)	+ 0,1500	+ 0,2155	+ 0,2623	+ 0,2613	+ 0,1934
15,0	+ 0,6564 (- 1)	+ 0,1174	+ 0,1813	+ 0,2399	+ 0,2646	+ 0,2356
15,5	+ 0,4691 (- 1)	+ 0,8931 (- 1)	+ 0,1474	+ 0,2102	+ 0,2559	+ 0,2575
16,0	+ 0,3272 (- 1)	+ 0,6613 (- 1)	+ 0,1162	+ 0,1775	+ 0,2340	+ 0,2611
16,5	+ 0,2232 (- 1)	+ 0,4777 (- 1)	+ 0,8905 (- 1)	+ 0,1450	+ 0,2054	+ 0,2500
17,0	+ 0,1491 (- 1)	+ 0,3372 (- 1)	+ 0,6653 (- 1)	+ 0,1150	+ 0,1739	+ 0,2286
17,5	+ 0,9760 (- 2)	+ 0,2330 (- 1)	+ 0,4853 (- 1)	+ 0,8876 (- 1)	+ 0,1427	+ 0,2009
18,0	+ 0,6269 (- 2)	+ 0,1577 (- 1)	+ 0,3463 (- 1)	+ 0,6685 (- 1)	+ 0,1138	+ 0,1706
18,5	+ 0,3955 (- 2)	+ 0,1047 (- 1)	+ 0,2419 (- 1)	+ 0,4920 (- 1)	+ 0,8844 (- 1)	+ 0,1406
19,0	+ 0,2452 (- 2)	+ 0,6824 (- 2)	+ 0,1657 (- 1)	+ 0,3544 (- 1)	+ 0,6710 (- 1)	+ 0,1127
20	+ 0,8971 (- 3)	+ 0,2753 (- 2)	+ 0,7360 (- 2)	+ 0,1733 (- 1)	+ 0,3619 (- 1)	+ 0,6731 (- 1)
21	+ 0,3087 (- 3)	+ 0,1041 (- 2)	+ 0,3054 (- 2)	+ 0,7879 (- 2)	+ 0,1804 (- 1)	+ 0,3686 (- 1)
22	+ 0,1004 (- 3)	+ 0,3711 (- 3)	+ 0,1190 (- 2)	+ 0,3354 (- 2)	+ 0,8380 (- 2)	+ 0,1871 (- 1)
23	+ 0,3092 (- 4)	+ 0,1251 (- 3)	+ 0,4379 (- 3)	+ 0,1343 (- 2)	+ 0,3651 (- 2)	+ 0,8864 (- 2)
24	+ 0,9060 (- 5)	+ 0,4006 (- 4)	+ 0,1527 (- 3)	+ 0,5087 (- 3)	+ 0,1500 (- 2)	+ 0,3946 (- 2)
25	+ 0,2532 (- 5)	+ 0,1221 (- 4)	+ 0,5060 (- 4)	+ 0,1828 (- 3)	+ 0,5831 (- 3)	+ 0,1658 (- 2)
26	+ 0,6761 (- 6)	+ 0,3555 (- 5)	+ 0,1599 (- 4)	+ 0,6253 (- 4)	+ 0,2154 (- 3)	+ 0,6607 (- 3)
27	+ 0,1730 (- 6)	+ 0,9902 (- 6)	+ 0,4829 (- 5)	+ 0,2042 (- 4)	+ 0,7586 (- 4)	+ 0,2504 (- 3)
28	+ 0,4249 (- 7)	+ 0,2645 (- 6)	+ 0,1398 (- 5)	+ 0,6380 (- 5)	+ 0,2553 (- 4)	+ 0,9057 (- 4)
29	+ 0,1004 (- 7)	+ 0,6790 (- 7)	+ 0,3883 (- 6)	+ 0,1912 (- 5)	+ 0,8228 (- 5)	+ 0,3133 (- 4)
30	+ 0,2283 (- 8)	+ 0,1678 (- 7)	+ 0,1037 (- 6)	+ 0,5505 (- 6)	+ 0,2546 (- 5)	+ 0,1039 (- 4)
31	+ 0,5009 (- 9)	+ 0,3995 (- 8)	+ 0,2670 (- 7)	+ 0,1526 (- 6)	+ 0,7577 (- 6)	+ 0,3313 (- 5)
32	+ 0,1062 (- 9)	+ 0,9187 (- 9)	+ 0,6632 (- 8)	+ 0,4078 (- 7)	+ 0,2172 (- 6)	+ 0,1016 (- 5)
33	+ 0,2176 (- 10)	+ 0,2042 (- 9)	+ 0,1591 (- 8)	+ 0,1052 (- 7)	+ 0,6009 (- 7)	+ 0,3005 (- 6)
34	+ 0,4320 (- 11)	+ 0,4392 (- 10)	+ 0,3693 (- 9)	+ 0,2625 (- 8)	+ 0,1606 (- 7)	+ 0,8583 (- 7)
35	+ 0,8310 (- 12)	+ 0,9155 (- 11)	+ 0,8301 (- 10)	+ 0,6339 (- 9)	+ 0,4153 (- 8)	+ 0,2370 (- 7)
36	+ 0,1551 (- 12)	+ 0,1851 (- 11)	+ 0,1809 (- 10)	+ 0,1484 (- 9)	+ 0,1040 (- 8)	+ 0,6335 (- 8)
37	+ 0,2812 (- 13)	+ 0,3632 (- 12)	+ 0,3827 (- 11)	+ 0,3368 (- 10)	+ 0,2526 (- 9)	+ 0,1641 (- 8)
38	+ 0,4956 (- 14)	+ 0,6928 (- 13)	+ 0,7863 (- 12)	+ 0,7426 (- 11)	+ 0,5956 (- 10)	+ 0,4126 (- 9)
39	+ 0,850 (- 15)	+ 0,1285 (- 13)	+ 0,1571 (- 12)	+ 0,1591 (- 11)	+ 0,1364 (- 10)	+ 0,1007 (- 9)

Продолжение табл. 46

ν	J_ν (13)	J_ν (14)	J_ν (15)	J_ν (16)	J_ν (17)	J_ν (18)
40	+ 0,142 (-15)	+ 0,2320 (-14)	+ 0,3054 (-13)	+ 0,3317 (-12)	+ 0,3039 (-11)	+ 0,2391 (-10)
41	+ 0,23 (-16)	+ 0,408 (-15)	+ 0,5781 (-14)	+ 0,6733 (-13)	+ 0,6590 (-12)	+ 0,5520 (-11)
42	+ 0,4 (-17)	+ 0,70 (-16)	+ 0,1067 (-14)	+ 0,1331 (-13)	+ 0,1392 (-12)	+ 0,1241 (-11)
43	+ 0,1 (-17)	+ 0,12 (-16)	+ 0,192 (-15)	+ 0,2567 (-14)	+ 0,2865 (-13)	+ 0,2719 (-12)
44		+ 0,2 (-17)	+ 0,34 (-16)	+ 0,483 (-15)	+ 0,5752 (-14)	+ 0,5810 (-13)
45			+ 0,6 (-17)	+ 0,89 (-16)	+ 0,1127 (-14)	+ 0,1211 (-13)
46			+ 0,1 (-17)	+ 0,16 (-16)	+ 0,216 (-15)	+ 0,2466 (-14)
47				+ 0,3 (-17)	+ 0,40 (-16)	+ 0,490 (-15)
48					+ 0,7 (-17)	+ 0,95 (-16)
49					+ 0,1 (-17)	+ 0,18 (-16)
50						+ 0,3 (-17)

ν	J_ν (19)	J_ν (20)	J_ν (21)	J_ν (22)	J_ν (23)	J_ν (24)
0	+ 0,1466	+ 0,1670	+ 0,3658 (-1)	- 0,1207	- 0,1624	- 0,5623 (-1)
0,5	+ 0,2743 (-1)	+ 0,1629	+ 0,1457	- 0,1506 (-2)	- 0,1408	- 0,1475
1,0	- 0,1057	+ 0,6683 (-1)	+ 0,1711	+ 0,1172	- 0,3952 (-1)	- 0,1540
1,5	- 0,1795	- 0,6466 (-1)	+ 0,1023	+ 0,1700	+ 0,8253 (-1)	- 0,7523 (-1)
2,0	- 0,1578	- 0,1603	- 0,2028 (-1)	+ 0,1313	+ 0,1590	+ 0,4339 (-1)
2,5	- 0,5578 (-1)	- 0,1726	- 0,1311	+ 0,2469 (-1)	+ 0,1516	+ 0,1381
3,0	+ 0,7249 (-1)	- 0,9890 (-1)	- 0,1750	- 0,9330 (-1)	+ 0,6717 (-1)	+ 0,1613
3,5	+ 0,1649	+ 0,2152 (-1)	- 0,1335	- 0,1644	- 0,4958 (-1)	+ 0,1040
4,0	+ 0,1806	+ 0,1307	- 0,2971 (-1)	- 0,1568	- 0,1415	- 0,3076 (-2)
4,5	+ 0,1165	+ 0,1801	+ 0,8656 (-1)	- 0,7701 (-1)	- 0,1666	- 0,1078
5,0	+ 0,3572 (-2)	+ 0,1512	+ 0,1637	+ 0,3630 (-1)	- 0,1164	- 0,1623
5,5	- 0,1097	+ 0,5953 (-1)	+ 0,1706	+ 0,1329	- 0,1563 (-1)	- 0,1444
6,0	- 0,1788	- 0,5509 (-1)	+ 0,1076	+ 0,1733	+ 0,9086 (-1)	- 0,6455 (-1)
6,5	- 0,1800	- 0,1474	+ 0,2808 (-2)	+ 0,1435	+ 0,1592	+ 0,4157 (-1)
7,0	- 0,1165	- 0,1842	- 0,1022	+ 0,5820 (-1)	+ 0,1638	+ 0,1300
8	+ 0,9294 (-1)	- 0,7387 (-1)	- 0,1757	- 0,1362	+ 0,8829 (-2)	+ 0,1404
9	+ 0,1947	+ 0,1251	- 0,3175 (-1)	- 0,1573	- 0,1576	- 0,3643 (-1)
10	+ 0,9155 (-1)	+ 0,1865	+ 0,1485	+ 0,7547 (-2)	- 0,1322	- 0,1677
11	- 0,9837 (-1)	+ 0,6136 (-1)	+ 0,1732	+ 0,1641	+ 0,4268 (-1)	- 0,1033
12	- 0,2055	- 0,1190	+ 0,3293 (-1)	+ 0,1566	+ 0,1730	+ 0,7299 (-1)
13	- 0,1612	- 0,2041	- 0,1356	+ 0,6688 (-2)	+ 0,1379	+ 0,1763
14	- 0,1507 (-1)	- 0,1464	- 0,2008	- 0,1487	- 0,1718 (-1)	+ 0,1180
15	+ 0,1389	- 0,8121 (-3)	- 0,1321	- 0,1959	- 0,1588	- 0,3863 (-1)
16	+ 0,2345	+ 0,1452	+ 0,1202 (-1)	- 0,1185	- 0,1899	- 0,1663
17	+ 0,2559	+ 0,2331	+ 0,1505	+ 0,2358 (-1)	- 0,1055	- 0,1831
18	+ 0,2235	+ 0,2511	+ 0,2316	+ 0,1549	+ 0,3402 (-1)	- 0,9311 (-1)
19	+ 0,1676	+ 0,2189	+ 0,2465	+ 0,2299	+ 0,1587	+ 0,4345 (-1)
20	+ 0,1116	+ 0,1647	+ 0,2145	+ 0,2422	+ 0,2282	+ 0,1619
21	+ 0,6746 (-1)	+ 0,1106	+ 0,1621	+ 0,2105	+ 0,2381	+ 0,2264
22	+ 0,3748 (-1)	+ 0,6758 (-1)	+ 0,1097	+ 0,1596	+ 0,2067	+ 0,2343
23	+ 0,1934 (-1)	+ 0,3805 (-1)	+ 0,6767 (-1)	+ 0,1087	+ 0,1573	+ 0,2031
24	+ 0,9331 (-2)	+ 0,1993 (-1)	+ 0,3857 (-1)	+ 0,6773 (-1)	+ 0,1078	+ 0,1550
25	+ 0,4237 (-2)	+ 0,9781 (-2)	+ 0,2049 (-1)	+ 0,3905 (-1)	+ 0,6777 (-1)	+ 0,1070
26	+ 0,1819 (-2)	+ 0,4524 (-2)	+ 0,1022 (-1)	+ 0,2102 (-1)	+ 0,3949 (-1)	+ 0,6778 (-1)
27	+ 0,7412 (-3)	+ 0,1981 (-2)	+ 0,4806 (-2)	+ 0,1064 (-1)	+ 0,2152 (-1)	+ 0,3990 (-1)
28	+ 0,2877 (-3)	+ 0,8242 (-3)	+ 0,2143 (-2)	+ 0,5084 (-2)	+ 0,1104 (-1)	+ 0,2200 (-1)
29	+ 0,1066 (-3)	+ 0,3270 (-3)	+ 0,9094 (-3)	+ 0,2307 (-2)	+ 0,5357 (-2)	+ 0,1143 (-1)
30	+ 0,3785 (-4)	+ 0,1240 (-3)	+ 0,3682 (-3)	+ 0,9965 (-3)	+ 0,2470 (-2)	+ 0,5626 (-2)
31	+ 0,1289 (-4)	+ 0,4508 (-4)	+ 0,1427 (-3)	+ 0,4113 (-3)	+ 0,1085 (-2)	+ 0,2633 (-2)
32	+ 0,4223 (-5)	+ 0,1574 (-4)	+ 0,5304 (-4)	+ 0,1626 (-3)	+ 0,4561 (-3)	+ 0,1176 (-2)
33	+ 0,1333 (-5)	+ 0,5289 (-5)	+ 0,1895 (-4)	+ 0,6171 (-4)	+ 0,1837 (-3)	+ 0,5024 (-3)
34	+ 0,4057 (-6)	+ 0,1713 (-5)	+ 0,6521 (-5)	+ 0,2253 (-4)	+ 0,7110 (-4)	+ 0,2060 (-3)
35	+ 0,1193 (-6)	+ 0,5358 (-6)	+ 0,2164 (-5)	+ 0,7927 (-5)	+ 0,2649 (-4)	+ 0,8119 (-4)
36	+ 0,3396 (-7)	+ 0,1620 (-6)	+ 0,6941 (-6)	+ 0,2692 (-5)	+ 0,9516 (-5)	+ 0,3083 (-4)
37	+ 0,9362 (-8)	+ 0,4742 (-7)	+ 0,2153 (-6)	+ 0,8839 (-6)	+ 0,3302 (-5)	+ 0,1130 (-4)
38	+ 0,2503 (-8)	+ 0,1345 (-7)	+ 0,6471 (-7)	+ 0,2809 (-6)	+ 0,1108 (-5)	+ 0,4000 (-5)
39	+ 0,6496 (-9)	+ 0,3704 (-8)	+ 0,1886 (-7)	+ 0,8652 (-7)	+ 0,3603 (-6)	+ 0,1371 (-5)
40	+ 0,1638 (-9)	+ 0,9902 (-9)	+ 0,5336 (-8)	+ 0,2586 (-7)	+ 0,1136 (-6)	+ 0,4553 (-6)
41	+ 0,4018 (-10)	+ 0,2574 (-9)	+ 0,1467 (-8)	+ 0,7506 (-8)	+ 0,3476 (-7)	+ 0,1467 (-6)
42	+ 0,9594 (-11)	+ 0,6510 (-10)	+ 0,3922 (-9)	+ 0,2118 (-8)	+ 0,1034 (-7)	+ 0,4590 (-7)
43	+ 0,2231 (-11)	+ 0,1604 (-10)	+ 0,1021 (-9)	+ 0,5816 (-9)	+ 0,2989 (-8)	+ 0,1396 (-7)
44	+ 0,5059 (-12)	+ 0,3849 (-11)	+ 0,2589 (-10)	+ 0,1555 (-9)	+ 0,8417 (-9)	+ 0,4133 (-8)

Продолжение табл. 46

ν	J_ν (19)	J_ν (20)	J_ν (21)	J_ν (22)	J_ν (23)	J_ν (24)
45	+ 0,1119 (— 12)	+ 0,9011 (— 12)	+ 0,6402 (— 11)	+ 0,4054 (— 10)	+ 0,2309 (— 9)	+ 0,1191 (— 8)
46	+ 0,2416 (— 13)	+ 0,2059 (— 12)	+ 0,1544 (— 11)	+ 0,1031 (— 10)	+ 0,6175 (— 10)	+ 0,3347 (— 9)
47	+ 0,5096 (— 14)	+ 0,4594 (— 13)	+ 0,3637 (— 12)	+ 0,2557 (— 11)	+ 0,1611 (— 10)	+ 0,9172 (— 10)
48	+ 0,1051 (— 14)	+ 0,1002 (— 13)	+ 0,8368 (— 13)	+ 0,6196 (— 12)	+ 0,4105 (— 11)	+ 0,2453 (— 10)
49	+ 0,212 (— 15)	+ 0,2135 (— 14)	+ 0,1882 (— 13)	+ 0,1467 (— 12)	+ 0,1022 (— 11)	+ 0,6409 (— 11)
50	+ 0,42 (— 16)	+ 0,445 (— 15)	+ 0,4139 (— 14)	+ 0,3397 (— 13)	+ 0,2486 (— 12)	+ 0,1636 (— 11)
51	+ 0,8 (— 17)	+ 0,91 (— 16)	+ 0,891 (— 15)	+ 0,7696 (— 14)	+ 0,5917 (— 13)	+ 0,4085 (— 12)
52	+ 0,2 (— 17)	+ 0,18 (— 16)	+ 0,188 (— 15)	+ 0,1706 (— 14)	+ 0,1378 (— 13)	+ 0,9976 (— 13)
53		+ 0,4 (— 17)	+ 0,39 (— 16)	+ 0,370 (— 15)	+ 0,3142 (— 14)	+ 0,2385 (— 13)
54		+ 0,1 (— 17)	+ 0,8 (— 17)	+ 0,79 (— 16)	+ 0,702 (— 15)	+ 0,5585 (— 14)
55			+ 0,2 (— 17)	+ 0,16 (— 16)	+ 0,154 (— 15)	+ 0,1281 (— 14)
56				+ 0,3 (— 17)	+ 0,34 (— 16)	+ 0,288 (— 15)
57				+ 0,1 (— 17)	+ 0,7 (— 17)	+ 0,64 (— 16)
58					+ 0,1 (— 17)	+ 0,14 (— 16)
59						+ 0,3 (— 17)
60						+ 0,1 (— 17)

ν	J_ν (25)	J_ν (26)	J_ν (27)	J_ν (28)	J_ν (29)
0	+ 0,0963	+ 0,1560	+ 0,0727	— 0,0732	— 0,1478
1	— 0,1254	+ 0,0150	+ 0,1366	+ 0,1306	+ 0,0069
2	— 0,1063	— 0,1548	— 0,0626	+ 0,0825	+ 0,1483
3	+ 0,1083	— 0,0389	— 0,1459	— 0,1188	+ 0,0135
4	+ 0,1323	+ 0,1459	+ 0,0302	— 0,1079	— 0,1455
5	— 0,0660	+ 0,0838	+ 0,1548	+ 0,0879	— 0,0537
6	— 0,1587	— 0,1137	+ 0,0271	+ 0,1393	+ 0,1270
7	— 0,0102	— 0,1362	— 0,1428	— 0,0282	+ 0,1062
8	+ 0,1530	+ 0,0403	— 0,1012	— 0,1534	— 0,0757
9	+ 0,1081	+ 0,1610	+ 0,0828	— 0,0595	— 0,1480
10	— 0,0752	+ 0,0712	+ 0,1564	+ 0,1152	— 0,0161
11	— 0,1682	— 0,1063	+ 0,0330	+ 0,1418	+ 0,1369
12	— 0,0729	— 0,1611	— 0,1295	— 0,0038	+ 0,1200
13	+ 0,0983	— 0,0424	— 0,1481	— 0,1450	— 0,0376
14	+ 0,1751	+ 0,1187	— 0,0131	— 0,1309	— 0,1537
15	+ 0,0978	+ 0,1702	+ 0,1345	+ 0,0142	— 0,1108
16	— 0,0577	+ 0,0777	+ 0,1625	+ 0,1461	+ 0,0391
17	— 0,1717	— 0,0745	+ 0,0582	+ 0,1527	+ 0,1539
18	— 0,1758	— 0,1752	— 0,0893	+ 0,0394	+ 0,1414
19	— 0,0814	— 0,1681	— 0,1772	— 0,1021	+ 0,0216
20	+ 0,0520	— 0,0704	— 0,1601	— 0,1779	— 0,1131
21	+ 0,1646	+ 0,0597	— 0,0600	— 0,1521	— 0,1776
22	+ 0,2246	+ 0,1669	+ 0,0668	— 0,0502	— 0,1441
23	+ 0,2306	+ 0,2227	+ 0,1688	+ 0,0732	— 0,0410
24	+ 0,1998	+ 0,2271	+ 0,2209	+ 0,1704	+ 0,0790
25	+ 0,1529	+ 0,1966	+ 0,2238	+ 0,2190	+ 0,1718
26	+ 0,1061	+ 0,1510	+ 0,1936	+ 0,2207	+ 0,2172
27	+ 0,6778 (— 1)	+ 0,1053	+ 0,1491	+ 0,1908	+ 0,2176
28	+ 0,4028 (— 1)	+ 0,6776 (— 1)	+ 0,1045	+ 0,1473	+ 0,1881
29	+ 0,2245 (— 1)	+ 0,4063 (— 1)	+ 0,6773 (— 1)	+ 0,1038	+ 0,1456
30	+ 0,1181 (— 1)	+ 0,2288 (— 1)	+ 0,4096 (— 1)	+ 0,6769 (— 1)	+ 0,1030
31	+ 0,5889 (— 2)	+ 0,1217 (— 1)	+ 0,2329 (— 1)	+ 0,4126 (— 1)	+ 0,6763 (— 1)
32	+ 0,2795 (— 2)	+ 0,6147 (— 2)	+ 0,1253 (— 1)	+ 0,2368 (— 1)	+ 0,4155 (— 1)
33	+ 0,1267 (— 2)	+ 0,2957 (— 2)	+ 0,6400 (— 2)	+ 0,1287 (— 1)	+ 0,2405 (— 1)
34	+ 0,550 (— 3)	+ 0,1360 (— 2)	+ 0,3118 (— 2)	+ 0,6648 (— 2)	+ 0,1320 (— 1)
35	+ 0,229 (— 3)	+ 0,599 (— 3)	+ 0,1453 (— 2)	+ 0,3278 (— 2)	+ 0,6891 (— 2)
36	+ 0,92 (— 4)	+ 0,254 (— 3)	+ 0,650 (— 3)	+ 0,1548 (— 2)	+ 0,3437 (— 2)
37	+ 0,36 (— 4)	+ 0,103 (— 3)	+ 0,279 (— 3)	+ 0,701 (— 3)	+ 0,1642 (— 2)
38	+ 0,13 (— 4)	+ 0,41 (— 4)	+ 0,116 (— 3)	+ 0,306 (— 3)	+ 0,754 (— 3)
39	+ 0,5 (— 5)	+ 0,15 (— 4)	+ 0,46 (— 4)	+ 0,128 (— 3)	+ 0,333 (— 3)
40	+ 0,2 (— 5)	+ 0,6 (— 5)	+ 0,18 (— 4)	+ 0,52 (— 4)	+ 0,142 (— 3)
41	+ 0,1 (— 5)	+ 0,2 (— 5)	+ 0,7 (— 5)	+ 0,20 (— 4)	+ 0,58 (— 4)
42		+ 0,1 (— 5)	+ 0,2 (— 5)	+ 0,8 (— 5)	+ 0,23 (— 4)
43			+ 0,1 (— 5)	+ 0,3 (— 5)	+ 0,9 (— 5)
44				+ 0,1 (— 5)	+ 0,3 (— 5)

Т а б л и ц а 47. Функции Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$

x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$
0 00	— ∞	— ∞	1,00	+ 0,0883	— 0,7812	2 00	+ 0,5104	— 0,1070
02	2,564	31,860	02	1037 + 77	7640 + 86	02	5124 + 10	0958 + 56
04	2 122	15,964	04	1188 75 5	7471 84 5	04	5142 9	0846 56
06	1,863	10,676	06	1336 74	7305 83	06	5158 8	0736 55
08	1,678	8,038	08	1480 72	7142 81 5	08	5172 7	0626 55
0 10	— 1,534 + 59	— 6,459	1,10	1622 + 69	6981 + 70	2 10	5183 + 4 5	0517 + 54
12	1,416 50	5,409	12	1760 67 5	6823 78	12	5192 3 5	0409 54
14	1,316 44	4,662	14	1895 65 5	6667 77	14	5199 2 5	0301 53
16	1,228 38 5	4,103	16	2026 64 5	6513 76	16	5204 1 5	0195 52 5
18	1,151 35	3,670	18	2155 63	6361 75	18	5207 + 0 5	0090 52 5
0 20	— 1,081 + 31 5	— 3,324	1 20	2281 + 61 5	6211 + 74	2 20	5208 — 0 5	*0015 + 51 5
22	1,018 29,5	3,042	22	2404 59 5	6063 73 5	22	5207 2	0118 51 5
24	0,959 27	2,807	24	2523 58 5	5916 72 5	24	5203 2 5	0221 51
26	0,905 25	2,609	26	2640 57	5771 71 5	26	5198 4	0323 50
28	0,855 24	2,440	28	2754 55 5	5628 71 5	28	5190 4 5	0423 50
0,30	— 0,807 + 22	— 2,293 + 64	1,30	2865 + 54 5	5485 + 70 5	2 30	5181 — 6	0523 + 49
32	0,763 21	2,165 56 5	32	2974 52 5	5344 70	32	5169 6 5	0621 49
34	0,721 20	2,052 50	34	3079 51 5	5204 69	34	5156 7 5	0719 48
36	0,681 19,5	1,952 45	36	3182 50	5066 69	36	5141 9	0815 48
38	0,642 18	1,862 40 5	38	3282 48 5	4928 68 5	38	5123 9 5	0911 47
0,40	— 0,6060 + 174	— 1,781 + 36 5	1,40	3379 + 47	4791 + 67,5	2 40	5104 — 10 5	1005 + 46 5
42	0,5712 167 5	1,708 33 5	42	3473 46	4656 67 5	42	5083 11 5	1098 46
44	0,5377 161	1,641 30 5	44	3565 44 5	4521 66 5	44	5060 12	1190 45 5
46	0,5055 155	1,580 28 5	46	3654 43 5	4388 66 5	46	5036 13 5	1281 45
48	0,4745 150	1,523 26	48	3741 41 5	4255 66	48	5009 14	1371 44
0,50	— 0,4445 + 144 5	— 1,471 + 24	1 50	3824 + 41	4123 + 65 5	2 50	4981 — 15	1459 + 44
52	0,4156 140	1,423 22 5	52	3906 39	3992 65	52	4951 16	1547 43
54	0,3876 136	1,378 20 5	54	3984 38	3862 65	54	4919 17	1633 42,5
56	0,3604 131 5	1,337 20	56	4060 36 5	3732 64	56	4885 17 5	1718 41 5
58	0,3341 128	1,297 18 5	58	4133 35 5	3604 64	58	4850 18 5	1801 41 5
0,60	— 0,3085 + 124	— 1,260 + 17	1,60	4204 + 34 5	3476 + 63 5	2 60	4813 — 19	1884 + 40 5
62	0,2837 121	1,226 16 5	62	4273 32 5	3349 63 5	62	4775 20	1965 40
64	0,2595 118	1,193 16	64	4338 31 5	3222 63	64	4735 21	2045 39
66	0,2359 114,5	1,161 14 5	66	4401 30 5	3096 62	66	4693 21 5	2123 38 5
68	0,2130 111,5	1,132 14 5	68	4462 29	2972 62 5	68	4650 22 5	2200 38
0,70	— 0,1907 + 109	— 1,1032 + 135 5	1,70	4520 + 28	2847 + 61 5	2 70	4605 — 23	2276 + 37 5
72	0,1689 106 5	1,0761 129,5	72	4576 26 5	2724 61 5	72	4559 24	2351 36 5
74	0,1476 103,5	1,0502 124 5	74	4629 25 5	2601 61	74	4511 24,5	2424 36
76	0,1269 101,5	1,0253 120	76	4680 24	2479 61	76	4462 25,5	2496 35
78	0,1066 99	1,0013 116	78	4728 23	2357 60	78	4411 26	2566 34 5
0,80	— 0,0868 + 96 5	— 0,9781 + 111 5	1 80	4774 + 22	2237 + 60	2 80	4359 — 26 5	2635 + 34
82	0,0675 94 5	0,9558 108	82	4818 20 5	2117 60	82	4306 27 5	2703 33
84	0,0486 92,5	0,9342 105	84	4859 19 5	1997 59	84	4251 28	2769 32 5
86	0,0301 90,5	0,9132 101 5	86	4898 18	1879 59	86	4195 28 5	2834 31 5
88	— 0,0120 88	0,8929 99	88	4934 17	1761 58 5	88	4138 29 5	2897 31
0 90	+ 0,0056 + 86,5	— 0,8731 + 96	1,90	4968 + 16	1644 + 58	2,90	4079 — 30	2959 + 30 5
92	0,0229 84,5	0,8539 94	92	5000 14 5	1528 58	92	4019 30 5	3020 29 5
94	0,0398 82,5	0,8351 92	94	5029 13 5	1412 57 5	94	3958 31	3079 28 5
96	0,0563 81	0,8167 89,5	96	5056 12 5	1297 56 5	96	3896 31,5	3136 28
98	0,0725 79	0,7988 88	98	5081 11 5	1184 57	98	3833 32	3192 27 5
1,00	+ 0,0883	— 0,7812	2 00	5104	1070	3,00	3769	3247
				+ 0,	— 0,		+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$
3,00	+ 0,	+ 0,	4,00	- 0,	+ 0,	5,00	- 0,	+ 0,
02	3769 — 33	3247 + 26,5	02	0169 — 40	3979 — 12	02	3085 — 14,5	1479 — 34
04	3703 33	3300 25,5	04	0249 39,5	3955 12,5	04	3114 14	1411 34
06	3637 34	3351 25	06	0328 39	3930 13,5	06	3142 13	1343 34
08	3569 34,5	3401 24	08	0406 39	3903 14	08	3168 12,5	1275 34,5
3,10	3500 34,5	3449 23,5	3,10	0484 38,5	3875 14,5	3,10	3193 12,5	1206 34,5
12	3431 — 35	3496 + 23	4,10	0561 — 38,5	3846 — 15,5	4,10	3216 — 11	1137 — 34
14	3361 36	3542 21,5	12	0638 38	3815 16	12	3238 10,5	1069 34,5
16	3289 36	3585 21	14	0714 37,5	3783 16,5	14	3259 9,5	1000 35
18	3217 36,5	3627 20,5	16	0789 37,5	3750 17	16	3278 9	0930 34,5
3,20	3144 36,5	3668 19,5	18	0864 37	3716 18	18	3296 8,5	0861 34,5
22	3071 — 37,5	3707 + 19	4,20	0938 — 36,5	3680 — 18,5	4,20	3313 — 7,5	0792 — 34,5
24	2996 37,5	3745 17,5	22	1011 36	3643 19	22	3328 6,5	0723 35
26	2921 38	3780 17,5	24	1083 36	3605 19,5	24	3341 6,5	0653 34,5
28	2845 38,5	3815 16	26	1155 35,5	3566 20,5	26	3354 5,5	0584 34,5
3,30	2768 38,5	3847 16	28	1226 35	3525 20,5	28	3365 4,5	0515 35
32	2691 — 39	3879 + 14,5	4,30	1296 — 34,5	3484 — 21,5	4,30	3374 — 4,5	0445 — 34,5
34	2613 39	3908 14	32	1365 34,5	3441 22	32	3383 3	0376 34,5
36	2535 39,5	3936 13	34	1434 33,5	3397 22	34	3389 3	0307 34,5
38	2456 40	3962 12,5	36	1501 33,5	3353 23	36	3395 2	0238 34
3,40	2376 40	3987 11,5	38	1568 32,5	3307 23,5	38	3399 1,5	0170 34,5
42	2296 — 40	4010 + 11	4,40	1633 — 32,5	3260 — 24	4,40	3402 — 0,5	0101 — 34,5
44	2216 40,5	4032 10	42	1698 32	3212 24,5	42	3403 0	0033 34
46	2135 40,5	4052 9	44	1762 31,5	3163 25	44	3403 + 0,5	*0035 34,5
48	2054 41	4070 8,5	46	1825 30,5	3113 25,5	46	3402 1,5	0103 33,5
3,50	1972 41	4087 7,5	48	1886 30,5	3062 26	48	3399 2	0170 34
52	1890 — 41	4102 + 6,5	4,50	1947 — 30	3010 — 26,5	4,50	3395 + 3	0238 — 33
54	1808 41	4115 6	52	2007 29	2957 26,5	52	3389 3	0304 33,5
56	1726 41,5	4127 5,5	54	2065 29	2904 27,5	54	3383 4	0371 33
58	1643 41,5	4138 4,5	56	2123 28	2849 27,5	56	3375 5	0437 33
3,60	1560 41,5	4147 3,5	58	2179 28	2794 28,5	58	3365 5,5	0503 32,5
62	1477 — 41,5	4154 + 3	4,60	2235 — 27	2737 — 28,5	4,60	3354 + 6	0568 — 32,5
64	1394 41,5	4160 2	62	2289 26,5	2680 28,5	62	3342 6,5	0633 32
66	1311 42	4164 1	64	2342 26	2623 29,5	64	3329 7	0697 32
68	1227 41,5	4166 + 0,5	66	2394 25	2564 29,5	66	3315 8	0761 31,5
3,70	1144 41,5	4167 0	68	2444 25	2505 30	68	3299 8,5	0824 31,5
72	1061 — 42	4167 — 1	4,70	2494 — 24	2445 — 30,5	4,70	3282 + 9,5	0887 — 31
74	0977 41,5	4165 2	72	2542 23,5	2384 30,5	72	3263 9,5	0949 31
76	0894 41,5	4161 2,5	74	2589 23	2323 31	74	3244 10,5	1011 30,5
78	0811 41,5	4156 3,5	76	2635 22,5	2261 31	76	3223 11	1072 30,5
3,80	0728 41,5	4149 4	78	2680 21,5	2199 31,5	78	3201 12	1133 29,5
82	0645 — 41,5	4141 — 4,5	4,80	2723 — 21	2136 — 32	4,80	3177 + 12	1192 — 29,5
84	0562 41	4132 6	82	2765 20,5	2072 32	82	3153 13	1251 29,5
86	0480 41,5	4120 6	84	2806 19,5	2008 32,5	84	3127 13	1310 29
88	0397 41	4108 7	86	2845 19,5	1943 32,5	86	3101 14	1368 28,5
3,90	0315 40,5	4094 8	88	2884 18,5	1878 33	88	3073 14,5	1425 28
92	0234 — 41	4078 — 8,5	4,90	2921 — 17,5	1812 — 33	4,90	3044 + 15,5	1481 — 27,5
94	0152 40,5	4061 9	92	2956 17	1746 33	92	3013 15,5	1536 27,5
96	0071 40	4043 10	94	2990 16,5	1680 33,5	94	2982 16	1591 27
98	*0009 40,5	4023 10,5	96	3023 16	1613 33,5	96	2950 17	1645 26,5
4,00	0090 39,5	4002 11,5	98	3055 15	1546 33,5	98	2916 17	1698 26
	0169 — 0,	3979 + 0,	5,00	3085 — 0,	1479 + 0,	6,00	2882 — 0,	1750 — 0,

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$
6,00	— 0,	— 0,	7,00	— 0,	— 0,	8,00	+ 0,	— 0,
02	2882 + 18	1750 — 25,5	02	0259 + 30	3027 + 2	02	2235 + 15,5	1581 + 24,5
04	2846 18	1801 25,5	04	0199 30	3023 3	04	2266 15	1532 25
06	2810 19	1852 25	06	0139 30,5	3017 3	06	2296 15	1482 25
08	2772 19	1902 24	08	0078 30	3011 4	08	2326 14	1432 25
10	2734 20	1950 24	10	0018 30	3003 4	10	2354 13,5	1382 25,5
12	2694 + 20	1998 — 23,5	12	*0042 + 30	2995 + 5	12	2381 + 13	1331 + 25,5
14	2654 20,5	2045 23	14	0102 29,5	2985 5,5	14	2407 12,5	1280 25,5
16	2613 21,5	2091 22,5	16	0161 30	2974 6	16	2432 12	1229 26
18	2570 21,5	2136 22	18	0221 29,5	2962 6,5	18	2456 11,5	1177 26
20	2527 22	2180 21,5	20	0280 29,5	2949 7,5	20	2479 11	1125 26,5
22	2483 + 22,5	2223 — 21	22	0339 + 29	2934 + 7,5	22	2501 + 10,5	1072 + 26
24	2438 22,5	2265 20,5	24	0397 29	2919 8,5	24	2522 10	1020 26,5
26	2393 23,5	2306 20	26	0455 29	2902 8,5	26	2542 9,5	0967 27
28	2346 23,5	2346 19,5	28	0513 29	2885 9,5	28	2561 8,5	0913 26,5
30	2299 24	2385 18,5	30	0571 28,5	2866 10	30	2578 8,5	0860 27
32	2251 + 24,5	2422 — 18,5	32	0628 + 28	2846 + 10,5	32	2595 + 8	0806 + 27
34	2202 25	2459 18	34	0684 28,5	2825 11	34	2611 7	0752 27
36	2152 25	2495 17,5	36	0741 28	2803 11,5	36	2625 7	0698 27
38	2102 25,5	2530 16,5	38	0797 27,5	2780 12	38	2639 6	0644 27,5
40	2051 26	2563 16,5	40	0852 27,5	2756 12,5	40	2651 5,5	0589 27
42	1999 + 26	2596 — 15,5	42	0907 + 27	2731 + 13	42	2662 + 5	0535 + 27,5
44	1947 26,5	2627 15	44	0961 27	2705 13,5	44	2672 4,5	0480 27
46	1894 26,5	2657 14,5	46	1015 26,5	2678 14	46	2681 4	0426 27,5
48	1841 27	2686 14	48	1068 26,5	2650 14,5	48	2689 3,5	0371 27,5
50	1787 27,5	2714 13,5	50	1121 26	2621 15	50	2696 3	0316 27
52	1732 + 27,5	2741 — 13	52	1173 + 26	2591 + 15,5	52	2702 + 2,5	0262 + 27,5
54	1677 27,5	2767 12	54	1225 25,5	2560 15,5	54	2707 1,5	0207 27,5
56	1622 28	2791 11,5	56	1276 25	2529 16,5	56	2710 1,5	0152 27
58	1566 28,5	2814 11	58	1326 24,5	2496 17	58	2713 0,5	0098 27,5
60	1509 28,5	2836 10,5	60	1375 24,5	2462 17	60	2714 + 0,5	0043 27
62	1452 + 28,5	2857 — 10	62	1424 + 24	2428 + 17,5	62	2715 — 0,5	*0011 + 27
64	1395 29	2877 9,5	64	1472 24	2393 18	64	2714 1	0065 27
66	1337 29	2896 8,5	66	1520 23,5	2357 18,5	66	2712 1,5	0119 27
68	1279 29	2913 8,5	68	1567 23,5	2320 19	68	2709 2	0173 27
70	1221 29,5	2930 7,5	70	1613 22,5	2282 19,5	70	2705 2,5	0227 26,5
72	1162 + 29,5	2945 — 6,5	72	1658 + 22	2243 + 19,5	72	2700 — 3	0280 + 26,5
74	1103 29,5	2958 6,5	74	1702 22	2204 20	74	2694 3,5	0333 26,5
76	1044 30	2971 6	76	1746 21,5	2164 20,5	76	2687 4,5	0386 26,5
78	0984 30	2983 5	78	1789 21	2123 21	78	2678 4,5	0439 26
80	0924 30	2993 4,5	80	1831 20,5	2081 21	80	2669 5	0491 26,5
82	0864 + 30	3002 — 4	82	1872 + 20,5	2039 + 21,5	82	2659 — 6	0544 + 25,5
84	0804 30	3010 3	84	1913 19,5	1996 22	84	2647 6	0595 26
86	0744 30	3016 3	86	1952 19,5	1952 22	86	2635 7	0647 25,5
88	0684 30,5	3022 2	88	1991 18,5	1908 22,5	88	2621 7	0698 25
90	0623 30	3026 1,5	90	2028 18,5	1863 23	90	2607 7,5	0748 25,5
92	0563 + 30,5	3029 — 1	92	2065 + 18	1817 + 23	92	2592 — 8,5	0799 + 25
94	0502 30,5	3031 — 0,5	94	2101 17,5	1771 23,5	94	2575 8,5	0849 24,5
96	0441 30	3032 + 0,5	96	2136 17	1724 23,5	96	2558 9,5	0898 24,5
98	0381 30,5	3031 0,5	98	2170 16,5	1677 24	98	2539 9,5	0947 24
1,00	0320 30,5	3030 1,5	1,00	2203 16	1629 24	1,00	2520 10,5	0995 24
2,00	0259 — 0,	3027 — 0,	2,00	2235 + 0,	1581 — 0,	2,00	2499 + 0,	1043 + 0,

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$
9.00	+ 0, 2499	+ 0, 1043	10.00	+ 0, 0557	+ 0, 2490	11.00	- 0, 1688	+ 0, 1637
02	- 10.5 2478	+ 24 1091	02	- 25 0507	+ 3 2496	02	- 16.5 1721	- 18.5 1600
04	11 2456	23 1137	04	25 0457	2 2500	04	15.5 1752	19 1562
06	11.5 2433	23.5 1184	06	25 0407	2 2504	06	15.5 1783	19 1524
08	12.5 2408	22.5 1229	08	25 0357	1.5 2507	08	15 1813	19 1486
	12.5	23		25	0.5		15	20
9.10	2383	1275	10.10	0307	2508	11.10	1843	1446
12	- 13 2357	+ 22 1319	12	- 25.5 0256	+ 0.5 2509	12	- 14 1871	- 19.5 1407
14	13 2331	22 1363	14	25 0206	0 2509	14	14 1899	20.5 1366
16	14 2303	21.5 1406	16	25 0156	- 1 2507	16	13.5 1926	20 1326
18	14.5 2274	21.5 1449	18	25 0106	1 2505	18	13 1952	20.5 1285
	14.5	21		25	1.5		12.5	21
9.20	2245	1491	10.20	0056	2502	11.20	1977	1243
22	- 15 2215	+ 20.5 1532	22	- 25 0006	- 2 2498	22	- 12.5 2002	- 21 1201
24	15.5 2184	20.5 1573	24	25 *0044	3 2492	24	11.5 2025	21 1159
26	16 2152	20 1613	26	25 0094	3 2486	26	11.5 2048	21.5 1116
28	16.5 2119	19.5 1652	28	24.5 0143	3.5 2479	28	11 2070	21.5 1073
	16.5	19.5		25	4		10.5	22
9.30	2086	1691	10.30	0193	2471	11.30	2091	1029
32	- 17 2052	+ 18.5 1728	32	- 24.5 0242	- 4.5 2462	32	- 10 2111	- 21.5 0986
34	17.5 2017	18.5 1765	34	24.5 0291	5.5 2451	34	9.5 2130	22.5 0941
36	18 1981	18 1801	36	24.5 0340	5.5 2440	36	9.5 2149	22 0897
38	18 1945	18 1837	38	24.5 0389	6 2428	38	8.5 2166	22.5 0852
	19	17		24	6		8.5	22.5
9.40	1907	1871	10.40	0437	2416	11.40	2183	0807
42	- 18.5 1870	+ 17 1905	42	- 24.5 0486	- 7 2402	42	- 8 2199	- 22.5 0762
44	19.5 1831	16.5 1938	44	24 0534	7.5 2387	44	7 2213	22.5 0717
46	19.5 1792	16 1970	46	23.5 0581	8 2371	46	7 2227	23 0671
48	20 1752	15.5 2001	48	23.5 0628	8 2355	48	6.5 2240	23 0625
	20	15.5		23.5	9		6	23
9.50	1712	2032	10.50	0675	2337	11.50	2252	0579
52	- 20.5 1671	+ 14.5 2061	52	- 23.5 0722	- 9 2319	52	- 5.5 2263	- 23 0533
54	20.5 1630	14.5 2090	54	23 0768	10 2299	54	5.5 2274	23 0487
56	21 1588	14 2118	56	23 0814	10 2279	56	4.5 2283	23 0441
58	21.5 1545	13.5 2145	58	22.5 0859	10.5 2258	58	4 2291	23.5 0394
	21.5	13		22.5	11		4	23
9.60	1502	2171	10.60	0904	2236	11.60	2299	0348
62	- 22 1458	+ 12.5 2196	62	- 22.5 0949	- 11 2214	62	- 3 2305	- 23.5 0301
64	22 1414	12 2220	64	22 0993	12 2190	64	3 2311	23.5 0254
66	22.5 1369	11.5 2243	66	21.5 1036	12 2166	66	2 2315	23 0208
68	22.5 1324	11 2265	68	21.5 1079	13 2140	68	2 2319	23.5 0161
	22.5	11		21.5	13		1.5	23.5
9.70	1279	2287	10.70	1122	2114	11.70	2322	0114
72	- 23 1233	+ 10 2307	72	- 21 1164	- 13 2088	72	- 1 2324	- 23 0068
74	23.5 1186	9.5 2326	74	20.5 1205	14 2060	74	- 0.5 2325	23.5 0021
76	23 1140	9.5 2345	76	20.5 1246	14 2032	76	+ 0.5 2324	23 *0025
78	23.5 1093	8.5 2362	78	20.5 1287	14.5 2003	78	0 2324	23.5 0072
	23.5	8.5		19.5	15		1	23
9.80	1045	2379	10.80	1326	1973	11.80	2322	0118
82	- 23.5 0998	+ 7.5 2394	82	- 20 1366	- 15.5 1942	82	+ 1.5 2319	- 23 0164
84	24.5 0949	7.5 2409	84	19 1404	15.5 1911	84	2 2315	23 0210
86	24 0901	7 2423	86	19 1442	16 1879	86	2.5 2310	23 0256
88	24 0853	6 2435	88	18.5 1479	16.5 1846	88	2.5 2305	23 0302
	24.5	6		18.5	16.5		3.5	22.5
9.90	0804	2447	10.90	1516	1813	11.90	2298	0347
92	- 24.5 0755	+ 5.5 2458	92	- 18 1552	- 17 1779	92	+ 3.5 2291	- 22.5 0392
94	25 0705	4.5 2467	94	17.5 1587	17 1745	94	4 2283	22.5 0437
96	24.5 0656	4.5 2476	96	17.5 1622	18 1709	96	5 2273	22.5 0482
98	25 0606	4 2484	98	16.5 1655	17.5 1674	98	5 2263	22.5 0527
	24.5	3		16.5	18.5		5.5	22
10.00	0557	2490	11.00	1688	1637	12.00	2252	0571
	+ 0,	+ 0,		- 0,	+ 0,		- 0,	- 0,

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$
12,00	- 0, 2252 + 5,5	- 0, 0571 - 22	13,00	- 0, 0782 + 21	- 0, 2101 - 6	14,00	+ 0, 1272 + 16,5	- 0, 1666 + 14
02	2241 6,5	0615 22	02	0740 21	2113 5,5	02	1305 16	1638 14
04	2228 7	0659 21,5	04	0698 21,5	2124 5	04	1337 16	1610 15
06	2214 7	0702 21,5	06	0655 21,5	2134 5	06	1369 16	1580 15
08	2200 8	0745 21	08	0612 21,5	2144 4	08	1401 15	1550 15
12,10	2184 + 8	0787 - 21,5	13,10	0569 + 21,5	2152 - 4	14,10	1431 + 15	1520 + 15,5
12	2168 8,5	0830 20,5	12	0526 21,5	2160 3,5	12	1461 15	1489 16
14	2151 9	0871 21	14	0483 22	2167 2,5	14	1491 14,5	1457 16
16	2133 9	0913 20,5	16	0439 21,5	2172 3	16	1520 14	1425 16,5
18	2115 10	0954 20	18	0396 22	2178 2	18	1548 13,5	1392 16,5
12,20	2095 + 10	0994 - 20	13,20	0352 + 21,5	2182 - 1,5	14,20	1575 + 13,5	1359 + 17
22	2075 10,5	1034 20	22	0309 22	2185 1	22	1602 13	1325 17
24	2054 11	1074 19,5	24	0265 22	2187 1	24	1628 13	1291 17
26	2032 11,5	1113 19	26	0221 22	2189 - 0,5	26	1654 12,5	1257 17,5
28	2009 11,5	1151 19	28	0177 21,5	2190 0	28	1679 12	1222 18
12,30	1986 + 12	1189 - 19	13,30	0134 + 22	2190 + 1	14,30	1703 + 11,5	1186 + 18
32	1962 12,5	1227 18,5	32	0090 22	2188 0,5	32	1726 11,5	1150 18
34	1937 13	1264 18	34	0046 22	2187 1,5	34	1749 11	1114 18,5
36	1911 13	1300 18	36	0002 21,5	2184 2	36	1771 10,5	1077 18,5
38	1885 13,5	1336 17,5	38	*0041 22	2180 2	38	1792 10	1040 18,5
12,40	1858 + 14	1371 - 17,5	13,40	0085 + 21,5	2176 + 3	14,40	1812 + 10	1003 + 19
42	1830 14	1406 17	42	0128 22	2170 3	42	1832 9,5	0965 19
44	1802 15	1440 17	44	0172 21,5	2164 3,5	44	1851 9	0927 19,5
46	1772 14,5	1474 16	46	0215 21,5	2157 4	46	1869 8,5	0888 19,5
48	1743 15,5	1506 16	48	0258 21,5	2149 4,5	48	1886 8,5	0849 19,5
12,50	1712 + 15,5	1538 - 16	13,50	0301 + 21	2140 + 4,5	14,50	1903 + 8	0810 + 19,5
52	1681 16	1570 15,5	52	0343 21,5	2131 5,5	52	1919 7,5	0771 19,5
54	1649 16	1601 15	54	0386 21	2120 5,5	54	1934 7	0732 20
56	1617 16,5	1631 14,5	56	0428 21	2109 6	56	1948 7	0692 20
58	1584 16,5	1660 14,5	58	0470 21	2097 6,5	58	1962 6	0652 20
12,60	1551 + 17	1689 - 14	13,60	0512 + 21	2084 + 7	14,60	1974 + 6	0612 + 20,5
62	1517 17,5	1717 13,5	62	0554 20,5	2070 7	62	1986 5,5	0571 20
64	1482 17,5	1744 13,5	64	0595 20,5	2056 8	64	1997 5	0531 20,5
66	1447 18	1771 12,5	66	0636 20,5	2040 8	66	2007 5	0490 20,5
68	1411 18	1796 12,5	68	0677 20	2024 8,5	68	2017 4	0449 20,5
12,70	1375 + 18,5	1821 - 12,5	13,70	0717 + 20	2007 + 8,5	14,70	2025 + 4	0408 + 20,5
72	1338 18,5	1846 11,5	72	0757 19,5	1990 9,5	72	2033 3,5	0367 20,5
74	1301 18,5	1869 11,5	74	0796 20	1971 9,5	74	2040 3	0326 21
76	1264 19	1892 11	76	0836 19,5	1952 10	76	2046 2,5	0284 20,5
78	1226 19,5	1914 10,5	78	0875 19	1932 10	78	2051 2,5	0243 20,5
12,80	1187 + 19,5	1935 - 10	13,80	0913 + 19	1912 + 11	14,80	2056 + 1,5	0202 + 21
82	1148 19,5	1955 10	82	0951 19	1890 11	82	2059 1,5	0160 20,5
84	1109 20	1975 9	84	0989 18,5	1868 11,5	84	2062 1	0119 21
86	1069 20	1993 9	86	1026 18	1845 11,5	86	2064 + 0,5	0077 20,5
88	1029 20	2011 8,5	88	1062 18,5	1822 12	88	2065 0	0036 20,5
12,90	0989 + 20,5	2028 - 8	13,90	1099 + 17,5	1798 + 12,5	14,90	2065 0	*0005 + 21
92	0948 20,5	2044 8	92	1134 17,5	1773 13	92	2065 - 0,5	0047 20,5
94	0907 20,5	2060 7	94	1169 17,5	1747 13	94	2064 1,5	0088 20,5
96	0866 21	2074 7	96	1204 17	1721 13,5	96	2061 1,5	0129 20,5
98	0824 21	2088 6,5	98	1238 17	1694 14	98	2058 1,5	0170 20,5
13,00	0782 - 0,	2101 - 0,	14,00	1272 + 0,	1666 - 0,	15,00	2055 + 0,	0211 + 0,

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$N_0(x)$	$N_1(x)$
15,00	+ 0, 2055 — 2 5	+ 0, 0211 + 20	15,40	+ 0, 1813 — 10	+ 0, 0979 + 17	15 80	+ 0, 1295 — 16	+ 0, 1575 + 12
02	2050 2 5	0251 20,5	42	1793 10 5	1013 17 5	82	1263 16	1599 11
04	2045 3 5	0292 20	44	1772 10 5	1048 17	84	1231 16 5	1621 11,5
06	2038 3 5	0332 20,5	46	1751 11	1082 16 5	86	1198 16 5	1644 10,5
08	2031 4	0373 20	48	1729 11 5	1115 16 5	88	1165 16 5	1665 10 5
15,10	2023 — 4	0413 + 20	15,50	1706 — 11,5	1148 + 16	15,90	1132 — 17	1686 + 10
12	2015 5	0453 19 5	52	1683 12	1180 16	92	1098 17 5	1706 10
14	2005 5	0492 19 5	54	1659 12	1212 16	94	1063 17	1726 9
16	1995 5 5	0531 20	56	1635 12	1244 15	96	1029 17 5	1744 9
18	1984 6	0571 19	58	1610 13	1274 15 5	98	0994 18	1762 9
15 20	1972 — 6	0609 + 19 5	15 60	1584 — 13 5	1305 + 14 5	16,00	0958	1780
22	1960 7	0648 19	62	1557 13 5	1334 14 5		+ 0,	+ 0,
24	1946 7	0686 19	64	1530 13 5	1363 14,5			
26	1932 7 5	0724 18,5	66	1503 14	1392 14			
28	1917 7 5	0761 19	68	1475 14 5	1420 13,5			
15 30	1902 — 8 5	0799 + 18	15 70	1446 — 14 5	1447 + 13,5			
32	1885 8 5	0835 18,5	72	1417 15	1474 13			
34	1868 8 5	0872 18	74	1387 15	1500 13			
36	1851 9 5	0908 17,5	76	1357 15 5	1526 12 5			
38	1832 9 5	0943 18	78	1326 15 5	1551 12			
15,40	1813	0979	15,80	1295	1575			
	+ 0,	+ 0,		+ 0,	+ 0,			

3. Интегральные представления

3.1. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin t - nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(z \sin t - nt)} dt \quad (\text{Бессель}).$$

3.2. При $\operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}$ справедливы формулы (Пуассон)

$$J_v(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^v}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \cos t) \sin^{2v} t dt,$$

$$N_v(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^v}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin t) \cos^{2v} t dt - \int_0^{+\infty} e^{-z \operatorname{sh} t} \operatorname{ch}^{2v} t dt \right] \quad (\operatorname{Re} z > 0),$$

а при $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} v < \frac{1}{2}$ для положительных значений аргумента

$$J_v(x) = \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^{-v}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin xt}{(t^2 - 1)^{v + \frac{1}{2}}} dt,$$

$$N_v(x) = \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^v}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right)} \int_1^{+\infty} \frac{\cos xt}{(t^2 - 1)^{v + \frac{1}{2}}} dt.$$

(Мелер, Соини)

3.3. Для произвольного ν в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} z > 0$ или $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$) получаем представление через контурный интеграл

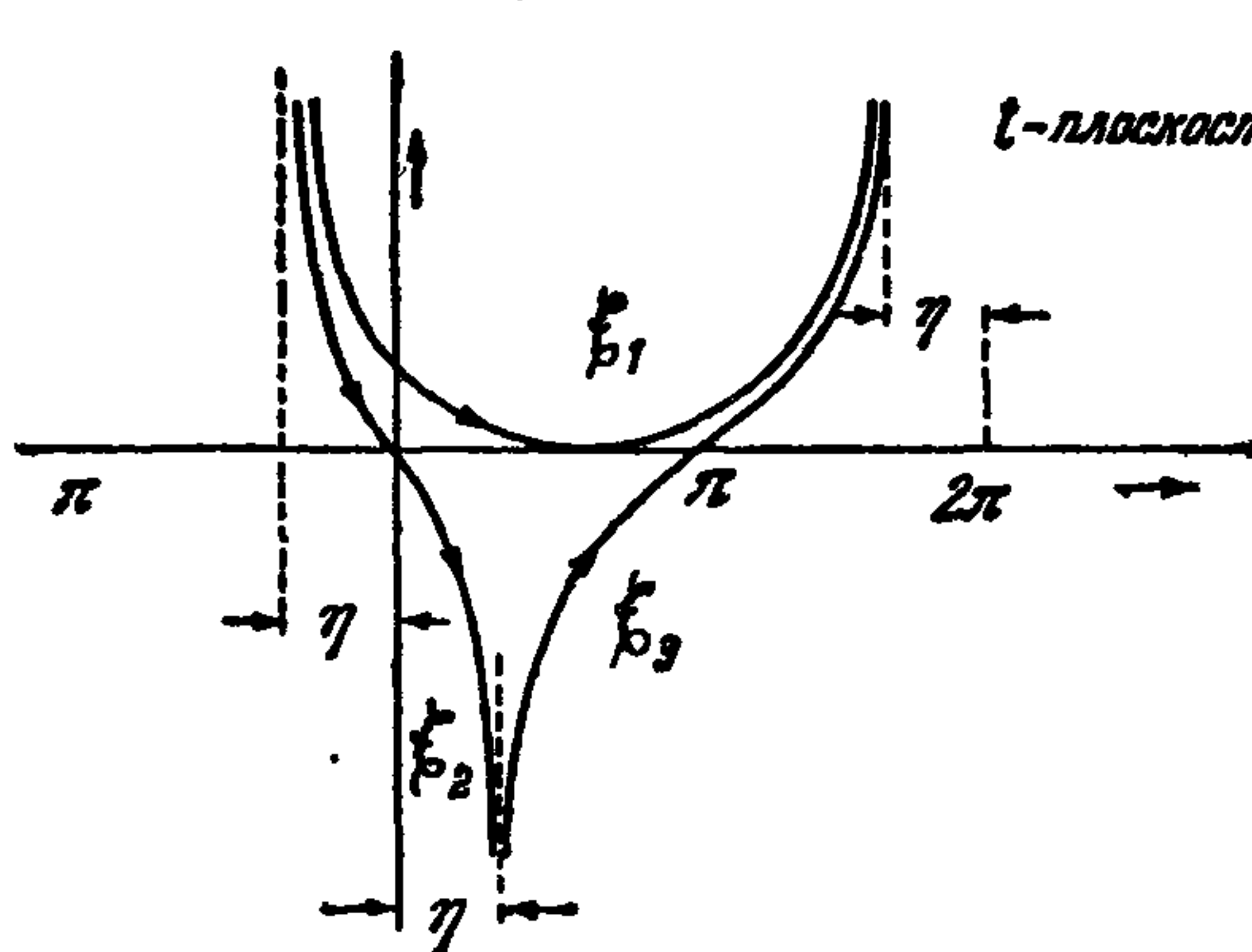


Рис. 121. Пути интегрирования в интеграле Зоммерфельда.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{z}{t}} \left(t - \frac{1}{t}\right) t^{-\nu-1} dt. \quad (\text{Сонин})$$

3.4. Для произвольного ν имеем (Зоммерфельд):

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_1} e^{iz \cos t} e^{i\nu(t-\pi/2)} dt,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{C}_2} e^{iz \cos t} e^{i\nu(t-\pi/2)} dt,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{C}_3} e^{iz \cos t} e^{i\nu(t-\pi/2)} dt.$$

При этом пути интегрирования выбираются следующим образом (рис. 121): для любого числа η , $0 \leq \eta \leq \pi$, $\mathfrak{C}_1$ есть кривая, пробегаемая от $-\eta + i\infty$ до $2\pi - \eta + i\infty$; $\mathfrak{C}_2$ — от $-\eta + i\infty$ до $\eta - i\infty$; $\mathfrak{C}_3$ — от $\eta - i\infty$ до $2\pi - \eta + i\infty$. Приведенные интегральные представления Зоммерфельда справедливы в области $-\eta < \arg z < \pi - \eta$.

4. Асимптотика

4.1. Асимптотические разложения Ганкеля справедливы для больших значений аргумента: $|z| \gg 1$, $|z| \gg \nu$. Обозначим

$$(\nu, 0) = 1, \quad (\nu, m) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots (4\nu^2 - (2m-1)^2)}{2^{2m} m!} \quad \text{для } m = 1, 2, 3, \dots,$$

и пусть $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$, $S_\nu(z)$ означают следующие, формально построенные ряды *):

$$P_\nu(z) \equiv 1 - \frac{(\nu, 2)}{(2z)^2} + \frac{(\nu, 4)}{(2z)^4} - \dots,$$

$$Q_\nu(z) \equiv \frac{(\nu, 1)}{(2z)} - \frac{(\nu, 3)}{(2z)^3} + \dots,$$

$$S_\nu(z) \equiv 1 + \frac{(\nu, 1)}{z} + \frac{(\nu, 2)}{z^2} + \frac{(\nu, 3)}{z^3} + \dots,$$

формально удовлетворяющие соотношению

$$S_\nu(\pm iz) \equiv P_\nu\left(\frac{z}{2}\right) \mp iQ_\nu\left(\frac{z}{2}\right).$$

*) Для $\nu=0, 1$ получим:

$$S_0(2z) \equiv 1 - \frac{0,125}{z} + \frac{0,0703125}{z^2} - \frac{0,07324219}{z^3} + \frac{0,1121521}{z^4} - \frac{0,2271080}{z^5} + \dots,$$

$$S_1(2z) \equiv 1 + \frac{0,375}{z} - \frac{0,1171875}{z^2} + \frac{0,10253906}{z^3} - \frac{0,1441956}{z^4} + \frac{0,2775764}{z^5} - \dots$$

Тогда имеем:

$$H_v^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} S_v(-2iz) \quad (-\pi < \arg z < 2\pi),$$

$$H_v^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} S_v(2iz) \quad (-2\pi < \arg z < \pi),$$

$$J_v(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) P_v(z) - \sin\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) Q_v(z) \right] \\ (-\pi < \arg z < \pi),$$

$$N_v(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) P_v(z) + \cos\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) Q_v(z) \right] \\ (-\pi < \arg z < \pi).$$

Эти представления надо понимать в асимптотическом смысле; если оборвать ряды S_v , P_v , Q_v после члена с z^{-m} , то получим ошибку, абсолютная величина которой меньше $\text{const} \cdot |z|^{-m-1}$ и которая, следовательно, стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что в указанных выше областях справедливо первое приближение

$$J_v(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ N_v(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (|z| \gg 1, |z| \gg v).$$

Если порядок v и аргумент $z = x$ действительны и положительны, то ошибка, получаемая при обрывании асимптотических рядов после n -го члена, по абсолютной величине будет меньше первого отброшенного члена (и имеет для рядов P_v , Q_v знак отброшенного члена), если только n выбрано таким, чтобы соответственно $2n > v - \frac{1}{2}$ в P_v , $2n > v - \frac{3}{2}$ в Q_v и $n > v - \frac{1}{2}$ в S_v . Следовательно, в практических вычислениях имеет смысл продолжать ряды только до тех пор, пока их члены убывают.

Чтобы уменьшить ошибку вычислений, получающуюся при обрывании ряда перед членом с наименьшей абсолютной величиной, можно прибавить этот член, умноженный на $f = \frac{1}{2} + \varepsilon$ (ε — малая величина). Более точные выражения для множителей f даны Барнеттом*):

$$1) \ z = re^{i\varphi}, \ m-1 < r < m+1, \ m \text{ — целое, } r = m + v, \ -\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}:$$

$$f = \frac{1 + i \operatorname{tg} \varphi}{2} + \frac{\pm 1 + 4v - i2 \operatorname{tg} \varphi}{8r \cos^2 \varphi} \text{ для } P_v(z), Q_v(z)$$

$$2) \ z = iy, \ m-1 < 2y < m+1, \ m \text{ — целое, } 2y = m + t:$$

$$f = \frac{1}{2} + \frac{1+2t}{16y} - \frac{v^2 - \frac{3}{8} + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{2}}{(4y)^2} + \dots \text{ для } S_v(2y).$$

*) D. Burnett, Proc. Cambridge Philos. Soc., т. 26 (1930), стр. 145—151.

Эти же множители f в удобной форме найдены Эри*) (x, y целые, $u = \frac{1}{4x}$, $v = \frac{1}{4y}$):

$$f = \frac{1}{2} + \frac{u}{2} - 2u^2 + \frac{15}{2}u^3 - \frac{103}{4}u^4 \dots \quad \text{для } P_0(x),$$

$$f = \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{9}{2}u^2 - \frac{159}{4}u^3 \dots \quad \text{для } Q_0(x),$$

$$f = \frac{1}{2} + \frac{u}{2} + \frac{7}{2}u^2 - \frac{151}{4}u^3 \dots \quad \text{для } P_1(x),$$

$$f = \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + 2u^2 - \frac{15}{2}u^3 + \frac{49}{4}u^4 \dots \quad \text{для } Q_1(x),$$

$$f = \frac{1}{2} + \frac{v}{2} - \frac{3}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^3 + \frac{43}{2}v^4 - \frac{81}{2}v^5 \dots \quad \text{для } S_0(2y),$$

$$f = \frac{1}{2} + \frac{v}{2} + \frac{5}{2}v^2 - \frac{7}{2}v^3 - \frac{29}{2}v^4 \dots \quad \text{для } S_1(2y).$$

Если x, y — не целые, то множители f из этих формул можно получить интерполированием

4.2. Ряды Лебая дают асимптотические представления бесселевых функций для больших значений порядка или аргумента. В следующих выражениях пусть v везде будет положительной действительной величиной.

Через $\mathfrak{E}(w)$ обозначим формально построенный ряд

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(w) = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{w} - \frac{5v^2}{3w^3} \right) + \frac{1 \cdot 3}{8^2} \left(\frac{3}{2w^2} - \frac{77v^2}{9w^4} + \frac{385v^4}{54w^6} \right) + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8^3} \left(\frac{5}{2w^3} - \frac{1521v^2}{50w^5} + \frac{17017v^4}{270w^7} - \frac{17017v^6}{486w^9} \right) + \dots \end{aligned}$$

Если m -й член этого ряда записать в форме

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{(8w)^m} \sum_{n=0}^m C_{m,n} \left(\frac{iv}{w} \right)^{2n},$$

то имеется рекуррентная формула

$$C_{0,0} = 1, \quad C_{m,-1} = C_{m,m+1} = 0,$$

$$C_{m+1,n+1} = \frac{2k+1}{(2m+1)(k+1)} [(2k-3)C_{m,n} + (2k+1)C_{m,n+1}], \quad k = m + 2n + 2.$$

В практических вычислениях следующие ряды должны быть оборваны на том месте, начиная с которого их члены перестают убывать.

а) Пусть аргумент $z = x$ положителен, действителен и меньше, чем порядок v . Если положить

$$s^2 = v^2 - x^2, \quad u = -\frac{s}{v} + \operatorname{Arth} \frac{s}{v} = \frac{s^3}{3v^3} + \frac{s^5}{5v^5} + \dots,$$

то при $1 \ll s < v$, $v^2 \ll s^2$ (практически может быть $s > 6$, $s > 2, 5v^{2/3}$)

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s \cdot \left\{ \begin{matrix} 2J_v(x) \\ -N_v(x) \end{matrix} \right\} \approx e^{\pm i\pi v} \mathfrak{E}(\pm s).$$

*) J. R. Airey, Arch. Math. Phys., т. 20 (1913), стр. 240—244; т. 22 (1914), стр. 213—225.

б) Пусть аргумент $z = x$ положителен, действителен и больше, чем порядок ν . Если положить

$$s^2 = x^2 - \nu^2, \quad \varphi = s - \nu \operatorname{arctg} \frac{s}{\nu} - \frac{\pi}{4}, \quad \mathfrak{E}(is) = \mathfrak{E}_1(s) - i\mathfrak{E}_2(s),$$

то получим для $1 \ll s, \nu^2 \ll s^2$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s \cdot J_\nu(x) \approx \mathfrak{E}_1(s) \cos \varphi + \mathfrak{E}_2(s) \sin \varphi,$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s \cdot N_\nu(x) \approx \mathfrak{E}_1(s) \sin \varphi - \mathfrak{E}_2(s) \cos \varphi.$$

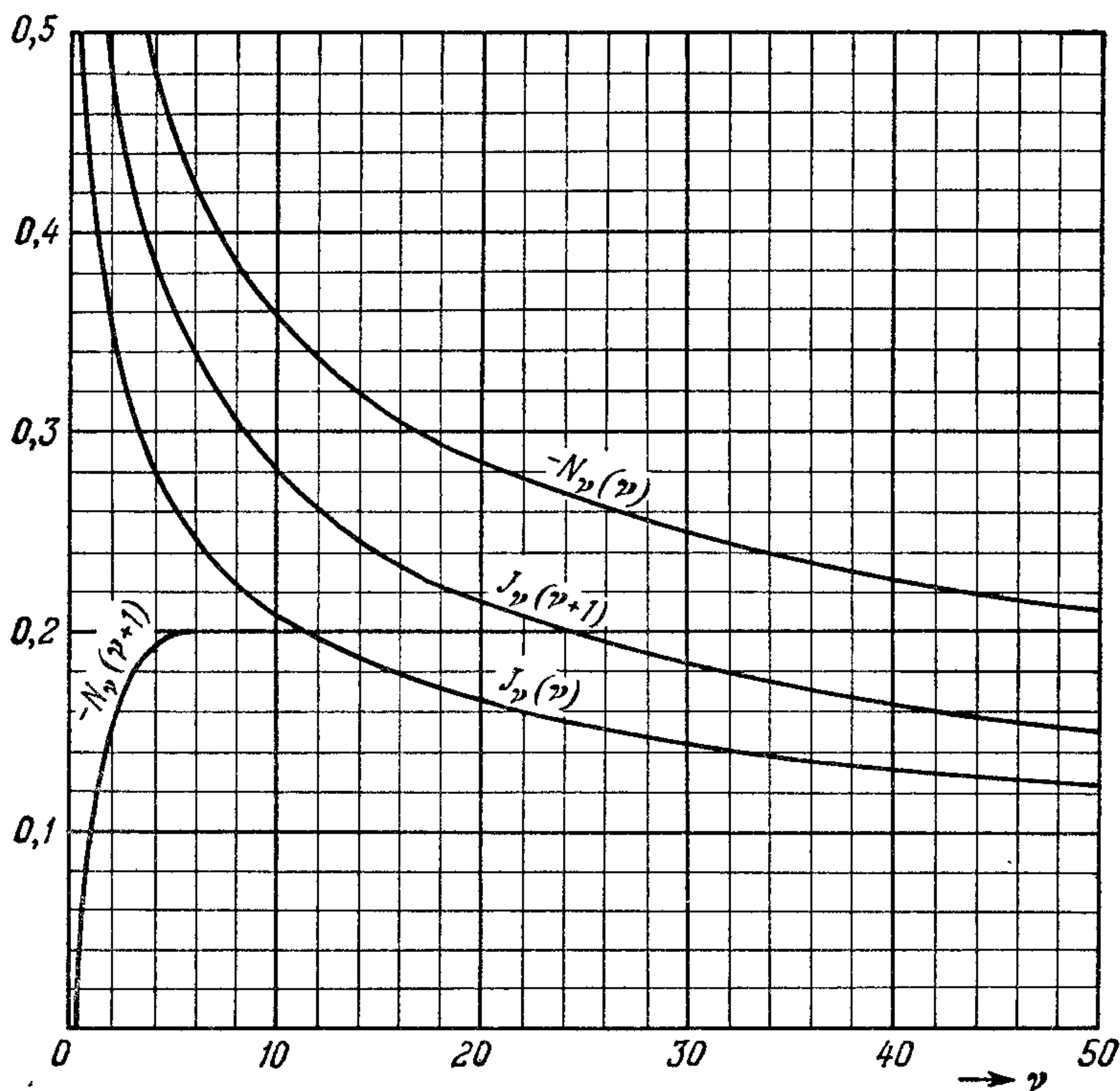


Рис. 122. Функции Бесселя и Неймана при $x = \nu$ и $x = \nu + 1$.

в) Пусть аргумент $z = iy$ чисто мнимый и $y > 0$. Если положить

$$s^2 = \nu^2 + y^2, \quad u = \frac{s}{\nu} - \operatorname{arctg} \frac{\nu}{s},$$

то получим для $1 \ll s, \nu^2 \ll s^2$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-\frac{\nu\pi}{2}} {}_2J_\nu(iy) \approx e^{\nu u} \mathfrak{E}(s), \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{\frac{(\nu+1)\pi}{2}} H_\nu^{(1)}(iy) \approx e^{-\nu u} \mathfrak{E}(-s).$$

д) Пусть аргумент $z = r e^{\frac{\pi}{4} i}$, где $r > 0$. Если положить:

$$s^4 = \nu^4 + r^4, \quad \cos 2\sigma = \nu^2/s^2, \quad \text{откуда} \quad r^2 = \nu^2 \operatorname{tg} 2\sigma = s^2 \sin 2\sigma,$$

$$\cos 2\beta = \operatorname{tg} \sigma = \sqrt{\frac{s^2 - \nu^2}{s^2 + \nu^2}}, \quad \operatorname{gd} 2\alpha = 2\beta, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\operatorname{ch} 2\alpha} = \cos 2\beta,$$

$$u = \operatorname{ch} 2\alpha - \alpha, \quad v = \operatorname{ctg} 2\beta + \beta - \pi/2$$

($u=0$ при $\alpha=1,0327$ и $v=0$ при $\beta=0,3415$), то получим для $1 \ll s$, $v^2 \ll s^2$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s \left\{ \begin{matrix} Z_\nu(re^{\frac{\pi}{4}i}) \\ iH_\nu^{(1)}(re^{\frac{\pi}{4}i}) \end{matrix} \right\} \approx e^{\pm \nu u + i \left(\frac{\sigma}{2} \mp \nu v \right)} \mathcal{O}(\pm s e^{-10}).$$

Для $r < 2v$ имеем $Z_\nu = 2J_\nu$, для $r > 2v$ имеем $Z_\nu = H_\nu^{(2)} \approx 2J_\nu$.

Если аргумент z мало отличается от порядка ν , в частности, если $z = x$ действительно и $|x - \nu|$ сравнимо с $\nu^{1/2}$, то указанные выше приближения

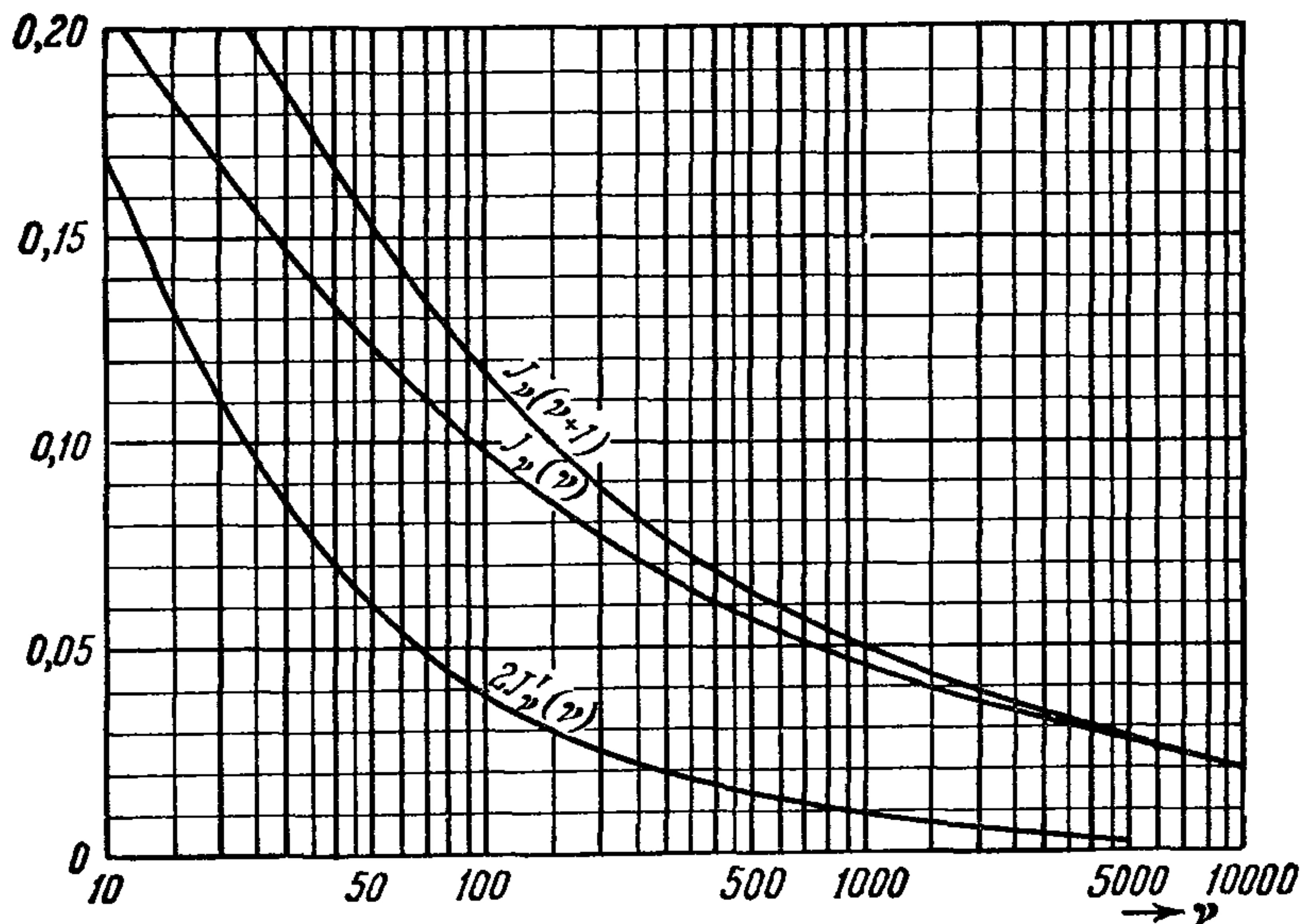


Рис. 123. Функции Бесселя при $x=\nu$ и $\lambda=\nu+1$ для больших значений ν .

непригодны. Для случая $|x - \nu|/\nu^{1/2} \ll 1$ Дебай дал другие представления. При $x = \nu \gg 1$ имеем (рис. 122, 123):

$$H_\nu^{(1)}(\nu) \approx e^{\mp \frac{\pi}{2}i} \frac{0,8946146368}{\nu^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{225\nu^2} \right) + e^{\mp \frac{2\pi}{3}i} \frac{0,0117385770}{\nu^{5/2}} \left(1 - \frac{1213}{14\,625\nu^2} \right),$$

$$J_\nu(\nu) \approx \frac{0,4473073184}{\nu^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{225\nu^2} \right) - \frac{0,0058692885}{\nu^{5/2}} \left(1 - \frac{1213}{14\,625\nu^2} \right),$$

$$-N_\nu(\nu) \approx \frac{0,7747590021}{\nu^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{225\nu^2} \right) + \frac{0,0101659059}{\nu^{5/2}} \left(1 - \frac{1213}{14\,625\nu^2} \right).$$

Так же получаем *) приближенные выражения для производных по аргументу z :

$$H_\nu^{(1)'}(\nu) \approx e^{\pm \frac{\pi}{2}i} \frac{0,8217003878}{\nu^{3/2}} \left(1 + \frac{23}{3150\nu^2} \right) + e^{\pm \frac{2\pi}{3}i} \frac{0,1789229274}{\nu^{7/2}} \left(1 - \frac{947}{69\,300\nu^2} \right),$$

$$J_\nu'(\nu) \approx \frac{0,4108501939}{\nu^{3/2}} \left(1 + \frac{23}{3150\nu^2} \right) - \frac{0,0894614637}{\nu^{7/2}} \left(1 - \frac{947}{69\,300\nu^2} \right),$$

$$N_\nu'(\nu) \approx \frac{0,7116134100}{\nu^{3/2}} \left(1 + \frac{23}{3150\nu^2} \right) + \frac{0,1549518004}{\nu^{7/2}} \left(1 - \frac{947}{69\,300\nu^2} \right).$$

*) Более подробно см. F. E m d e, Z. Angew. Math. Mech., т. 17 (1937), стр. 324—340; т. 19 (1939), стр. 101—118; P. Beckmann und W. Franz, там же, т. 37 (1957), стр. 17—27.

4.3. Формулы Никольсона дают хорошие приближения для целого порядка $\nu = n \gg 1$ и положительного аргумента x при условии $\frac{|x-\nu|}{\nu^{1/3}} \approx 1$, а также для больших и произвольно малых $|x-\nu|$. Если положим (рис. 124, 125)

$$J_{-\frac{1}{3}}(x) \pm J_{\frac{1}{3}}(x) = \begin{cases} \mathfrak{S}(x) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \mathfrak{D}(x), \end{cases} \quad e^{\frac{2\pi}{3}i} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(ix) = \mathfrak{H}(x)$$

(где $\mathfrak{H}$ действительно), то получим*)

$$\begin{aligned} J_n(x) &\approx \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon \mathfrak{H}(2(n-x)\varepsilon), \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(n-x)}{x}}, \quad \text{для } n > x, \\ J_n(x) &\approx \varepsilon \mathfrak{S}(2(x-n)\varepsilon), \\ -N_n(x) &\approx \varepsilon \mathfrak{D}(2(x-n)\varepsilon), \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(x-n)}{x}}, \quad \text{для } x > n. \end{aligned}$$

4.4. Формулы Ватсона дают хорошие приближения для произвольного порядка $\nu \gg 1$ и положительного аргумента x в той же области, что и формулы Никольсона, но справедливы без ограничений на величину $|x-\nu|$. Употребляя те же обозначения, что и в 4.3, получим для $x < \nu$

$$J_\nu(x) \approx \frac{w}{2\sqrt{3}} e^{\psi} \mathfrak{H}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right), \quad \text{где } w = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\nu^2}}, \quad \psi = \nu \left(w + \frac{w^3}{3} - \text{Arth } w\right)$$

с ошибкой, не превосходящей $\frac{3}{\nu} e^{\nu(w - \text{Arth } w)}$; и для $x > \nu$

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\approx \frac{w}{3} \left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \cos \varphi + \mathfrak{D}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \sin \varphi \right], \\ N_\nu(x) &\approx \frac{w}{3} \left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \sin \varphi - \mathfrak{D}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \cos \varphi \right], \end{aligned}$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \frac{w}{3} \left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \mp i \mathfrak{D}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \right] e^{\pm i\varphi} \approx \frac{w}{\sqrt{3}} e^{\pm \left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right),$$

где $w = \sqrt{x^2/\nu^2 - 1}$, $\varphi = \nu(w - w^3/3 - \text{arctg } w)$, с ошибкой $\leq 24/\nu$.

4.5. Формулы Лангера дают при произвольном $\nu \gg 1$ асимптотическое представление, которое выполняется равномерно в интервале $0 < x < \infty$.

Употребляя те же обозначения, что и в 4.3, и положив

$$I_{-\frac{1}{3}}(x) \pm I_{\frac{1}{3}}(x) = \begin{cases} \mathfrak{S}^*(x), \\ \frac{1}{2} \sqrt{3} \mathfrak{D}^*(x), \end{cases} \quad \text{где } I_\nu(x) = e^{-\frac{\nu\pi}{2}i} J_\nu(e^{\frac{i\pi}{2}} x),$$

получим для $x < \nu$

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \mathfrak{D}^*(\nu w \lambda), \quad -N_\nu(x) \approx \sqrt{\lambda} \mathfrak{S}^*(\nu w \lambda),$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\lambda} e^{-\frac{2\pi}{3}i} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(e^{i\frac{\pi}{2}} \nu w \lambda),$$

где

$$w = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\nu^2}}, \quad \lambda = \frac{1}{w} \text{Arth } w - 1 = \frac{w^2}{3} + \frac{w^4}{5} + \frac{w^6}{7} + \dots,$$

*) См. также W. Schöbe, Acta math., т. 92 (1954), стр. 265—307.

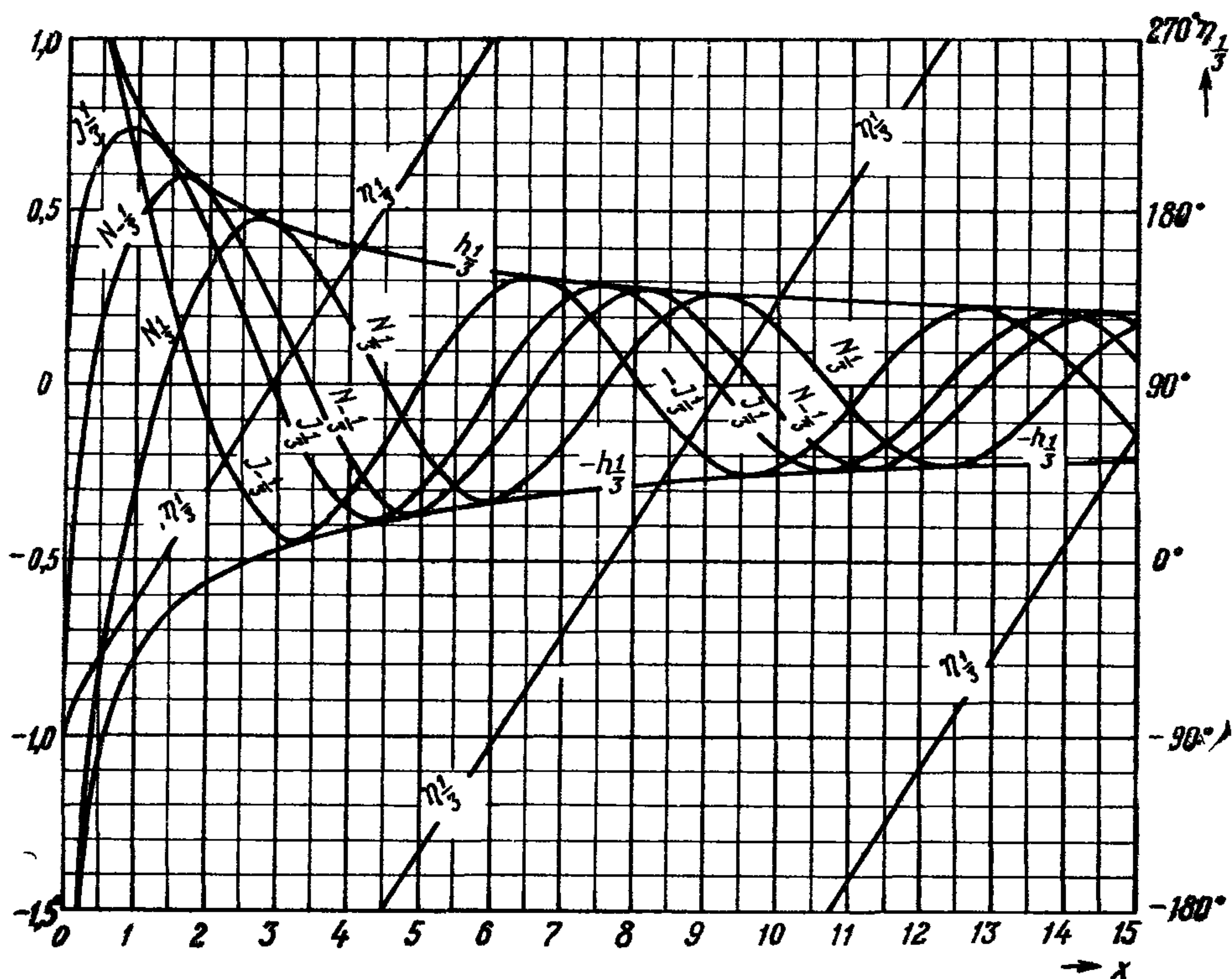


Рис 124 Функции Бесселя $J_{\pm \frac{1}{3}}(x)$, $N_{\pm \frac{1}{3}}(x)$, $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x) = h_{\frac{1}{3}} e^{i\eta_{\frac{1}{3}}}$

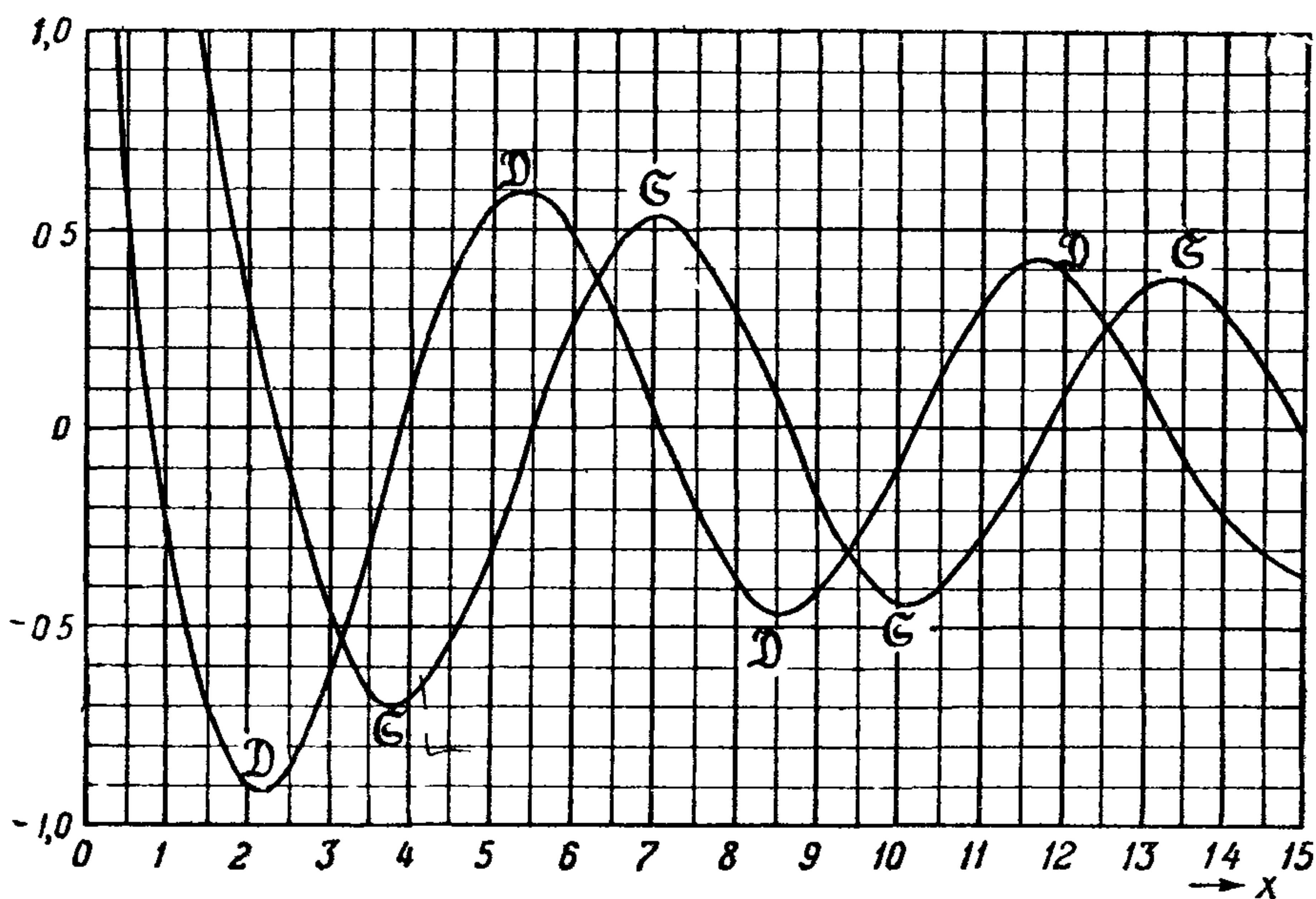


Рис. 125. Функции $\mathfrak{S} = J_{-\frac{1}{3}}(x) + J_{\frac{1}{3}}(x)$ и $\mathfrak{D} = \sqrt{3}(J_{-\frac{1}{3}}(x) - J_{\frac{1}{3}}(x))$.

и для $x > v$

$$J_v(x) \approx \sqrt{\frac{\mu}{3}} \mathfrak{S}(v\omega\mu), \quad -N_v(x) \approx \sqrt{\frac{\mu}{3}} \mathfrak{D}(v\omega\mu),$$

$$H_v^{(1)}(x) \approx \sqrt{\mu} e^{\frac{\pi}{6}i} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(v\omega\mu),$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{x^2}{v^2} - 1}, \quad \mu = 1 - \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \omega = \frac{\omega^2}{3} - \frac{\omega^4}{5} + \frac{\omega^6}{7} - \dots$$

Ошибка будет порядка $\frac{1}{v^{3/2}}$.

5. Нули

5.1. Нули бесселевых функций, за исключением может быть $z=0$, все простые.

Функция $J_v(z)$ имеет для произвольного действительного порядка v бесконечно много действительных нулей, которые расположены симметрично

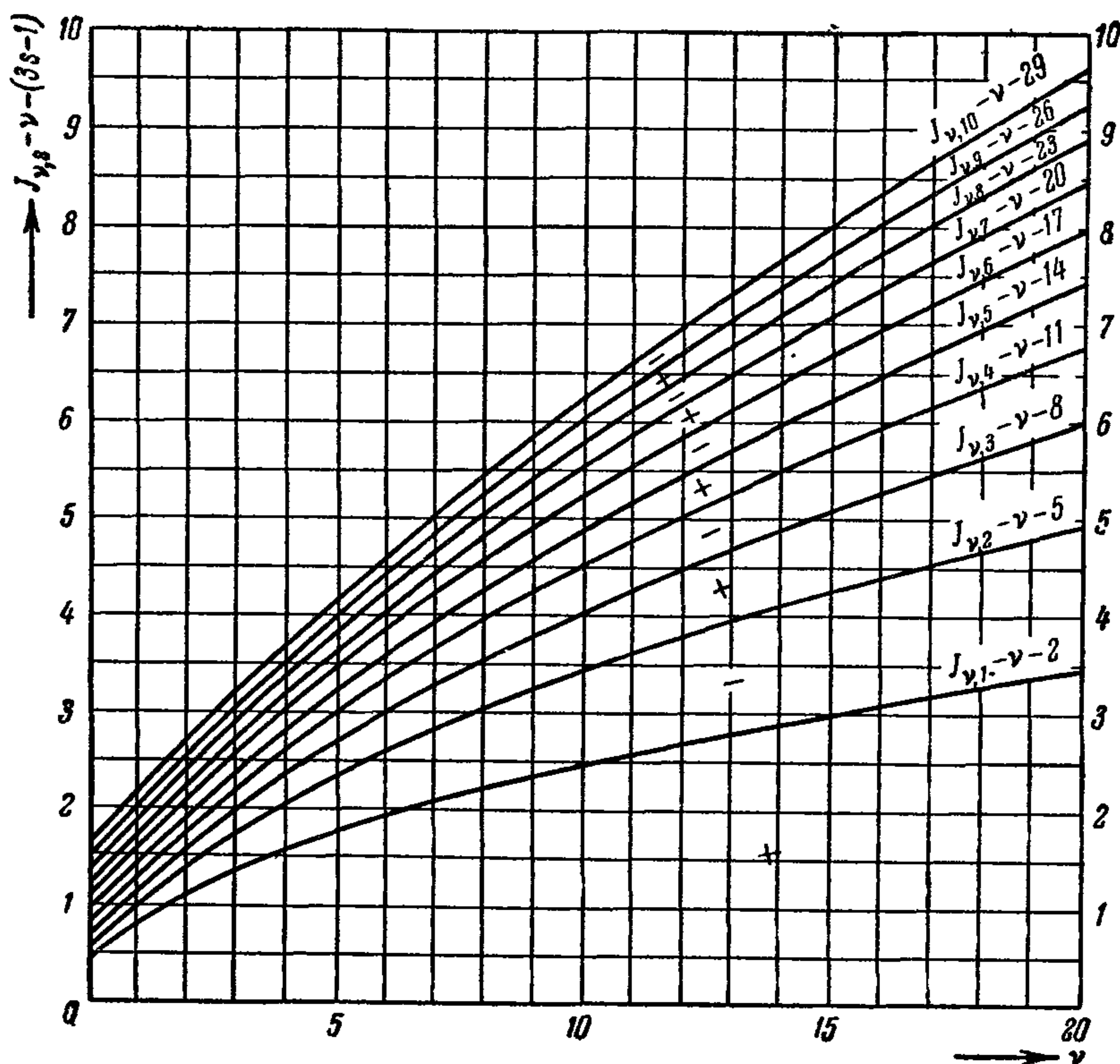


Рис. 126. Нули $j_{v,s}$ функций $J_v(x)$: величина $j_{v,s} - v$ как функция v .

относительно $z=0$. Положительные нули, расположенные в порядке возрастания, обозначают через

$$j_{v,1}, j_{v,2}, \dots, j_{v,s}, \dots$$

Для $v > -1$ все нули будут действительны (рис. 126—128, таблицы 48—51).

Бесконечную последовательность положительных нулей функции $J'_\nu(z)$, расположенных в порядке возрастания, обозначают

$$j'_{\nu,1}, j'_{\nu,2}, \dots, j'_{\nu,s}, \dots$$

Для $\nu > 0$ имеем $j_{0,1} > j'_{\nu,1} > \nu$. Если $\nu > -1$ и a, b, c, d — действительные числа, причем $ad - bc \neq 0$, то положительные нули функций $aJ_\nu(z) + bzJ'_\nu(z)$

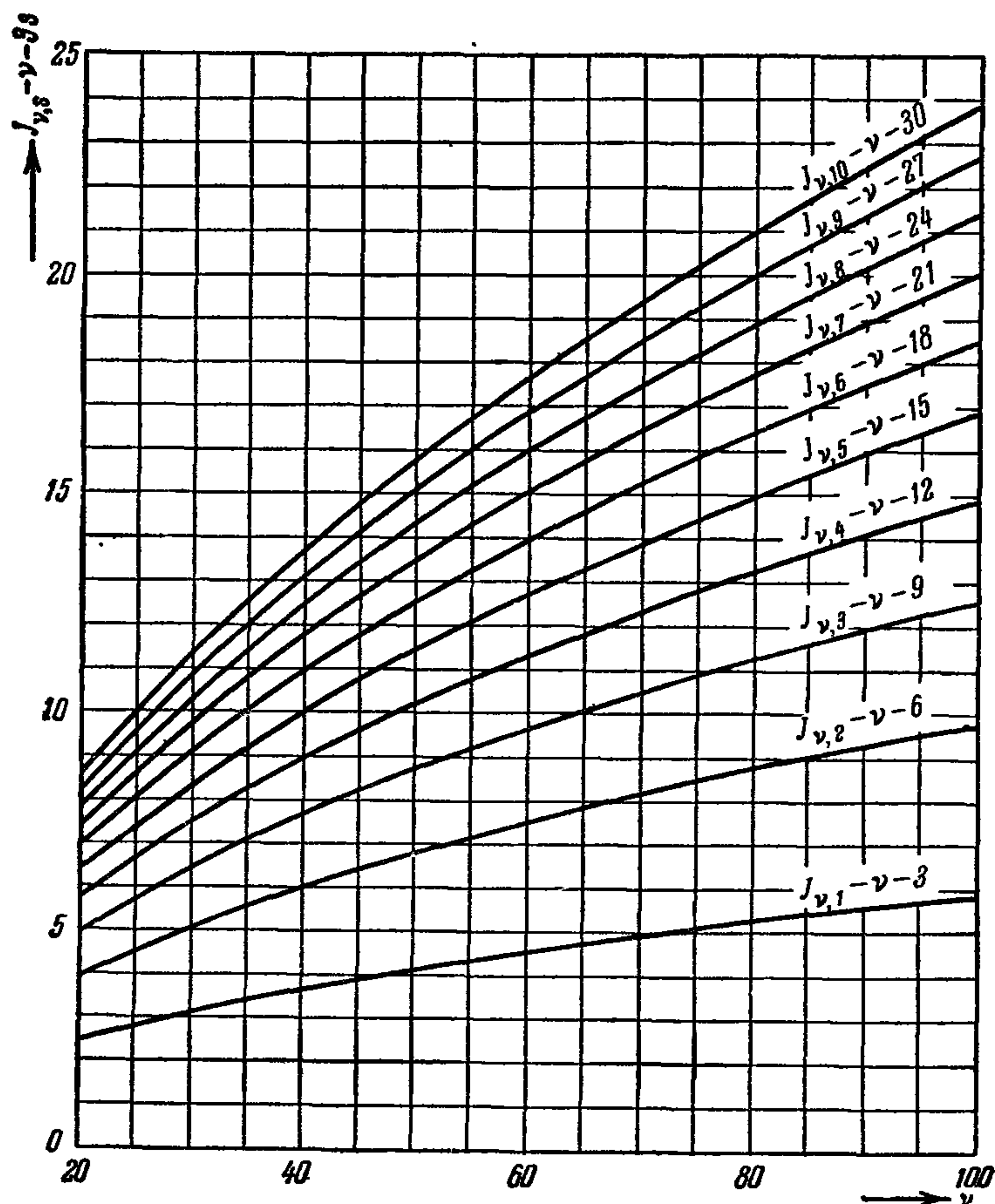


Рис. 127. Нули $j_{\nu,s}$ функций $J_\nu(x)$: величина $j_{\nu,s} - \nu$ как функция ν .

и $cJ_\nu(z) + dzJ'_\nu(z)$ разделяют друг друга. При $\nu > -1$ положительные нули функций $J_\nu(z)$ и $J_{\nu+1}(z)$ также разделяют друг друга.

Для действительного ν действительная функция $N_\nu(x)$ имеет бесконечно много положительных нулей, которые, будучи расположены в порядке возрастания, обозначаются через

$$y_{\nu,1}, y_{\nu,2}, \dots, y_{\nu,s}, \dots$$

(рис. 129). Положительные нули функций $N_\nu(x)$ и $N_{\nu+1}(x)$ разделяют друг друга. Далее имеем $j_{\nu,1} > y_{\nu,1} > j'_{\nu,1}$. Для действительного ν и действительных a, b, c, d ($ad - bc \neq 0$) положительные нули функций $aJ_\nu(z) + bN_\nu(z)$ и $cJ_\nu(z) + dN_\nu(z)$ разделяют друг друга.

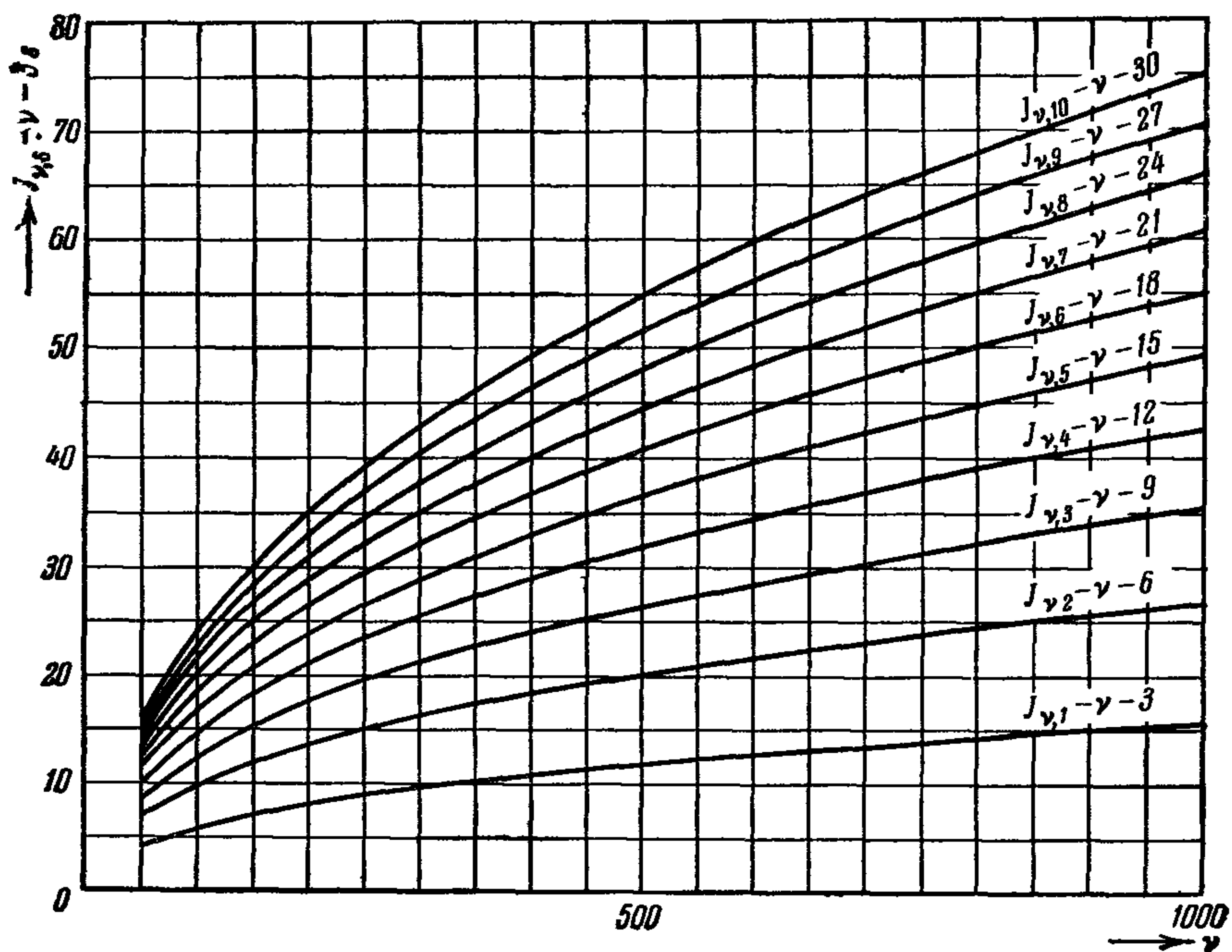


Рис. 128. Нули $j_{\nu,s}$ функций $J_\nu(x)$: величина $j_{\nu,s} - \nu$ как функция ν .

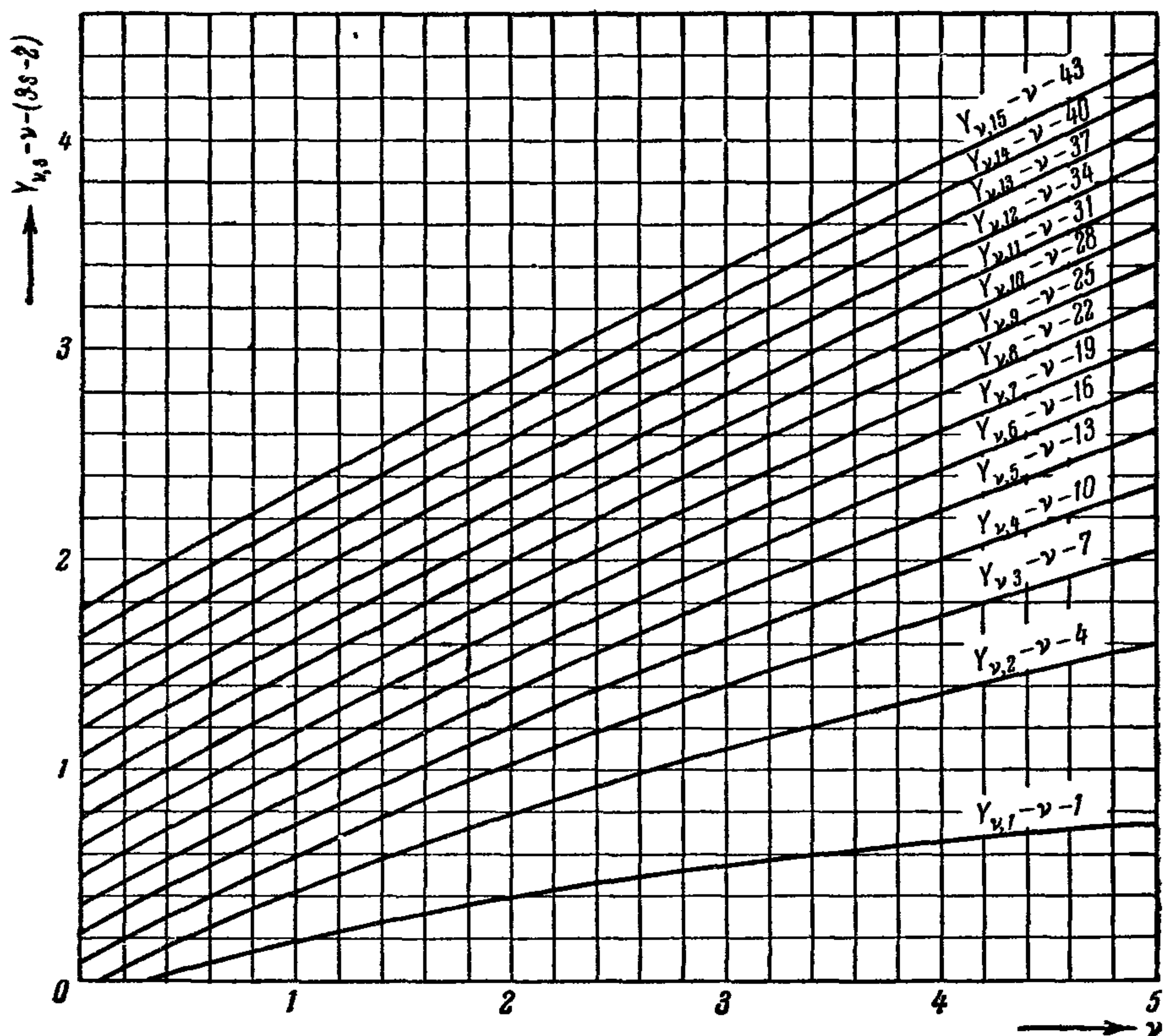


Рис. 129. Нули $y_{\nu,s}$ функций $N_\nu(x)$: величина $y_{\nu,s} - \nu$ как функция ν .

Таблица 48. Нули $j_{0,s}$ функции $J_0(x)$ и соответствующие значения функции $J_1(x)$

s	$j_{0,s}$	$J_1(j_{0,s})$	s	$j_{0,s}$	$J_1(j_{0,s})$	s	$j_{0,s}$	$J_1(j_{0,s})$
1	2,4048	+ 0,5191	21	65,1900	+ 0,09882	41	128,0209	+ 0,07052
2	5,5201	— 0,3403	22	68,3315	— 0,09652	42	131,1624	— 0,06967
3	8,6537	+ 0,2715	23	71,4730	+ 0,09438	43	134,3040	+ 0,06885
4	11,7915	— 0,2325	24	74,6145	— 0,09237	44	137,4456	— 0,06806
5	14,9309	+ 0,2065	25	77,7560	+ 0,09049	45	140,5872	+ 0,06729
6	18,0711	— 0,1877	26	80,8976	— 0,08871	46	143,7287	— 0,06655
7	21,2116	+ 0,1733	27	84,0391	+ 0,08704	47	146,8703	+ 0,06584
8	24,3525	— 0,1617	28	87,1806	— 0,08545	48	150,0119	— 0,06514
9	27,4935	+ 0,1522	29	90,3222	+ 0,08395	49	153,1535	+ 0,06447
10	30,6346	— 0,1442	30	93,4637	— 0,08253	50	156,2950	— 0,06382
11	33,7758	+ 0,1373	31	96,6053	+ 0,08118	51	159,4366	+ 0,06319
12	36,9171	— 0,1313	32	99,7468	— 0,07989	52	162,5782	— 0,06258
13	40,0584	+ 0,1261	33	102,8884	+ 0,07866	53	165,7198	+ 0,06198
14	43,1998	— 0,1214	34	106,0299	— 0,07749	54	168,8613	— 0,06140
15	46,3412	+ 0,1172	35	109,1715	+ 0,07636	55	172,0029	+ 0,06084
16	49,4826	— 0,1134	36	112,3131	— 0,07529	56	175,1445	— 0,06029
17	52,6241	+ 0,1100	37	115,4546	+ 0,07426	57	178,2861	+ 0,05976
18	55,7655	— 0,1068	38	118,5962	— 0,07327	58	181,4277	— 0,05924
19	58,9070	+ 0,1040	39	121,7377	+ 0,07232	59	184,5692	+ 0,05873
20	62,0485	— 0,1013	40	124,8793	— 0,07140	60	187,7108	— 0,05824

Таблица 49. Нули $j_{1,s}$ функции $J_1(x)$ и экстремумы функции $J_0(x)$

s	$j_{1,s}$	$J_0(j_{1,s}) = \frac{\min}{\max}$	s	$j_{1,s}$	$J_0(j_{1,s}) = \frac{\min}{\max}$	s	$j_{1,s}$	$J_0(j_{1,s}) = \frac{\min}{\max}$
1	3,8317	— 0,4028	21	66,7532	— 0,09765	41	129,5878	— 0,07009
2	7,0156	+ 0,3001	22	69,8951	+ 0,09543	42	132,7295	+ 0,06926
3	10,1735	— 0,2497	23	73,0369	— 0,09336	43	135,8711	— 0,06845
4	13,3237	+ 0,2184	24	76,1787	+ 0,09141	44	139,0128	+ 0,06767
5	16,4706	— 0,1965	25	79,3205	— 0,08958	45	142,1544	— 0,06692
6	19,6159	+ 0,1801	26	82,4623	+ 0,08786	46	145,2961	+ 0,06619
7	22,7601	— 0,1672	27	85,6040	— 0,08623	47	148,4377	— 0,06549
8	25,9037	+ 0,1567	28	88,7458	+ 0,08469	48	151,5794	+ 0,06481
9	29,0468	— 0,1480	29	91,8875	— 0,08323	49	154,7210	— 0,06414
10	32,1897	+ 0,1406	30	95,0292	+ 0,08185	50	157,8627	+ 0,06350
11	35,3323	— 0,1342	31	98,1710	— 0,08053	51	161,0043	— 0,06288
12	38,4748	+ 0,1286	32	101,3127	+ 0,07927	52	164,1459	+ 0,06228
13	41,6171	— 0,1237	33	104,4544	— 0,07807	53	167,2876	— 0,06169
14	44,7593	+ 0,1192	34	107,5961	+ 0,07692	54	170,4292	+ 0,06112
15	47,9015	— 0,1153	35	110,7378	— 0,07582	55	173,5708	— 0,06056
16	51,0435	+ 0,1117	36	113,8794	+ 0,07477	56	176,7125	+ 0,06002
17	54,1856	— 0,1084	37	117,0211	— 0,07376	57	179,8541	— 0,05949
18	57,3275	+ 0,1054	38	120,1628	+ 0,07279	58	182,9957	+ 0,05898
19	60,4695	— 0,1026	39	123,3045	— 0,07185	59	186,1374	— 0,05848
20	63,6114	+ 0,1000	40	126,4461	+ 0,07095	60	189,2790	+ 0,05799

Таблица 50. Нули $j_{n,s}$ функций $J_n(x)$

s	n = 0	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
1	2,405	3,832	5,136	6,380	7,588	8,771
2	5,520	7,016	8,417	9,761	11,065	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,015	14,373	15,700
4	11,792	13,324	14,796	16,223	17,616	18,980
5	14,931	16,471	17,960	19,409	20,827	22,218
6	18,071	19,616	21,117	22,583	24,019	25,430
7	21,212	22,760	24,270	25,748	27,199	28,627
8	24,352	25,904	27,421	28,908	30,371	31,812
9	27,493	29,047	30,569	32,065	33,537	34,989

Таблица 51. Два первых нуля $J_{\nu,1}$ и $J_{\nu,2}$ функций $J_{\nu}(x)$

ν	$J_{\nu,1}$	$J_{\nu,2}$	ν	$J_{\nu,1}$	$J_{\nu,2}$	ν	$J_{\nu,1}$	$J_{\nu,2}$	ν	$J_{\nu,1}$
-0,50	1,	4,	0,00	2,	5,	0,50	3,	6,	1,00	3,
49	5708 + 184	7124 + 167	01	4048 + 154	5200 + 156	51	1416 + 142	2832 + 149	01	8317 + 135
48	5892 184	7291 167	02	4202 154	5356 157	52	1558 141	2981 149	01	8452 135
47	6076 182	7458 166	03	4356 154	5513 156	53	1699 142	3130 148	02	8587 134
46	6258 181	7624 167	04	4510 153	5669 156	54	1841 141	3278 149	03	8721 135
	6439 181	7791 167		4663 152	5825 156		1982 141	3427 149	04	8856 134
-0,45	6620 + 180	7958 + 166	0,05	4815 + 153	5981 + 155	0,55	2123 + 140	3576 + 148	1,05	8990 + 134
44	6800 179	8124 165	06	4968 152	6136 155	56	2263 141	3724 149	06	9124 134
43	6979 178	8289 166	07	5120 152	6291 156	57	2404 140	3873 148	07	9258 134
42	7157 176	8455 165	08	5272 151	6447 155	58	2544 140	4021 149	08	9392 134
41	7333 176	8620 165	09	5423 151	6602 155	59	2684 141	4170 148	09	9526 134
-0,40	7509 + 175	8785 + 164	0,10	5574 + 151	6757 + 154	0,60	2825 + 140	4318 + 148	1,10	9660 + 134
39	7684 175	8949 165	11	5725 151	6911 155	61	2965 140	4466 148	11	9794 133
38	7859 174	9114 164	12	5876 150	7066 154	62	3105 140	4614 148	12	9927 134
37	8033 173	9278 164	13	6026 150	7220 155	63	3245 140	4762 147	13	*0061 133
36	8206 172	9442 164	14	6176 150	7375 154	64	3385 139	4909 148	14	0194 133
-0,35	8378 + 171	9606 + 163	0,15	6326 + 149	7529 + 154	0,65	3524 + 139	5057 + 147	1,15	0327 + 133
34	8549 171	9769 163	16	6475 150	7683 153	66	3663 139	5204 147	16	0460 133
33	8720 170	9932 163	17	6625 148	7836 154	67	3802 139	5351 147	17	0593 133
32	8890 169	*0095 163	18	6773 149	7990 153	68	3941 139	5498 148	18	0726 133
31	9059 169	0258 163	19	6922 148	8143 154	69	4080 139	5646 147	19	0859 133
-0,30	9228 + 168	0421 + 162	0,20	7070 + 148	8297 + 153	0,70	4219 + 139	5793 + 147	1,20	0992 + 133
29	9396 167	0583 163	21	7218 148	8450 153	71	4358 138	5940 147	21	1125 132
28	9563 168	0746 161	22	7366 148	8603 152	72	4496 138	6087 146	22	1257 133
27	9731 166	0907 161	23	7514 148	8755 153	73	4634 138	6233 147	23	1390 132
26	9897 166	1068 162	24	7662 147	8908 153	74	4772 138	6380 146	24	1522 133
-0,25	*0063 + 165	1230 + 161	0,25	7809 + 146	9061 + 152	0,75	4910 + 138	6526 + 146	1,25	1655 + 132
24	0228 165	1391 161	26	7955 147	9213 153	76	5048 137	6672 147	26	1787 132
23	0393 164	1552 161	27	8102 146	9366 152	77	5185 138	6819 146	27	1919 132
22	0557 163	1713 161	28	8248 147	9518 152	78	5323 137	6965 146	28	2051 132
21	0720 163	1874 160	29	8395 146	9670 152	79	5460 137	7111 146	29	2183 132
-0,20	0883 + 162	2034 + 160	0,30	8541 + 146	9822 + 152	0,80	5597 + 137	7257 + 146	1,30	2315 + 131
19	1045 162	2194 160	31	8687 145	9974 151	81	5734 137	7403 145	31	2446 132
18	1207 162	2354 160	32	8832 146	*0125 152	82	5871 137	7548 146	32	2578 132
17	1369 161	2514 159	33	8978 144	0277 151	83	6008 137	7694 145	33	2710 131
16	1530 160	2673 160	34	9122 145	0428 151	84	6145 137	7839 146	34	2841 131
-0,15	1690 + 161	2833 + 159	0,35	9267 + 145	0579 + 151	0,85	6282 + 137	7985 + 145	1,35	2972 + 132
14	1851 159	2992 159	36	9412 144	0730 151	86	6419 136	8130 145	36	3104 131
13	2010 159	3151 159	37	9556 144	0881 151	87	6555 136	8275 146	37	3235 131
12	2169 159	3310 159	38	9700 144	1032 151	88	6691 136	8421 145	38	3366 131
11	2328 158	3469 158	39	9844 144	1183 150	89	6827 136	8566 145	39	3497 131
-0,10	2486 + 158	3627 + 158	0,40	9988 + 144	1333 + 150	0,90	6963 + 136	8711 + 145	1,40	3628 + 131
09	2644 157	3785 158	41	*0132 143	1483 151	91	7099 135	8856 145	41	3759 131
08	2801 158	3943 158	42	0275 143	1634 150	92	7234 136	9001 144	42	3890 131
07	2959 156	4101 157	43	0418 143	1784 150	93	7370 135	9145 145	43	4021 131
06	3115 157	4258 158	44	0561 143	1934 150	94	7505 136	9290 145	44	4152 130
-0,05	3272 + 156	4416 + 157	0,45	0704 + 143	2084 + 150	0,95	7641 + 135	9435 + 144	1,45	4282 + 131
04	3428 155	4573 157	46	0847 143	2234 149	96	7776 135	9579 144	46	4413 130
03	3583 156	4730 157	47	0990 142	2383 150	97	7911 136	9723 144	47	4543 130
02	3739 154	4887 157	48	1132 142	2533 149	98	8047 134	9867 144	48	4673 131
01	3893 155	5044 156	49	1274 142	2682 150	99	8181 136	*0011 145	49	4804 130
0,00	4048	5200	0,50	1416	2832	1,00	8317	0156	1,50	4934
	2,	5,		3,	6,		3,	7,		4,

5.2. Для большого s положительные нули $x_{\nu, s}$ функции

$$Z_{\nu}(x) = J_{\nu}(x) \cos \alpha - N_{\nu}(x) \sin \alpha$$

допускают асимптотическое представление

$$x_{\nu, s} \approx \beta - \frac{\mu - 1}{8\beta} \left(1 + \frac{P_1}{3(4\beta)^2} + \frac{2P_2}{15(4\beta)^4} + \frac{P_3}{105(4\beta)^6} + \dots \right),$$

где $\mu = 4\nu^2$, $\beta = (\nu - 1/2 + 2s)\pi/2 - \alpha$, $P_1 = 7\mu - 31$, $P_2 = 83\mu^2 - 982\mu + 3779$, $P_3 = 6949\mu^3 - 153855\mu^2 + 1585743\mu - 6277237$. В частности,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} j_{0, s} &\approx s - \frac{1}{4} + \frac{0,050661}{4s-1} - \frac{0,053041}{(4s-1)^3} + \frac{0,262051}{(4s-1)^5} - \dots, \\ \frac{1}{\pi} j_{1, s} &\approx s + \frac{1}{4} - \frac{0,151982}{4s+1} + \frac{0,015399}{(4s+1)^3} - \frac{0,245270}{(4s+1)^5} + \dots \end{aligned}$$

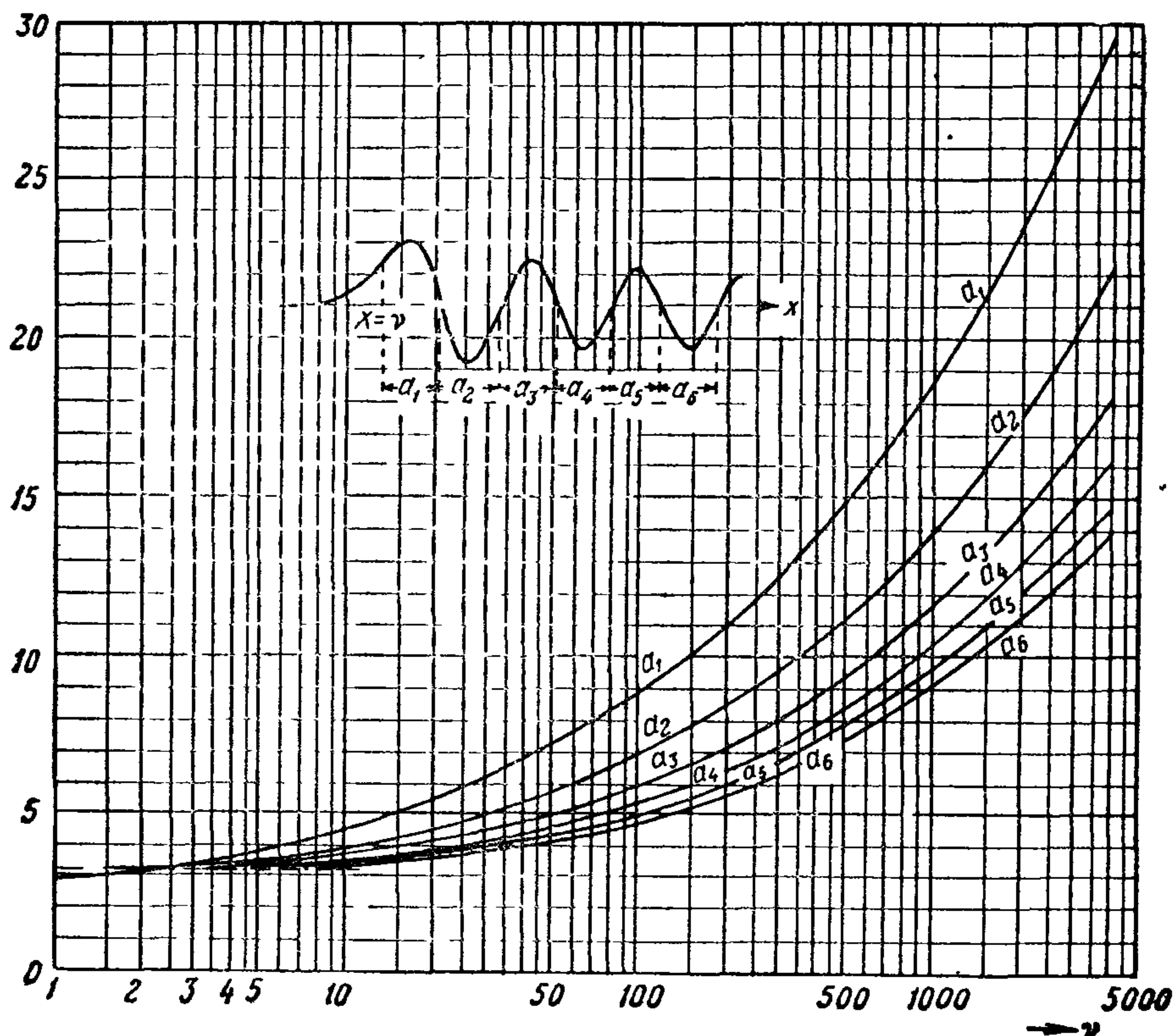


Рис. 130. Нули функций Бесселя $J_{\nu}(x)$ высокого порядка.

Для положительных нулей $x'_{\nu, s}$ функции $Z'_{\nu}(x)$ при больших s получается представление

$$x'_{\nu, s} \approx \gamma - \frac{\mu + 3}{8\gamma} - \frac{Q_1}{6(4\gamma)^3} - \frac{Q_2}{15(4\gamma)^5} - \dots,$$

где

$$\mu = 4\nu^2, \quad \gamma = \left(\nu + \frac{1}{2} + 2s \right) \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$Q_1 = 7\mu^2 + 82\mu - 9, \quad Q_2 = 83\mu^3 + 2075\mu^2 - 3039\mu + 3537.$$

5.3. Для первых положительных нулей функции $J_\nu(x)$ при большом порядке $\nu \gg 1$ имеем приближенные выражения (рис. 130—133):

$$j_{\nu,1} \approx \nu + 1,855757\nu^{\frac{1}{3}} + 1,03315\nu^{-\frac{1}{3}} - 0,00403\nu^{-1} - 0,09083\nu^{-\frac{5}{3}} + \\ + 0,0448\nu^{-\frac{7}{3}} \dots,$$

$$j_{\nu,2} \approx \nu + 3,2447\nu^{\frac{1}{3}} + 3,1584\nu^{-\frac{1}{3}} \dots, \quad j_{\nu,3} \approx \nu + 4,3817\nu^{\frac{1}{3}} + 5,7598\nu^{-\frac{1}{3}} \dots$$

Так же получаем асимптотические представления для первых положительных нулей $j_{-\nu,s}$ функций $J_{-\nu}(x)$, порядок которых $\nu = n + \frac{1}{2} \gg 1$:

$$j_{-\nu,1} \approx \nu + 0,951\nu^{\frac{1}{3}} + 0,271\nu^{-\frac{1}{3}} \dots,$$

$$j_{-\nu,2} \approx \nu + 2,596\nu^{\frac{1}{3}} + 2,022\nu^{-\frac{1}{3}} \dots, \quad j_{-\nu,3} \approx \nu + 3,834\nu^{\frac{1}{3}} + 4,410\nu^{-\frac{1}{3}} \dots$$

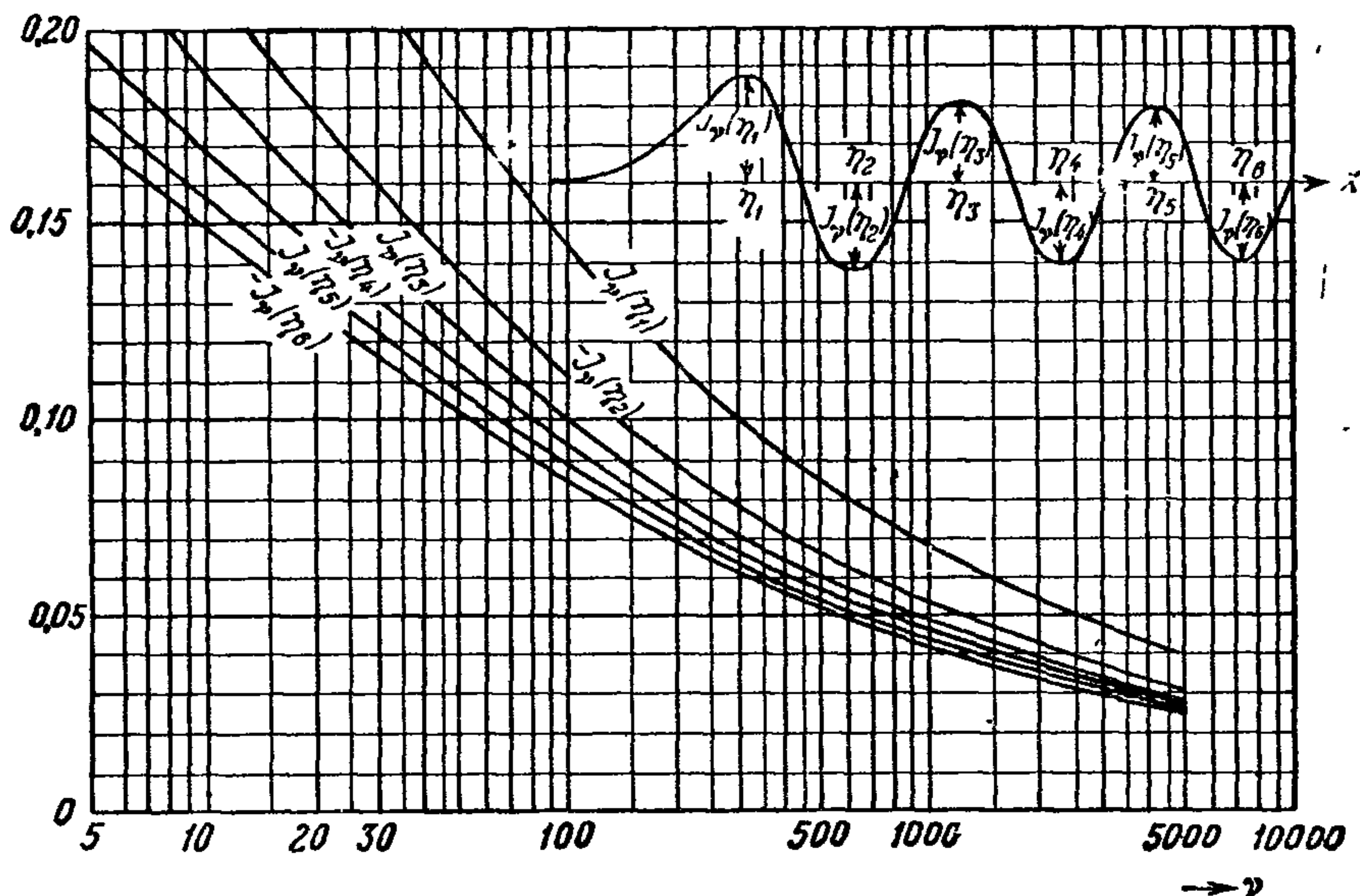


Рис. 131. Экстремальные значения функций Бесселя $J_\nu(x)$ высокого порядка.

Для наименьшего положительного нуля функции $J'_\nu(x)$ получим при $\nu \gg 1$

$$j'_{\nu,1} \approx \nu + 0,808618\nu^{\frac{1}{3}} + \dots$$

В точке $j'_{\nu,1}$ функция $J_\nu(x)$ имеет максимум.

Для наименьшего положительного нуля функции $N_\nu(x)$ получим при $\nu \gg 1$

$$y_{\nu,1} \approx \nu + 0,931577\nu^{\frac{1}{3}} + 0,26035\nu^{-\frac{1}{3}} + \dots$$

5.4. Для $n = 1, 2, \dots$ имеем:

$$J_{-n+\frac{\epsilon_n}{6}}\left(n - \frac{\epsilon_n}{6}\right) = 0,$$

где $0 < \epsilon_n < 1$, и для больших n

$$\epsilon_n \approx 1 - 6 \frac{0,03944}{(6n-1)^{4/3}}.$$

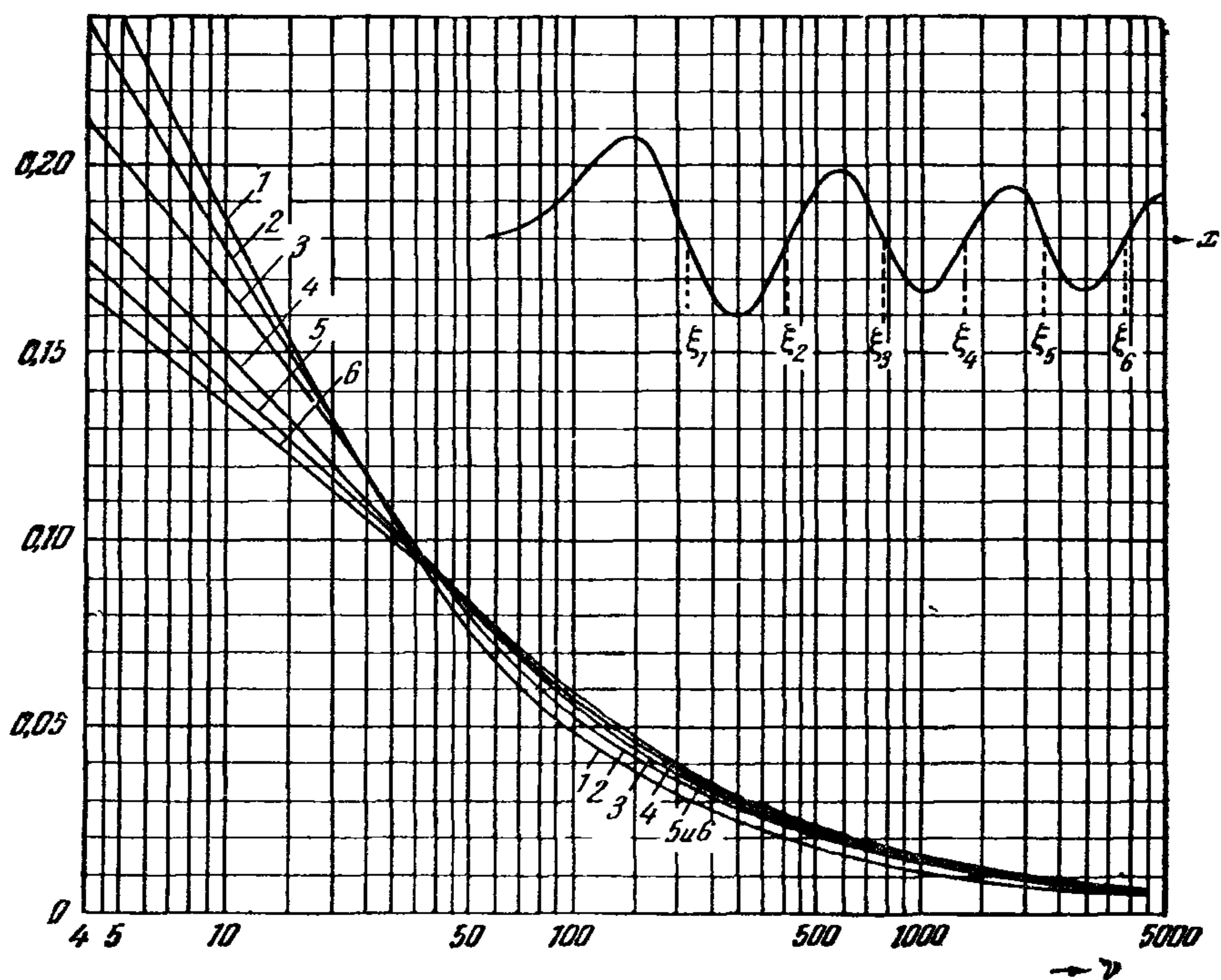


Рис. 132. Модуль производной в нулях функций Бесселя $J_\nu(x)$ высокого порядка.

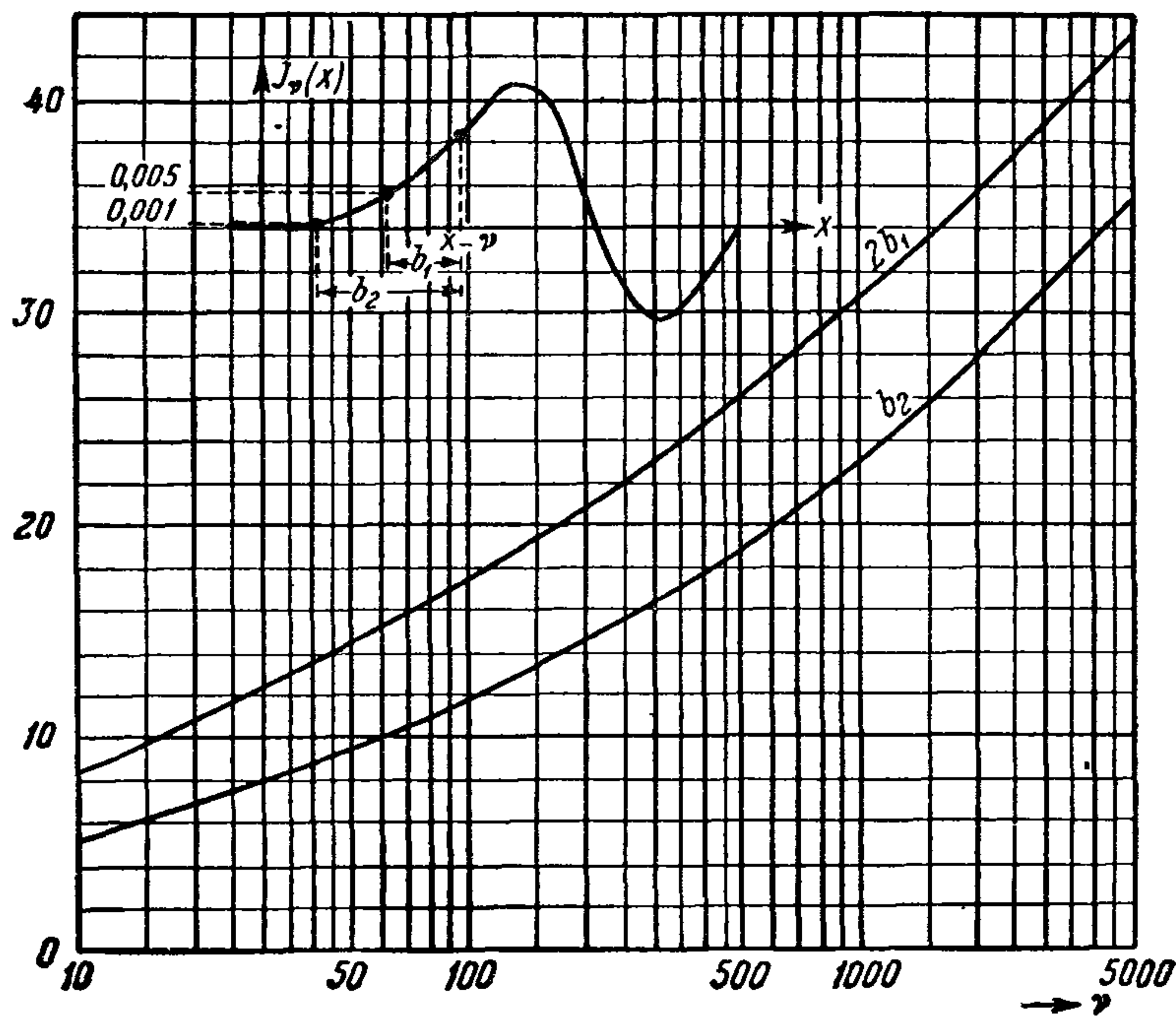


Рис. 133. Первые корни уравнений $J_\nu(x) = 0,001$ и $J_\nu(x) = 0,005$ при больших значениях ν .

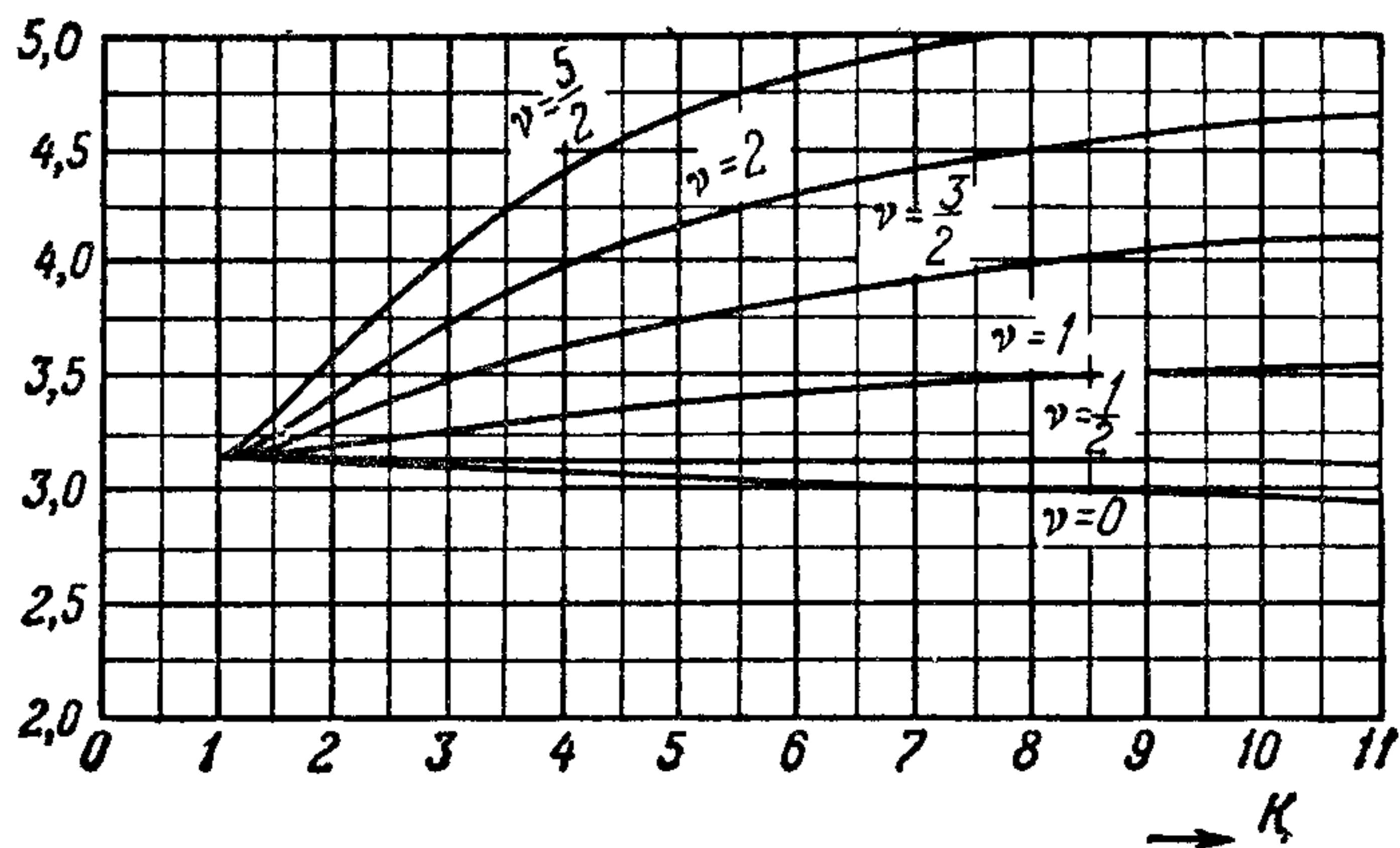


Рис. 134. Первый корень $x_{v,1}$ уравнения $\frac{J_v(x)}{N_v(x)} = \frac{J_v(kx)}{N_v(kx)}$:
величина $(k-1)x_{v,1}$ как функция k .

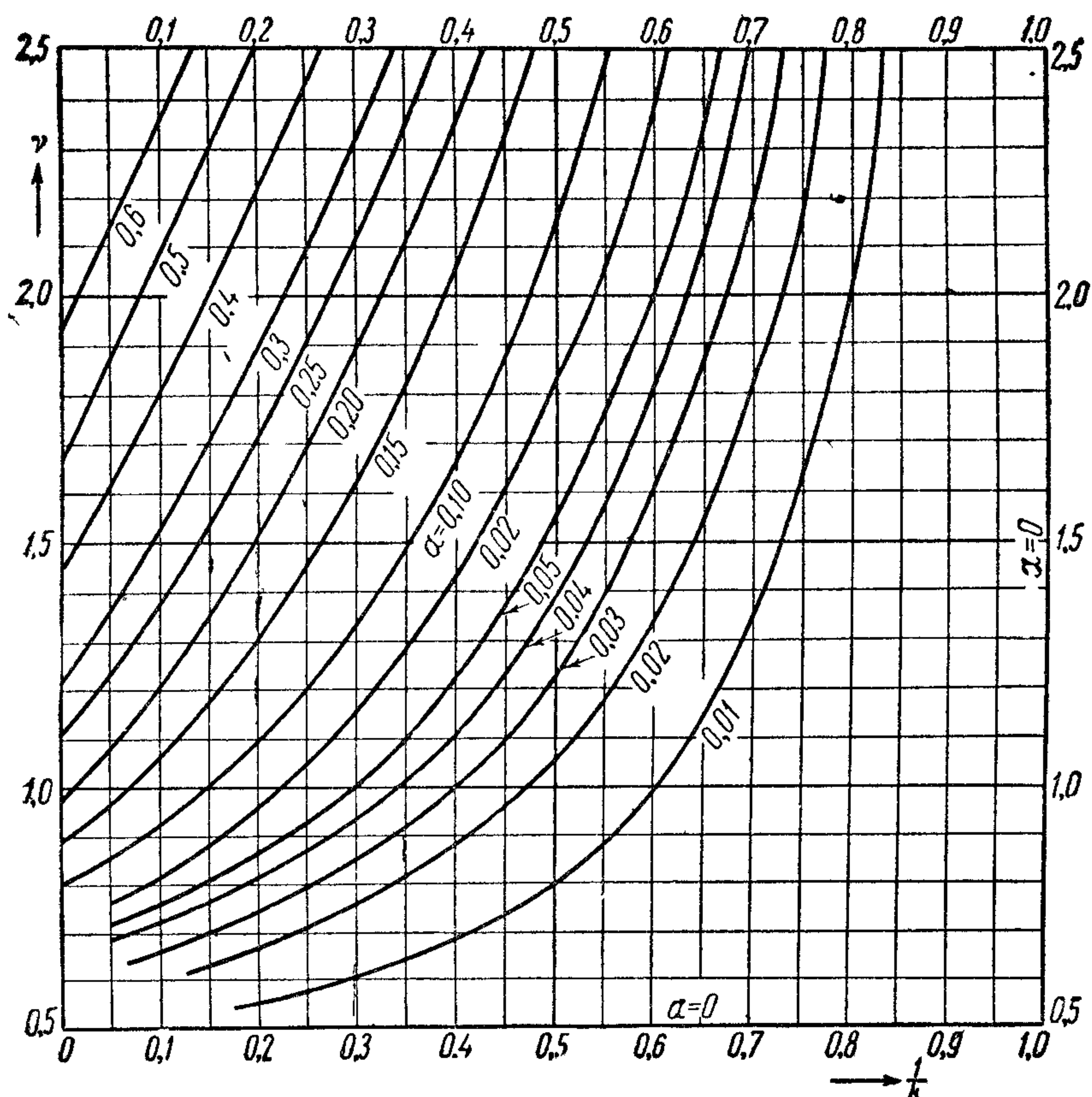


Рис. 135. Первый корень $x_{v,1} = \frac{\pi}{k-1}(1+\alpha)$ уравнения $\frac{J_v(x)}{N_v(x)} = \frac{J_v(kx)}{N_v(kx)}$.

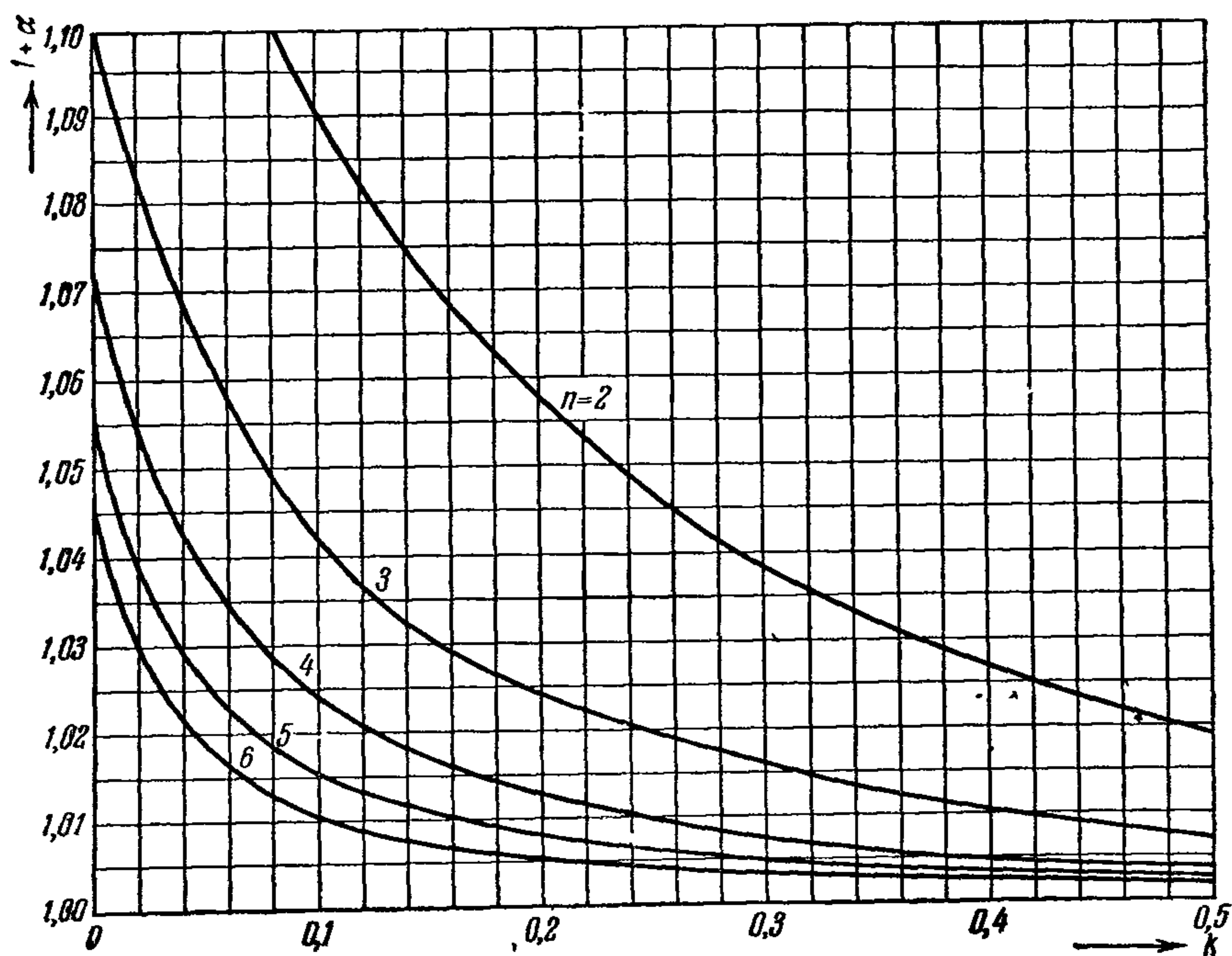
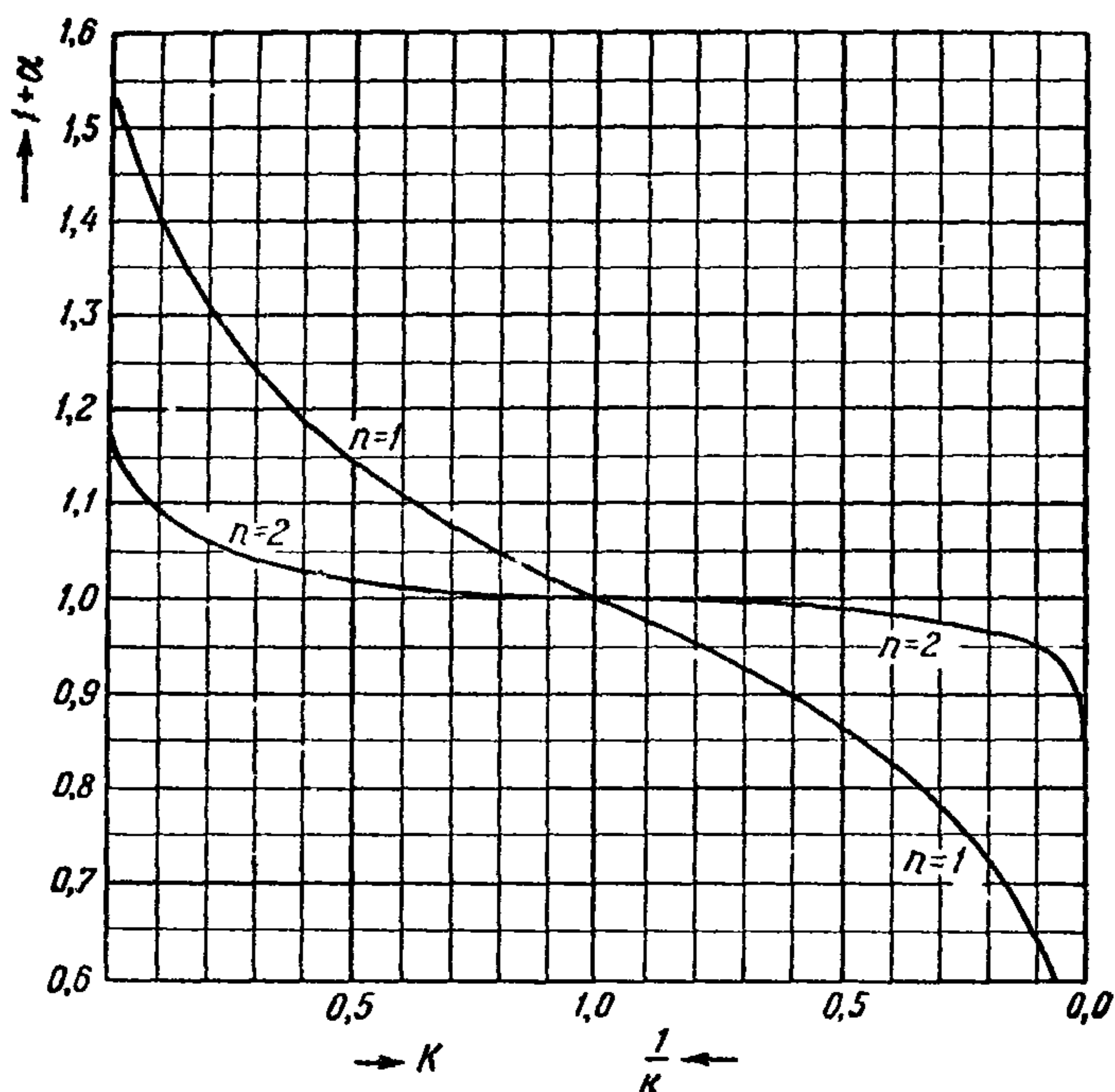


Рис. 136 и 137. Первые шесть корней $x_n = \pi \frac{n-0.5}{k-1} (1+\alpha)$

уравнения $\frac{J_0(x)}{N_0(x)} = \frac{J_1(kx)}{N_1(kx)}$.

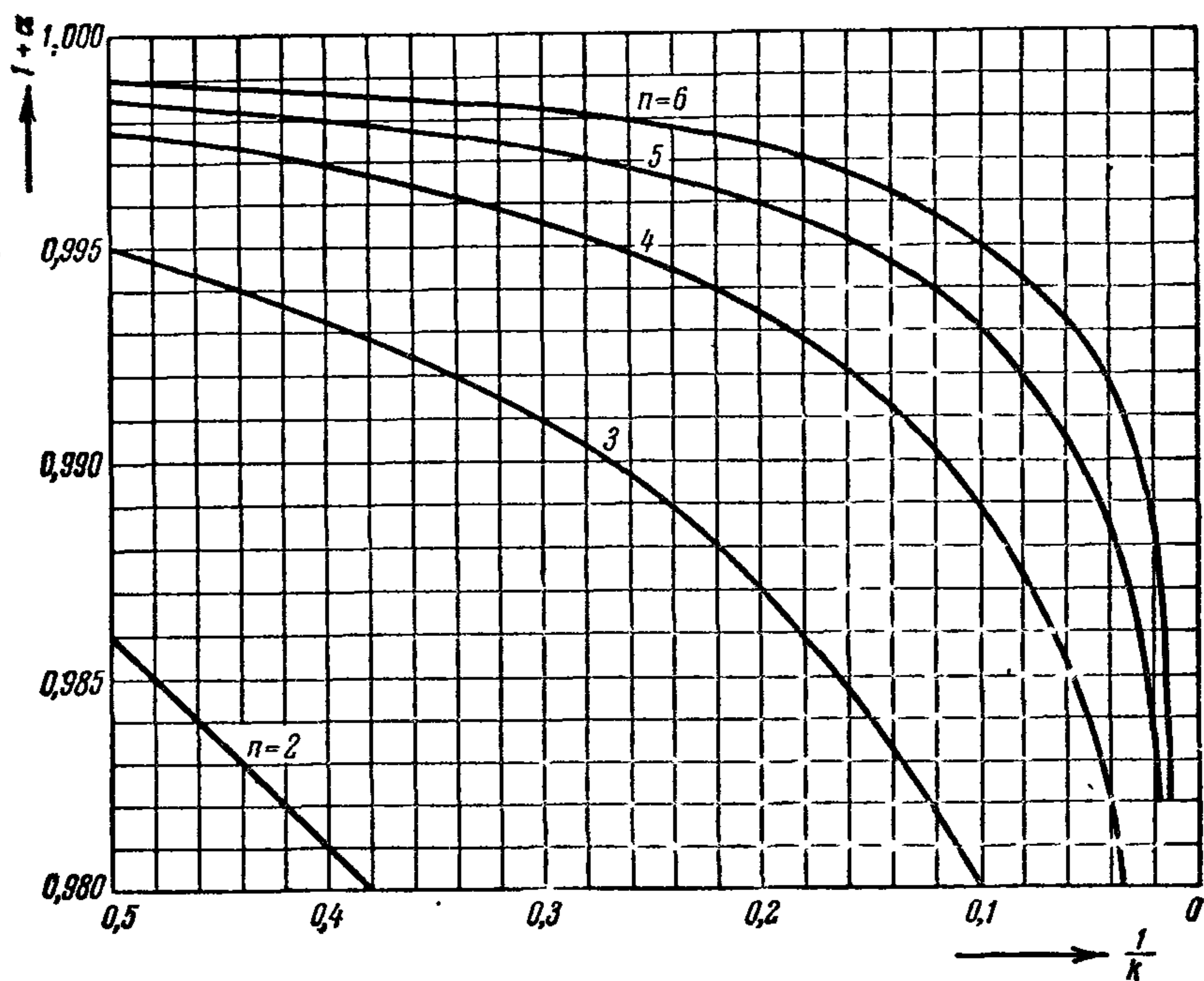
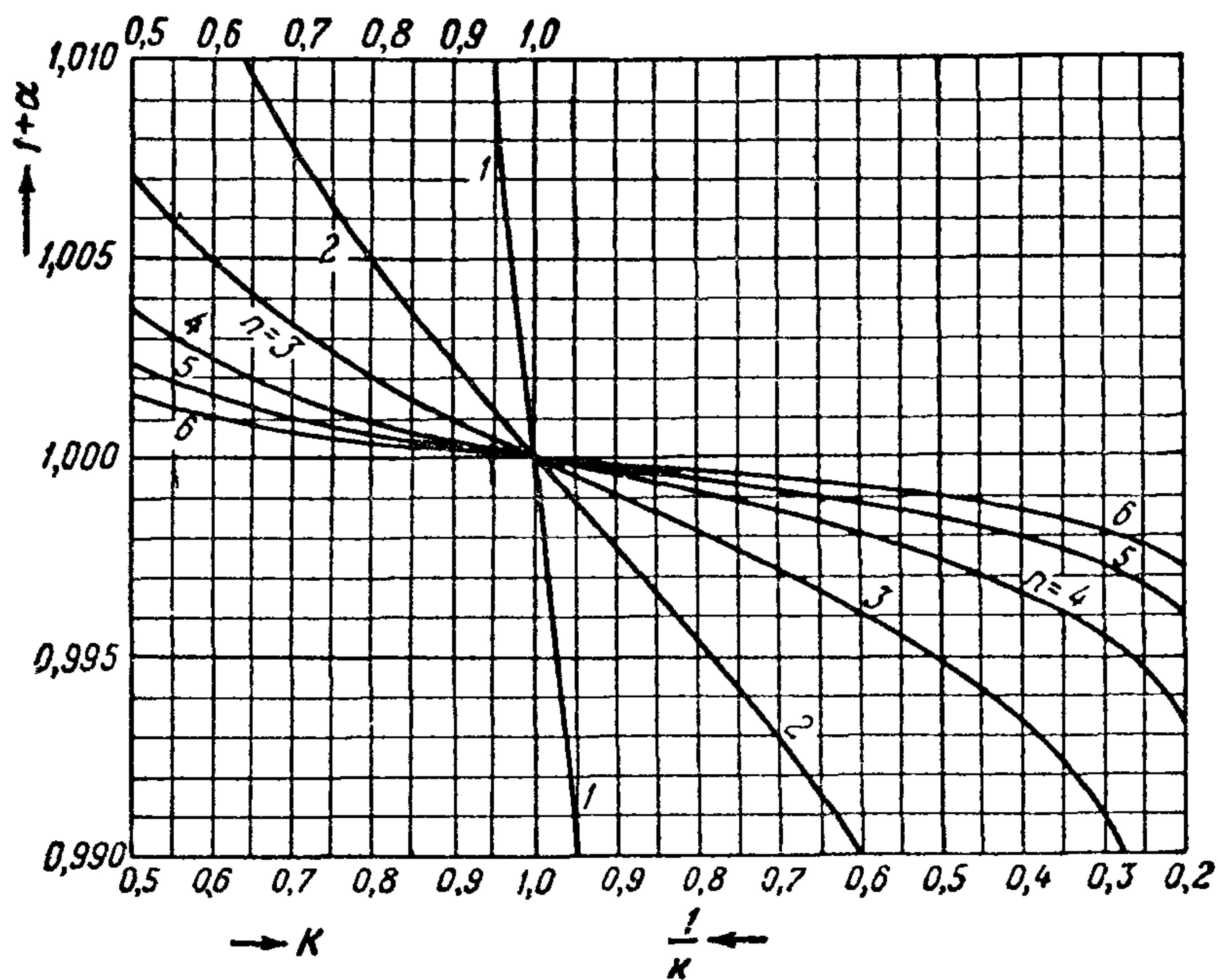


Рис. 138 и 139. Первые шесть корней $x_n = \pi \frac{n-0,5}{k-1} (1+\alpha)$

уравнения $\frac{J_0(x)}{N_0(x)} = \frac{J_1(kx)}{N_1(kx)}$.

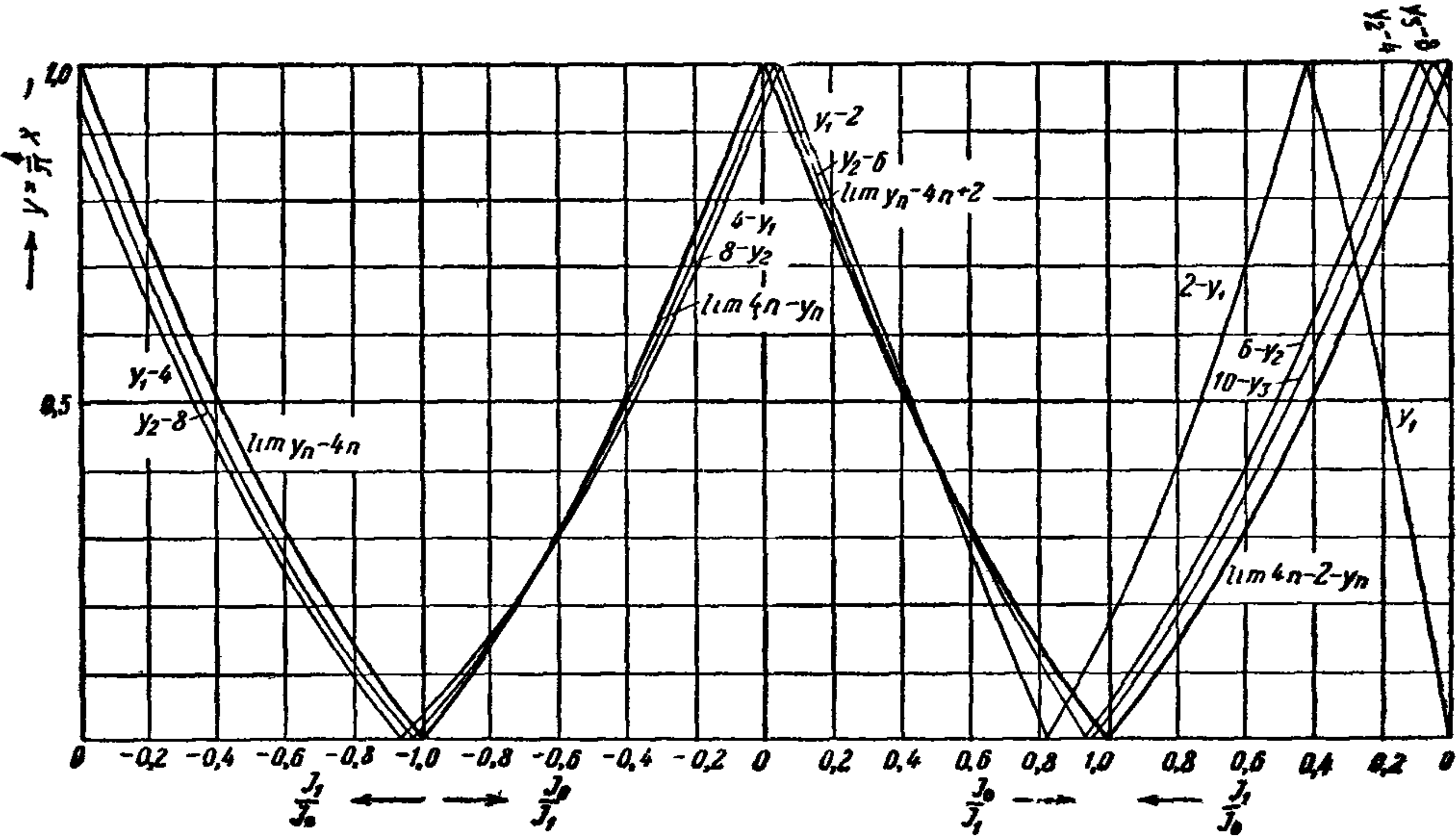


Рис. 140. Функция, обратная к $\frac{J_0\left(\frac{1}{4} \pi y\right)}{J_1\left(\frac{1}{4} \pi y\right)}$.

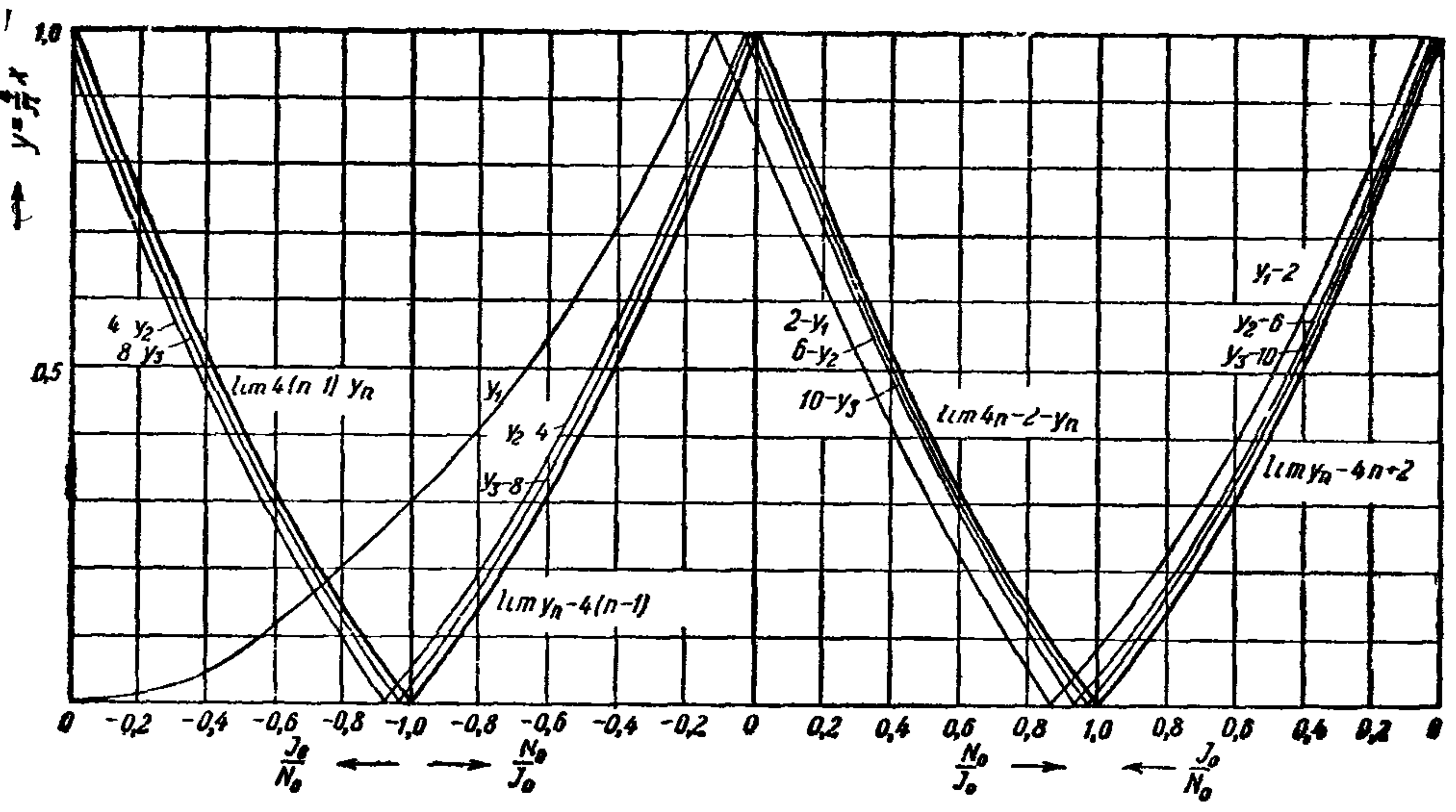


Рис. 141. Функция, обратная к $\frac{N_0\left(\frac{1}{4} \pi y\right)}{J_0\left(\frac{1}{4} \pi y\right)}$.

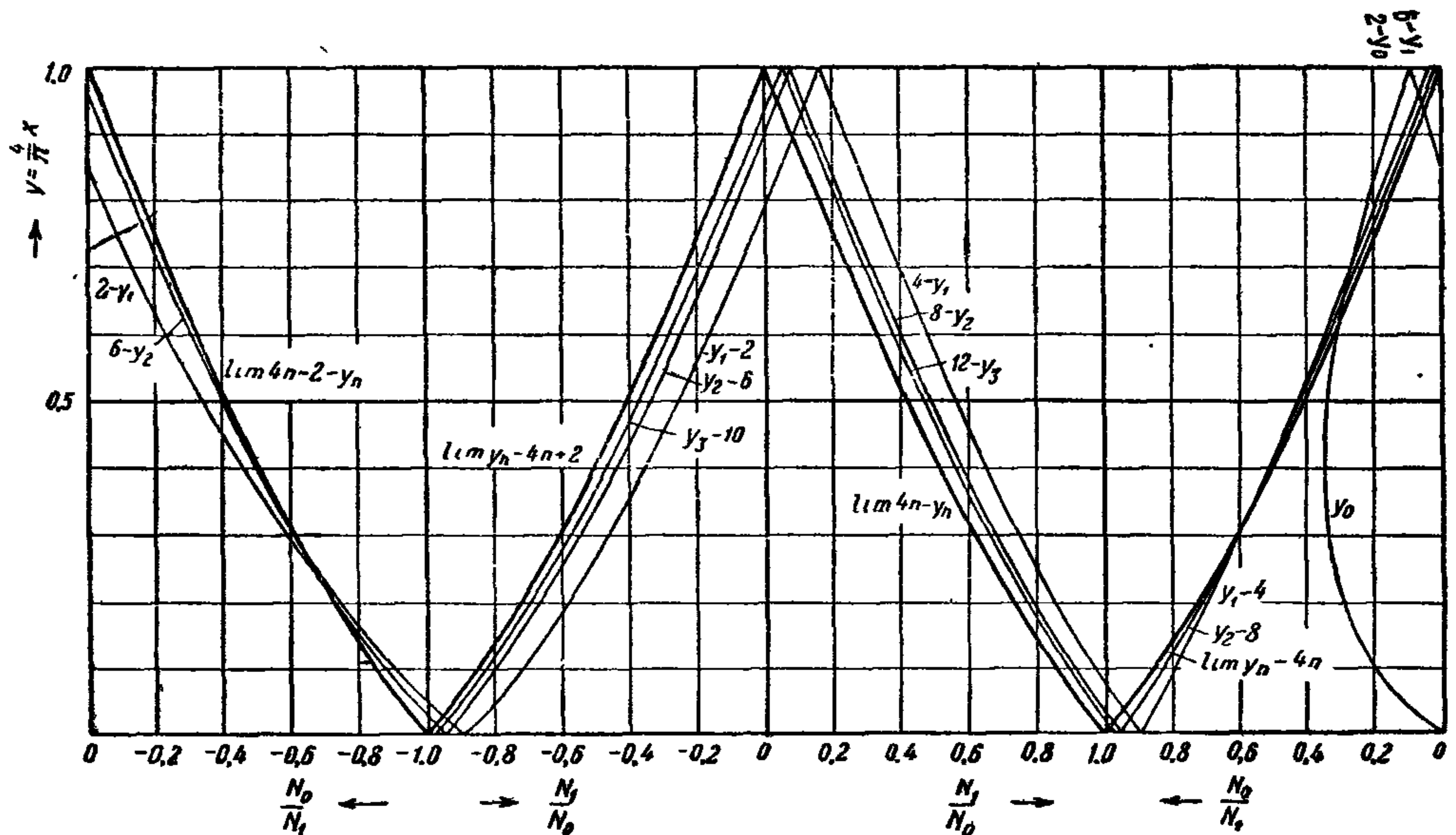


Рис. 142. Функция, обратная к $\frac{N_1 \left(\frac{1}{4} \pi y \right)}{N_0 \left(\frac{1}{4} \pi y \right)}$.

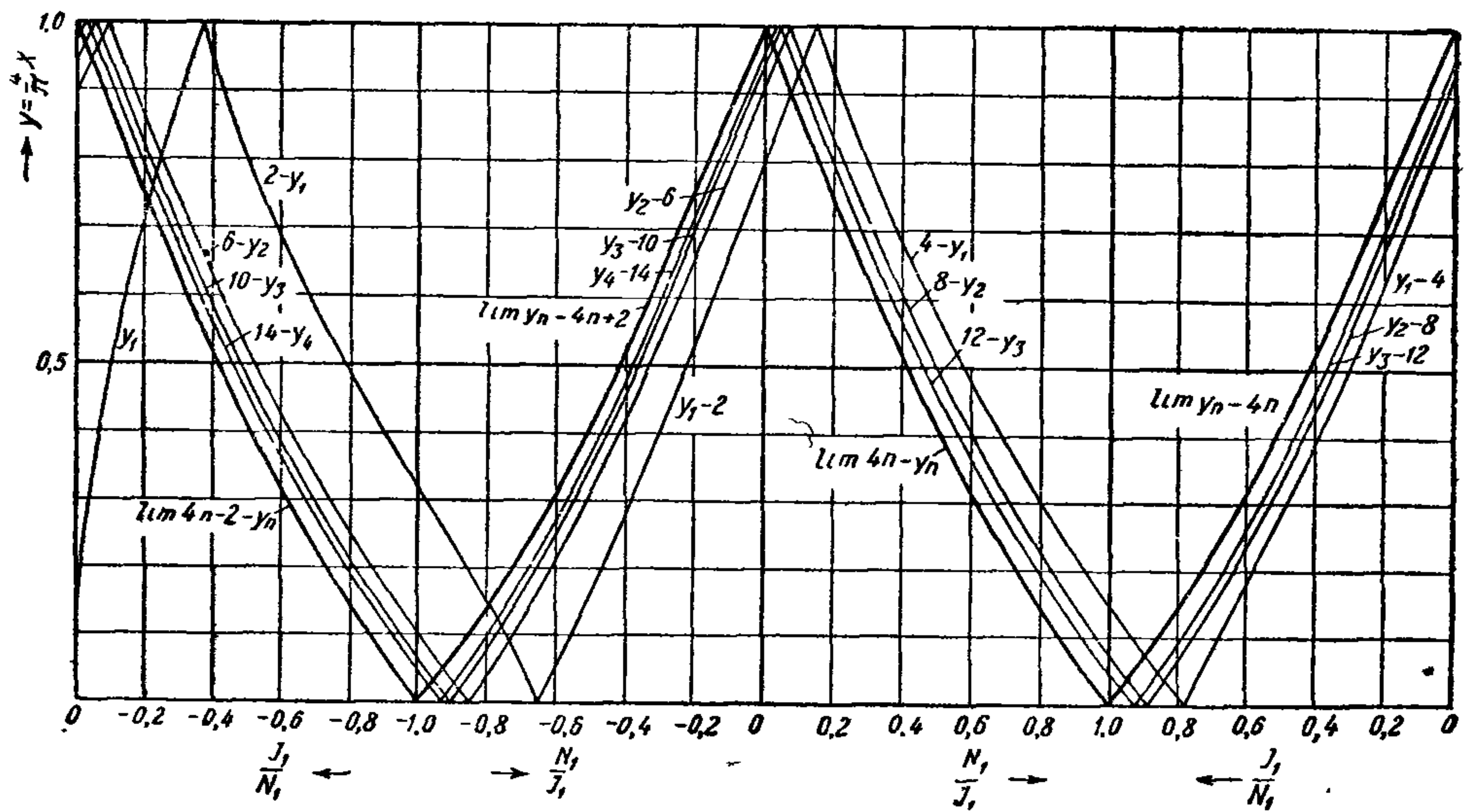


Рис. 143. Функция, обратная к $\frac{N_1 \left(\frac{1}{4} \pi y \right)}{J_1 \left(\frac{1}{4} \pi y \right)}$.

5.5. Для корней $x_{\nu, s}$ уравнений

$$\frac{J_{\nu}(x)}{N_{\nu}(x)} = \frac{J_{\nu}(kx)}{N_{\nu}(kx)} \quad \text{и} \quad \frac{J_0(x)}{N_0(x)} = \frac{J_1(kx)}{N_1(kx)}$$

(рис. 134—143) составлена *) таблица 52. Величины $(k-1)x_{\nu, s}$, содержащиеся в таблице, совпадают с величинами $(r_2-r_1)\tau_{\nu, s}$, где $\tau_{\nu, s}$ —корни уравнения

$$J_{\nu}(r_1\tau) N_{\nu}(r_2\tau) - J_{\nu}(r_2\tau) N_{\nu}(r_1\tau) = 0,$$

причем $\frac{r_2}{r_1} = k$.

Т а б л и ц а 52. Первые шесть корней $x_{\nu, s}$ уравнения $J(x)N(kx) - J(kx)N(x) = 0$

k	$x_{\nu, 1}$	$x_{\nu, 2}$	$x_{\nu, 3}$	$x_{\nu, 4}$	$x_{\nu, 5}$	$x_{\nu, 6}$	ν
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385	94,2467	} $\nu = 0$
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133	37,6969	
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
1,2	15,7080	31,4159	47,1239	62,8319	78,5398	94,2478	} $\nu = 1/2$
1,5	6,2832	12,5664	18,8496	25,1327	31,4159	37,6991	
2,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,2	15,7277	31,4259	47,1305	62,8368	78,5438	94,2511	} $\nu = 1$
1,5	6,3219	12,5861	18,8628	25,1427	31,4239	37,7057	
2,0	3,1966	6,3123	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
1,2	15,7607	31,4424	47,1416	62,8451	78,5504	94,2566	} $\nu = 3/2$
1,5	6,3858	12,6190	18,8848	25,1592	31,4371	37,7168	
2,0	3,2860	6,3607	9,4772	12,6059	15,7397	18,8760	
1,2	15,8066	31,4656	47,1570	62,8567	78,5597	94,2644	} $\nu = 2$
1,5	6,4742	12,6648	18,9156	25,1823	31,4556	37,7322	
2,0	3,4069	6,4278	9,5229	12,6404	15,7673	18,8991	
1,2	15,8655	31,4953	47,1769	62,8716	78,5716	94,2743	} $\nu = 5/2$
1,5	6,5861	12,7235	18,9551	25,2121	31,4795	37,7521	
2,0	3,5558	6,5131	9,5813	12,6846	15,8029	18,9288	

k	$(k-1)x_{\nu, 1}$	$(k-1)x_{\nu, 2}$	$(k-1)x_{\nu, 3}$	$(k-1)x_{\nu, 4}$	$(k-1)x_{\nu, 5}$	$(k-1)x_{\nu, 6}$	ν
1,2	3,1403	6,2826	9,4243	12,5660	15,7077	18,8493	} $\nu = 0$
1,5	3,1351	6,2799	9,4226	12,5647	15,7066	18,8485	
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711	
1,2	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	} $\nu = 1/2$
1,5	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
2,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,2	3,1455	6,2852	9,4261	12,5674	15,7088	18,8502	} $\nu = 1$
1,5	3,1609	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529	
2,0	3,1966	6,3123	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
∞	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159	
1,2	3,1521	6,2885	9,4283	12,5690	15,7101	18,8513	} $\nu = 3/2$
1,5	3,1929	6,3095	9,4424	12,5796	15,7186	18,8584	
2,0	3,2860	6,3607	9,4772	12,6059	15,7397	18,8760	
∞	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208	20,3713	
1,2	3,1613	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529	} $\nu = 2$
1,5	3,2371	6,3324	9,4578	12,5912	15,7278	18,8661	
2,0	3,4069	6,4278	9,5229	12,6404	15,7673	18,8991	
∞	5,1356	8,4172	11,6198	14,7960	17,9598	21,1170	
1,2	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143	18,8549	} $\nu = 5/2$
1,5	3,2931	6,3618	9,4776	12,6060	15,7397	18,8760	
2,0	3,5558	6,5131	9,5813	12,6846	15,8029	18,9288	
∞	5,7635	9,0950	12,3229	15,5146	18,6890	21,8539	

*) См., например, A. N. Lowan and A. Hillman, J. Math. Physics, т. 22 (1943), стр. 208—209; S. Chandrasekhar and D. Elbert, Proc. Cambridge Philos. Soc., т. 50 (1954), стр. 266—268.

Продолжение табл. 52

k	$(k-1) x_{v,1}$	$(k-1) x_{v,2}$	$(k-1) x_{v,3}$	$(k-1) x_{v,4}$	ν
1,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	$\nu = 0$
1	3,1412	6,2830	9,4247	12,5663	
2	3,1403	6,2825	9,4243	12,5660	
3	3,1389	6,2818	9,4239	12,5657	
4	3,1371	6,2809	9,4233	12,5652	
1,5	3,1351	6,2799	9,4226	12,5647	
6	3,1329	6,2787	9,4218	12,5641	
7	3,1306	6,2775	9,4210	12,5635	
8	3,1281	6,2762	9,4201	12,5628	
9	3,1256	6,2748	9,4192	12,5621	
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	
2,5	3,110	6,266	9,413	12,558	
3,0	3,097	6,258	9,408	12,553	
3,5	3,085	6,250	9,402	12,549	
4,0	3,073	6,243	9,397	12,545	
4,5	3,063	6,235	9,391	12,540	
5,0	3,053	6,228	9,386	12,536	
1,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	$\nu = 1$
1	3,1427	6,2837	9,4251	12,5666	
2	3,1455	6,2852	9,4261	12,5674	
3	3,1498	6,2873	9,4275	12,5684	
4	3,1550	6,2900	9,4293	12,5698	
1,5	3,1609	6,2931	9,4314	12,5713	
6	3,1675	6,2965	9,4337	12,5731	
7	3,1744	6,3002	9,4362	12,5749	
8	3,1816	6,3041	9,4388	12,5769	
9	3,1890	6,3081	9,4416	12,5790	
2,0	3,1966	6,3123	9,4445	12,5812	
2,5	3,235	6,335	9,460	12,593	
3,0	3,271	6,358	9,476	12,605	

$(k-1) x_{v,1}$

k	$\nu = 0$	$\nu = 1/2$	$\nu = 1$	$\nu = 3/2$	$\nu = 2$	$\nu = 5/2$
1	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416
1,2	3,1403	3,1416	3,1455	3,1521	3,1613	3,1731
1,5	3,1351	3,1416	3,1609	3,1929	3,2371	3,2931
2	3,1230	3,1416	3,1966	3,2860	3,4069	3,5558
3	3,097	3,1416	3,271	3,474	3,736	4,041
4	3,073	3,1416	3,336	3,629	3,990	4,393
5	3,053	3,1416	3,389	3,749	4,177	4,640
6	3,035	3,1416	3,432	3,844	4,317	4,816
7	3,019	3,1416	3,468	3,918	4,424	4,947
8	3,006	3,1416	3,499	3,979	4,507	5,047
9	2,994	3,1416	3,525	4,029	4,574	5,125
10	2,983	3,1416	3,547	4,070	4,628	5,188
11	2,973	3,1416	3,566	4,105	4,673	5,240
19	2,92	3,1416	3,66	4,26	4,87	5,46
39	2,85	3,1416	3,74	4,38	5,00	5,62
∞	2,4048	3,1416	3,8317	4,4934	5,1356	5,7635

6. Функциональные уравнения

В дальнейшем $Z_\nu(z)$ и $\overline{Z}_\nu(z)$ означают любую из функций $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(e)}(z)$ или линейную комбинацию этих функций с постоянными (не зависящими от индекса ν) коэффициентами.

6.1. Для $Z_\nu(z)$ при различных значениях порядка выполняются соотношения

$$zZ_{\nu-1}(z) + zZ_{\nu+1}(z) = 2\nu Z_\nu(z), \quad Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) = 2Z'_\nu(z).$$

Согласно Н. Нильсену, каждое аналитическое по переменным z, ν решение этих уравнений называется цилиндрической функцией $\mathfrak{U}_\nu(z)$; оно является также и

решением дифференциального уравнения Бесселя. Функции $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ являются цилиндрическими функциями $\mathfrak{E}_\nu(z)$ в смысле Нильсена. Однако решение $J_{-\nu}(z)$ дифференциального уравнения Бесселя, также соответствующее параметру ν , должно быть обозначено не через $\mathfrak{E}_\nu(z)$, а через $\mathfrak{E}_{-\nu}(z)$.

Справедливы следующие формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} Z'_\nu(z) &= -\frac{\nu}{z} Z_\nu(z) + Z_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) - Z_{\nu+1}(z), \\ Z'_0(z) &= -Z_1(z), \quad Z'_1(z) = Z_0(z) - \frac{1}{z} Z_1(z), \\ \frac{d}{dz} [z^\nu Z_\nu(\alpha z)] &= \alpha z^\nu Z_{\nu-1}(\alpha z), \quad \frac{d}{dz} [z^{-\nu} Z_\nu(\alpha z)] = -\alpha z^{-\nu} Z_{\nu+1}(\alpha z), \\ \frac{d}{dz} [z^{\frac{\nu}{2}} Z_\nu(\sqrt{\alpha z})] &= \frac{\sqrt{\alpha}}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} Z_{\nu-1}(\sqrt{\alpha z}), \\ \frac{d}{dz} [z^{-\frac{\nu}{2}} Z_\nu(\sqrt{\alpha z})] &= -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} z^{-\frac{\nu+1}{2}} Z_{\nu+1}(\sqrt{\alpha z}). \end{aligned}$$

6.2. Между функциями J , N и H существуют соотношения

$$\begin{aligned} J_\nu(z) J_{-\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) J_{-\nu}(z) &= \frac{2 \sin \nu \pi}{\pi z}, \quad N_{\nu-1}(z) J_\nu(z) - N_\nu(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z}, \\ J_{\nu-1}(z) H_\nu^{(1)}(z) - J_\nu(z) H_{\nu-1}^{(1)}(z) &= \frac{2}{\pi i z}, \quad H_{\nu-1}^{(2)}(z) J_\nu(z) - H_\nu^{(2)}(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi i z}. \end{aligned}$$

6.3. Теорема сложения. Пусть a , b , c — стороны и α , β , γ — углы треугольника, так что

$$ce^{i\beta} = a - be^{-i\gamma},$$

или же комплексные величины, в которые эти шесть действительных величин можно непрерывно преобразовать таким образом, чтобы выполнялось указанное выше соотношение. Тогда имеем:

$$Z_\nu(c) e^{i\nu\beta} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_{\nu+k}(a) J_k(b) e^{ik\gamma} \quad \text{для} \quad |be^{\pm i\gamma}| < |a|.$$

При $\beta=0$, $\gamma=\pi$, $|b| < |a|$ имеем:

$$Z_\nu(a+b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_{\nu-k}(a) J_k(b),$$

а при

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad |b| < |a|$$

справедливы равенства:

$$\begin{aligned} Z_\nu(\sqrt{a^2 + b^2}) \cos \nu\beta &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k Z_{\nu+2k}(a) J_{2k}(b), \\ Z_\nu(\sqrt{a^2 + b^2}) \sin \nu\beta &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k Z_{\nu+2k+1}(a) J_{2k+1}(b). \end{aligned}$$

В частности,

$$J_\nu(z+w) = \left(1 + \frac{w}{z}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k w^k}{k!} \left(1 + \frac{w}{2z}\right)^k J_{\nu+k}(z).$$

6.4. Теорема умножения:

$$Z_\nu(\lambda z) = \lambda^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_{\nu+k}(z)}{k!} \left(\frac{1-\lambda^2}{2} z \right)^k.$$

В случае, когда $Z_\nu = J_\nu$, λ может быть произвольным; во всех остальных случаях должно быть $|1-\lambda^2| < 1$.

6.5. Формулы интегрирования:

$$\int J_\nu(z) dz = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{\nu+2k+1}(z),$$

$$\int z^{\nu+1} Z_\nu(z) dz = z^{\nu+1} Z_{\nu+1}(z), \quad \int z^{-\nu+1} Z_\nu(z) dz = -z^{-\nu+1} Z_{\nu-1}(z),$$

$$\int Z_1(z) dz = -Z_0(z), \quad \int z Z_0(z) dz = z Z_1(z),$$

$$\begin{aligned} \int \left[(\alpha^2 - \beta^2) z - \frac{\mu^2 - \nu^2}{z} \right] Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\beta z) dz = \\ = \beta z Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_{\nu-1}(\beta z) - \alpha z Z_{\mu-1}(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\beta z) + (\mu - \nu) Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\beta z), \end{aligned}$$

$$\int z Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\mu(\beta z) dz = \frac{\beta z Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_{\mu-1}(\beta z) - \alpha z Z_{\mu-1}(\alpha z) \bar{Z}_\mu(\beta z)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$\int z [Z_\mu(\alpha z)]^2 dz = \frac{z^2}{2} \{ [Z_\mu(\alpha z)]^2 - Z_{\mu-1}(\alpha z) Z_{\mu+1}(\alpha z) \},$$

$$\int \frac{1}{z} Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\alpha z) dz = \alpha z \frac{Z_{\mu-1}(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\alpha z) - Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_{\nu-1}(\alpha z)}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\alpha z)}{\mu + \nu}.$$

7. Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешимые в функциях Бесселя*).

$$w'' + \frac{1-2\alpha}{z} w' + \left[(\beta \gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \right] w = 0, \quad w = z^\alpha Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'' + \left[(\beta \gamma z^{\gamma-1})^2 - \frac{4\nu^2 \gamma^2 - 1}{4z^2} \right] w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'' + \left(\beta^2 - \frac{4\nu^2 - 1}{4z^2} \right) w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_\nu(\beta z);$$

$$w'' + \frac{1-2\alpha}{z} w' + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = z^\alpha Z_\nu(\beta z);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left[(\beta \gamma z^{\gamma-1})^2 - \left(\frac{\nu \gamma}{z} \right)^2 \right] w = 0, \quad w = Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(\beta z);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(z);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(iz);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(i - \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(z \sqrt{i});$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' - \left(i + \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(z \sqrt{-i});$$

*) Более подробный список уравнений, разрешимых в бесселевых функциях, можно найти в книге Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1961. — Прим. ред.

$$w'' + \frac{1}{z} w' - \left[\frac{1}{z} + \left(\frac{\nu}{2z} \right)^2 \right] w = 0, \quad w = Z_\nu(2i\sqrt{z});$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + me^{i\mu} w = 0, \quad w = Z_0(\sqrt{m}ze^{i\frac{\mu}{2}});$$

$$w'' + \left(me^{i\mu} + \frac{1}{4z^2} \right) w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_0(\sqrt{m}ze^{i\frac{\mu}{2}});$$

$$w'' + bz^m w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_{\frac{1}{m+2}} \left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2} z^{\frac{m+2}{2}} \right);$$

$$w'' + bz w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2\sqrt{b}}{3} \sqrt{z^3} \right); \quad w'' + bz^2 w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{b}}{2} z^2 \right);$$

$$w'' + \left(\frac{1-2\alpha}{z} \mp 2\beta\gamma iz^{\gamma-1} \right) w' + \left[\frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \mp \beta\gamma(\gamma-2\alpha) iz^{\gamma-2} \right] w = 0, \\ w = z^\alpha e^{\pm i\beta z^\gamma} Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'' + \left(\frac{1}{z} \mp 2i \right) w' - \left(\frac{\nu^2}{z^2} \pm \frac{i}{z} \right) w = 0, \quad w = e^{\pm iz} Z_\nu(z);$$

$$w'' + w' + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{z^2} w = 0, \quad w = \sqrt{z} e^{-\frac{z}{2}} Z_\nu \left(\frac{iz}{2} \right);$$

$$w'' + \left(\frac{2\nu+1}{z} - k \right) w' - \frac{2\nu-1}{2z} k w = 0, \quad w = \frac{e^{\frac{kz}{2}}}{z^\nu} Z_\nu \left(\frac{ikz}{2} \right);$$

$$w'' + \left(\frac{1}{z} - 2 \operatorname{tg} z \right) w' - \left(\frac{\nu^2}{z^2} + \frac{\operatorname{tg} z}{z} \right) w = 0, \quad w = \frac{1}{\cos z} Z_\nu(z);$$

$$w'' + \left(\frac{1}{z} + 2 \operatorname{ctg} z \right) w' - \left(\frac{\nu^2}{z^2} - \frac{\operatorname{ctg} z}{z} \right) w = 0, \quad w = \frac{1}{\sin z} Z_\nu(z);$$

$$w'' + \left(\frac{1}{z} - 2u \right) w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} + u^2 - u' - \frac{u}{z} \right) w = 0, \quad w = e^{\int u dz} Z_\nu(z);$$

$$w'''' + \frac{3}{2} w'' + \left(4 + \frac{1-4\nu^2}{z^2} \right) w' + \frac{4}{z} w = 0,$$

$$w = A[J_\nu(z)]^2 + BJ_\nu(z)N_\nu(z) + C[N_\nu(z)]^2 \equiv Q_\nu(z);$$

$$w'''' + \frac{3(1-\alpha)}{z} w'' + \left(\frac{1-4\nu^2\gamma^2+3\alpha(\alpha-1)}{z^2} + 4\beta^2\gamma^2 z^{2\gamma-2} \right) w' + \\ + \left(\frac{\alpha(4\nu^2\gamma^2-\alpha^2)}{z^3} + 4\beta^2\gamma^2(\gamma-\alpha) z^{2\gamma-3} \right) w = 0, \quad w = z^\alpha Q_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'''' + z^{2\gamma-2} w' + (\gamma-1) z^{2\gamma-3} w = 0, \quad w = z Q_{\frac{1}{2\gamma}} \left(\frac{z\gamma}{2\gamma} \right);$$

$$w^{IV} + \frac{4-2\nu}{z} w'''' + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{z^2} w'' - \frac{b^4}{16z^2} w = 0, \quad w = z^{\frac{\nu}{2}} [Z_\nu(b\sqrt{z}) + \bar{Z}_\nu(ib\sqrt{z})];$$

$$w^{IV} + \frac{4\nu-2}{\nu z} w'''' + \frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{\nu^2 z^2} w'' - \frac{b^4}{16\nu^4} z^{\frac{2}{\nu}-4} w = 0,$$

$$w = \sqrt{z} [Z_\nu(bz^{\frac{1}{2\nu}}) + \bar{Z}_\nu(ibz^{\frac{1}{2\nu}})];$$

$$w^{IV} + \frac{6}{z} w'''' + \left(4 + \frac{7-2\nu^2-2\mu^2}{z^2} \right) w'' + \left(\frac{16}{z} + \frac{1-2\nu^2-2\mu^2}{z^3} \right) w' + \\ + \left(\frac{8}{z^2} + \frac{(\nu^2-\mu^2)^2}{z^4} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(z) \bar{Z}_\mu(z).$$

В. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

1. Определения и обозначения

В приложениях часто играют роль бесселевы функции, рассматриваемые вдоль прямых, проходящих через нулевую точку ($\arg z = \text{const}$). Поэтому выгодно «видоизменить» эти функции поворотом системы координат так, чтобы действительная ось совпала с вышеупомянутой прямой. Два наиболее важных случая соответствуют поворотам на 90° и 135° ; для соответствующих *модифицированных (видоизмененных) функций* употребляют специальные обозначения.

При повороте на 90° получаем бесселевы функции $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$; при повороте на 135° получаем функции Кельвина $\text{ber}_\nu(z)$, $\text{bei}_\nu(z)$, $\text{ker}_\nu(z)$, $\text{kei}_\nu(z)$.

2. Функции $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$

2.1. Повороту на 90° соответствуют функции Бесселя $Z_\nu(iz)$. Они являются решениями дифференциального уравнения

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0.$$

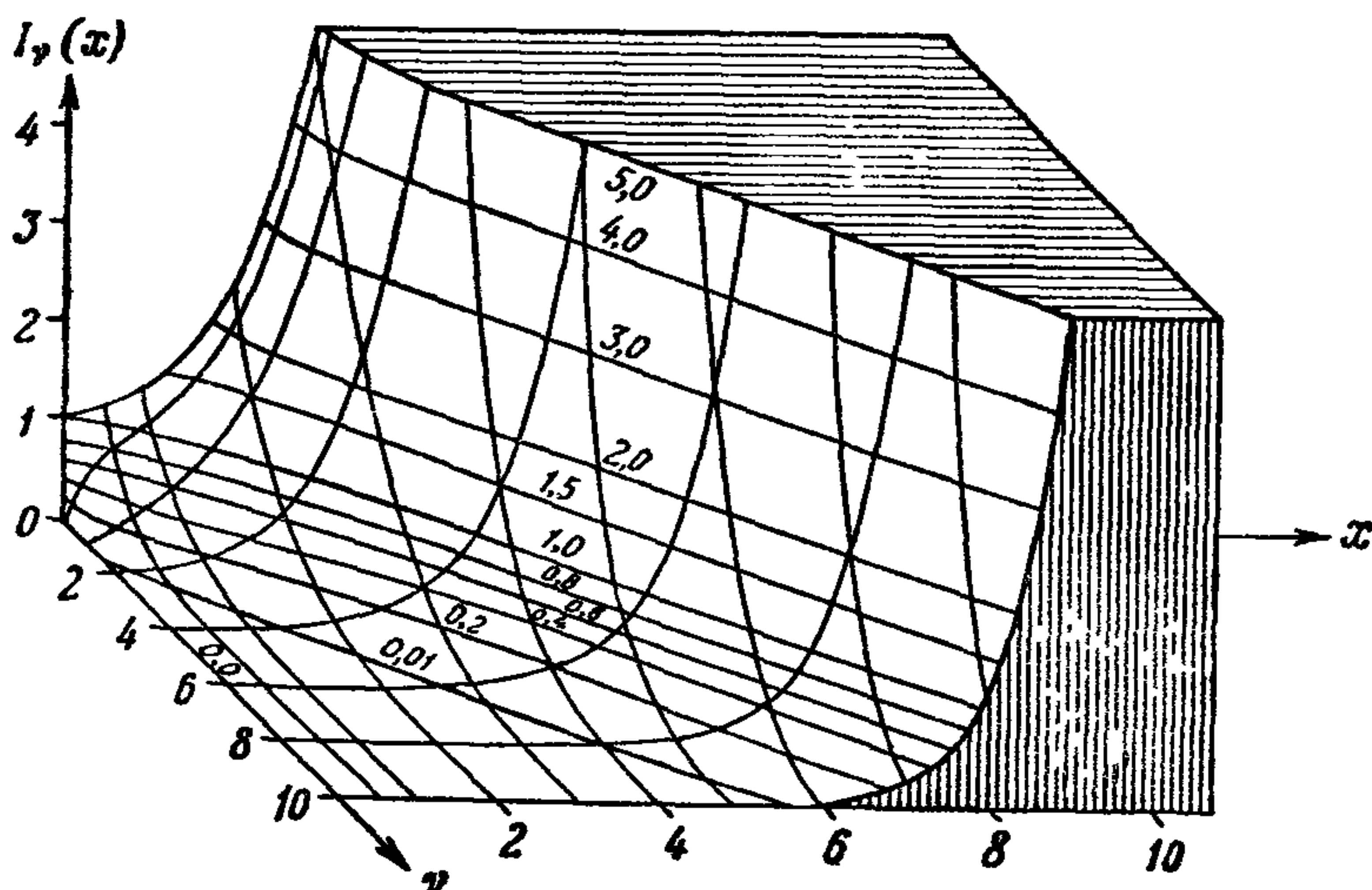


Рис. 144. Поверхность модифицированной функции Бесселя $I_\nu(x)$ над плоскостью действительных переменных ν , x .

Исходя из функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$, определяют модифицированные функции Бесселя *)

$$I_\nu(z) = e^{-\nu \frac{\pi}{2} i} J_\nu(z e^{\frac{\pi}{2} i}) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)},$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\nu \frac{\pi}{2} i} H_\nu^{(1)}(z e^{\frac{\pi}{2} i}) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\nu \frac{\pi}{2} i} H_\nu^{(2)}(z e^{-\frac{\pi}{2} i}).$$

При этом $I_{-n}(z) = I_n(z)$, $K_{-n}(z) = K_n(z)$ и для нецелых ν

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)].$$

*) Первую из них иногда называют функцией Бесселя мнимого аргумента, а вторую — функцией Макдональда или модифицированной функцией Ганкеля. — Прим. ред.

Разложение в ряды для $K_\nu(z)$ при нецелочисленном порядке ν получается из разложения для $I_\nu(z)$. В случае целого $\nu = n$ имеем:

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln \left(\frac{\gamma z}{2} \right) + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{n+k} \frac{1}{l} \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(γ — константа Эйлера).

Если порядок действителен и аргумент $z = x > 0$, то обе функции принимают действительные значения (рис. 144—149, таблицы 53—56). При $0 < x \ll 1$ их поведение описывается формулами

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^\nu; \quad K_0(x) \approx \ln \frac{2}{\gamma x}; \quad K_n(x) \approx \frac{1}{2} \Gamma(n) \left(\frac{2}{x} \right)^n, \quad n=1, 2, \dots$$

При $x \gg 1$ функция $I_\nu(x)$ возрастает по показательному закону, а $K_\nu(x)$ убывает по показательному закону.

2.2. Дальнейшие представления и свойства функций $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ получаются из представлений и свойств $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ на основании определений.

Обе функции, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$, многозначны и после m обходов вокруг точки ветвления $z=0$ получают значения

$$I_\nu(e^{m\pi i} z) = e^{m\nu\pi i} I_\nu(z), \\ K_\nu(e^{m\pi i} z) = e^{-m\nu\pi i} K_\nu(z) - i\pi \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} I_\nu(z) \quad (m — целое);$$

в частности, $I_n(-z) = (-1)^n I_n(z)$.

Справедливы формулы:

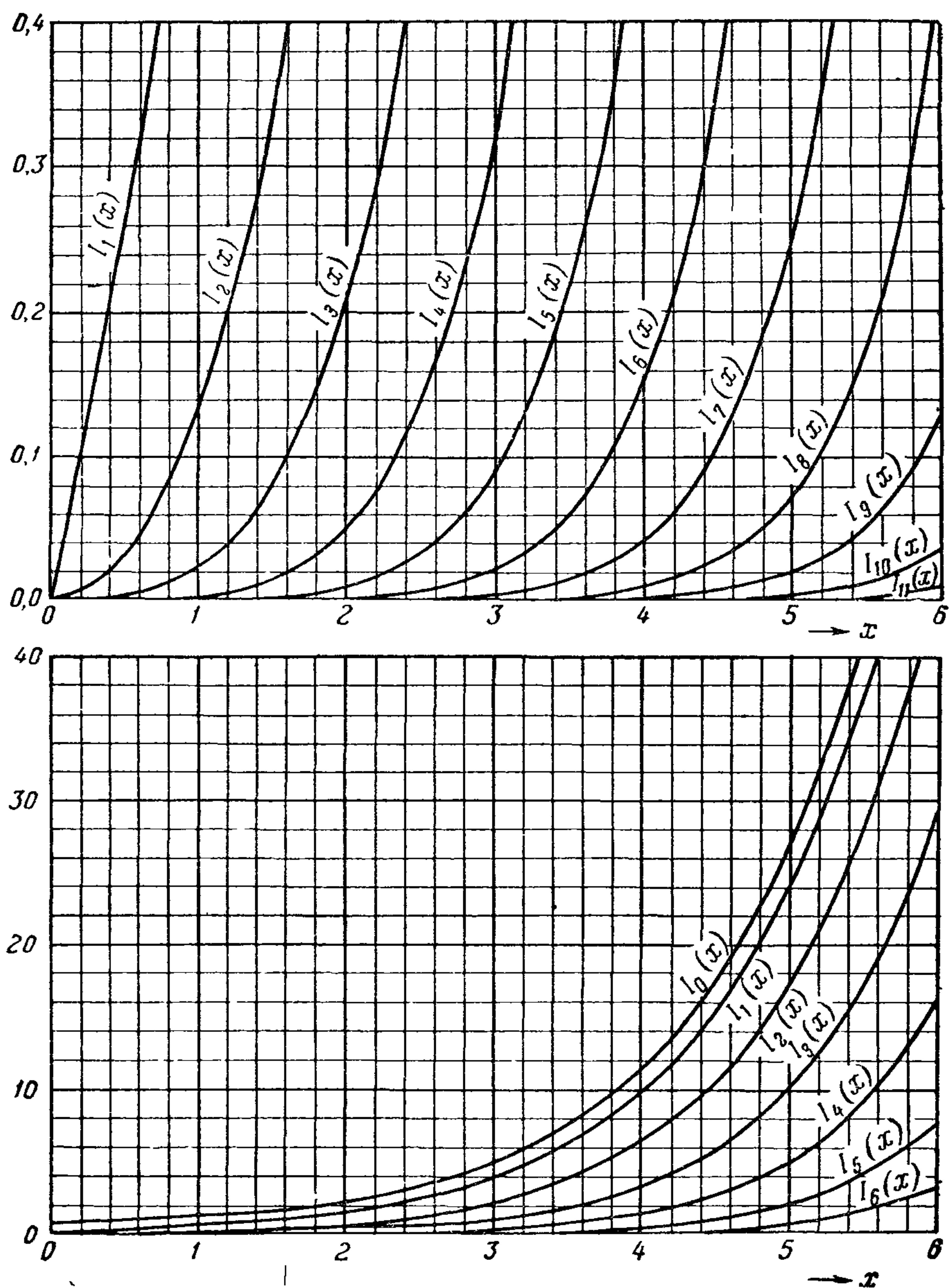
$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \\ 2I'_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z), \\ -2K'_\nu(z) = K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z), \\ I'_0(z) = I_1(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z), \\ I_\nu(z) K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z) K_\nu(z) = \frac{1}{z}.$$

О нулях этих функций см. рис. 150—154, таблицу 57.

Корень уравнения $H_1^{(2)'}(z) = 0$ или $H_1^{(2)}(z) = zH_0^{(2)}(z)$ равен

$$z = 0,5012 + i0,6435 = re^{i\varphi},$$

где $r = 0,8156$, $\varphi = 52^\circ,085 = 0,9091$ радиана.

Рис. 145 и 146. Модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$.

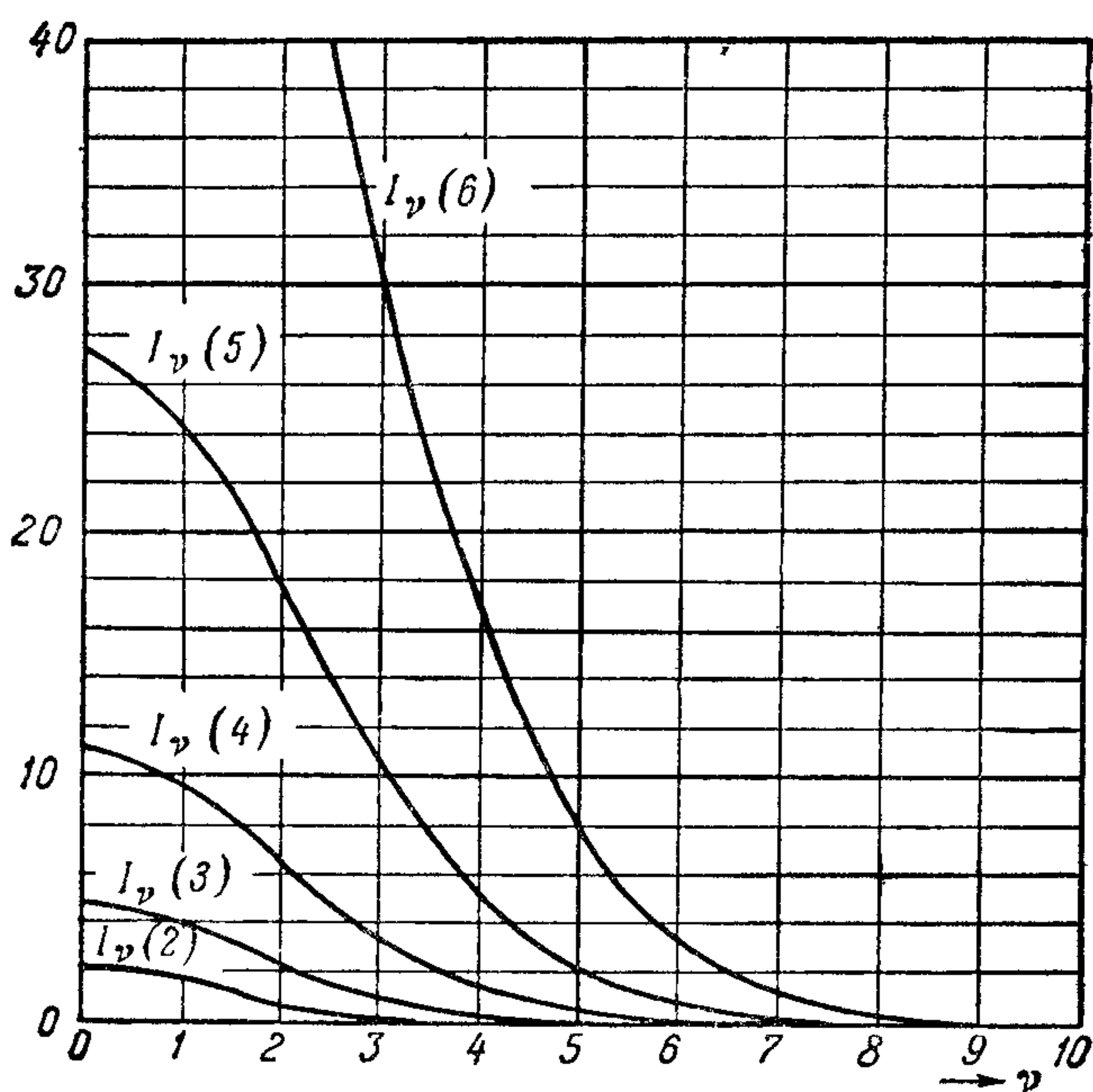
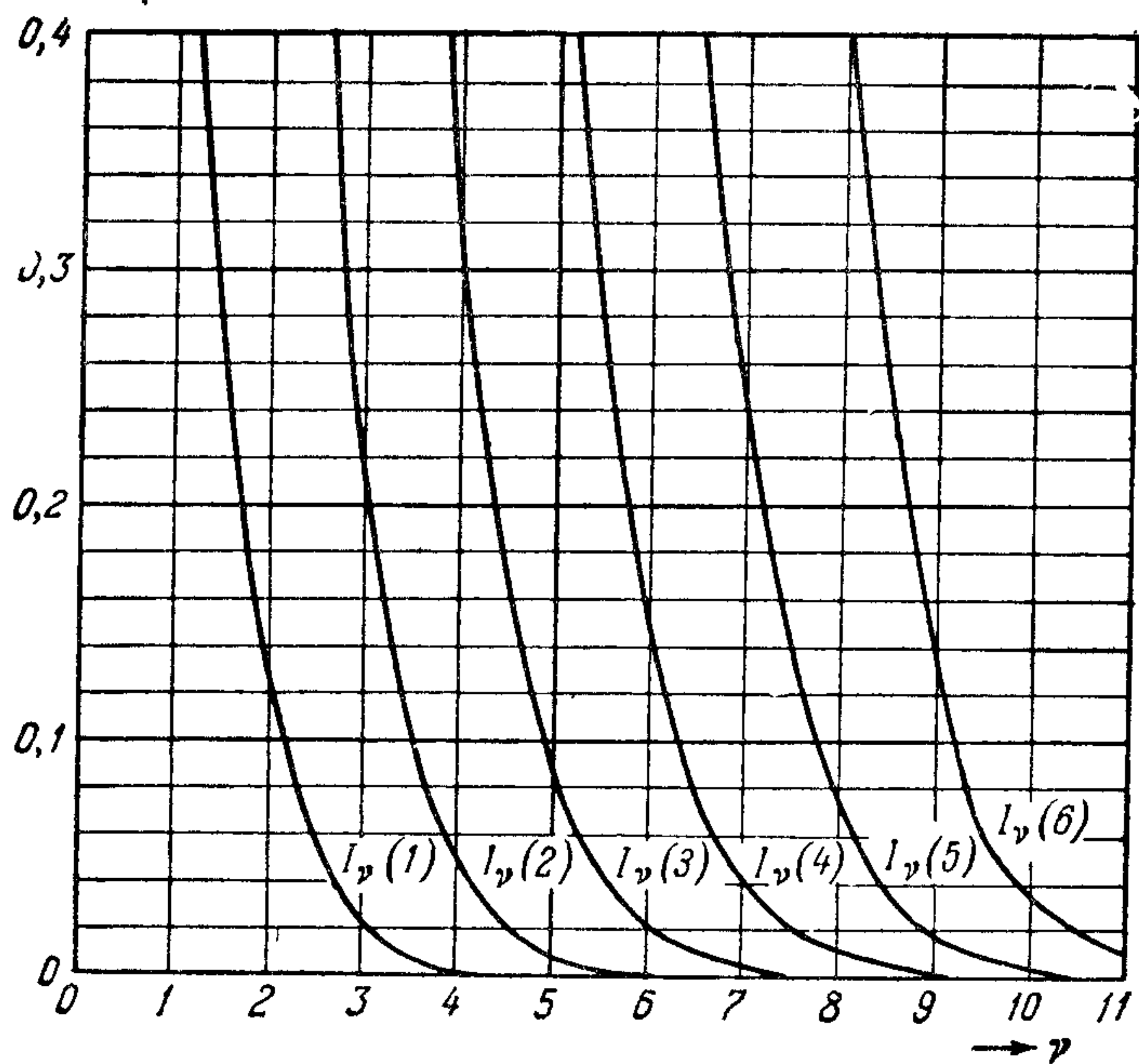


Рис 147 и 148. Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(n)$ при постоянном аргументе и переменном порядке.

Т а б л и ц а 53. Модифицированные функции Бесселя $I_0(x)$ и $I_1(x)$

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$
0,00	1, 0000	0, 0000	1,00	1, 2661	0, 5652	2,00	2,280	1,5906
02	+ 0,5 0001	+ 50 0100	02	+ 57 2775	+ 70,5 5793	02	+ 16 2,312	+ 150 1,6206
04	1,5 0004	50 0200	04	58,5 2892	71 5935	04	16 2,344	152 1,6510
06	2,5 0009	50 0300	06	60,5 3013	72,5 6080	06	17 2,378	155 1,6820
08	3,5 0016	50 0400	08	61,5 3136	73,5 6227	08	17 2,412	157,5 1,7135
	4,5	50,5		63	74		17	160
0,10	+ 5,5 0025	+ 50 0501	1,10	+ 64,5 3262	+ 75 6375	2,10	+ 18 2,446	+ 16,5 1,745
12	6,5 0036	50,5 0601	12	66 3391	76 6525	12	17,5 2,482	16,5 1,778
14	7,5 0049	50,5 0702	14	67,5 3523	77,5 6677	14	18,5 2,517	17 1,811
16	8,5 0064	50,5 0803	16	69 3658	78 6832	16	18,5 2,554	17 1,845
18	9,5 0081	50,5 0904	18	70,5 3796	79,5 6988	18	19 2,591	17,5 1,879
0,20	+ 10,5 0100	+ 51 1005	1,20	+ 72,5 3937	+ 80,5 7147	2,20	+ 19,5 2,629	+ 18 1,914
22	12 0121	51 1107	22	74 4082	81 7308	22	19,5 2,668	18 1,950
24	12,5 0145	51 1209	24	75,5 4230	83 7470	24	20 2,707	18 1,986
26	13,5 0170	51,5 1311	26	77 4381	83,5 7636	26	20,5 2,747	19 2,022
28	14,5 0197	51,5 1414	28	79 4535	85 7803	28	21 2,788	19 2,060
0,30	+ 16 0226	+ 52 1517	1,30	+ 80,5 4693	+ 86,5 7973	2,30	+ 21 2,830	+ 19 2,098
32	16,5 0258	52 1621	32	82,5 4854	87,5 8146	32	21,5 2,872	20 2,136
34	18 0291	52 1725	34	84 5019	88,5 8321	34	22 2,915	20 2,176
36	18,5 0327	53 1829	36	86 5187	90 8498	36	22,5 2,959	20,5 2,216
38	20 0364	52,5 1935	38	87,5 5359	91,5 8678	38	22,5 3,004	20,5 2,257
0,40	+ 21 0404	+ 53,5 2040	1,40	+ 89,5 5534	+ 92,5 8861	2,40	+ 23,5 3,049	+ 21 2,298
42	22 0446	53,5 2147	42	91,5 5713	94,5 9046	42	23,5 3,096	21,5 2,340
44	23 0490	53,5 2254	44	93 5896	95,5 9235	44	24 3,143	22 2,383
46	24 0536	54,5 2361	46	95,5 6082	97 9426	46	24,5 3,191	22 2,427
48	25,5 0584	54,5 2470	48	97 6273	98,5 9620	48	25 3,240	23 2,471
0,50	+ 26,5 0635	+ 55 2579	1,50	+ 99,5 6467	+ 100 9817	2,50	+ 25,5 3,290	+ 23 2,517
52	27 0688	55,5 2689	52	101 6666	101,5 *0017	52	25,5 3,341	23,5 2,563
54	29 0742	55,5 2800	54	103 6868	103 0220	54	26,5 3,392	23,5 2,610
56	29,5 0800	56,5 2911	56	105,5 7074	104,5 0426	56	27 3,445	24,5 2,657
58	30,5 0859	56,5 3024	58	107,5 7285	106,5 0635	58	27 3,499	24,5 2,706
0,60	+ 32 0920	+ 57 3137	1,60	+ 109,5 7500	+ 108 0848	2,60	+ 28 3,553	+ 25,5 2,755
62	33,5 0984	58 3251	62	111,5 7719	110 1064	62	28,5 3,609	25,5 2,806
64	34 1051	58 3367	64	114 7942	111,5 1284	64	28,5 3,666	26 2,857
66	35,5 1119	58,5 3483	66	116,5 8170	113 1507	66	29,5 3,723	26,5 2,909
68	36,5 1190	59,5 3600	68	118,5 8403	115 1733	68	30 3,782	27 2,962
0,70	+ 38 1263	+ 59,5 3719	1,70	+ 12 864	+ 117 1963	2,70	+ 30,5 3,842	+ 27,5 3,016
72	39 1339	60,5 3838	72	12,5 888	119 2197	72	31 3,903	28 3,071
74	40 1417	61 3959	74	12,5 913	121 2435	74	31,5 3,965	28,5 3,127
76	41,5 1497	61,5 4081	76	12,5 938	122,5 2677	76	32 4,028	29 3,184
78	42,5 1580	62,5 4204	78	13,5 963	125 2922	78	32,5 4,092	29,5 3,242
0,80	+ 44 1665	+ 62,5 4329	1,80	+ 13 990	+ 126,5 3172	2,80	+ 33,5 4,157	+ 30 3,301
82	45 1753	63,5 4454	82	13,5 *016	129 3425	82	34 4,224	30,5 3,361
84	46,5 1843	64,5 4581	84	14 043	131 3683	84	34,5 4,292	31,5 3,422
86	48 1936	65 4710	86	14 071	133,5 3945	86	35 4,361	31,5 3,485
88	49 2032	65,5 4840	88	14,5 099	135 4212	88	36 4,431	32,5 3,548
0,90	+ 50,5 2130	+ 66,5 4971	1,90	+ 14,5 128	+ 138 4482	2,90	+ 36,5 4,503	+ 32,5 3,613
92	51,5 2231	67,5 5104	92	15 157	140 4758	92	37 4,576	33,5 3,678
94	53 2334	68 5239	94	15 187	142,5 5038	94	37,5 4,650	34 3,745
96	54,5 2440	68,5 5375	96	15,5 217	144,5 5323	96	38,5 4,725	35 3,813
98	56 2549	70 5512	98	16 248	147 5612	98	39,5 4,802	35 3,883
1,00	2661 1,	5652 0,	2,00	280 2,	5906 1,	3,00	4,881	3,953

Продолжение табл. 53

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$
3.00	4.881 + 40	3.953 + 36	4.00	11.302 + 98.5	9.759 + 89.5	5.00	27.24 + 24.5	24.34 + 22.5
02	4.961 40.5	4.025 36.5	02	11.499 100	9.938 91.5	02	27.73 25	24.79 23
04	5.042 41.5	4.098 37.5	04	11.699 102.5	10.121 92.5	04	28.23 25.5	25.25 23.5
06	5.125 42	4.173 38	06	11.904 104	10.306 94.5	06	28.74 26	25.72 23.5
08	5.209 42.5	4.249 38.5	08	12.112 106	10.495 96.5	08	29.26 26.5	26.19 24.5
3.10	5.294 + 44	4.326 + 39.5	4.10	12.324 + 107.5	10.688 + 98	5.10	29.79 + 27	26.68 + 25
12	5.382 44.5	4.405 40	12	12.539 110	10.884 100	12	30.33 27.5	27.18 25
14	5.471 45	4.485 41	14	12.759 112	11.084 101.5	14	30.88 27.5	27.68 26
16	5.561 46	4.567 41.5	16	12.983 113.5	11.287 103.5	16	31.43 28.5	28.20 26
18	5.653 47	4.650 42	18	13.210 116	11.494 106	18	32.00 29	28.72 26.5
3.20	5.747 + 48	4.734 + 43	4.20	13.442 + 118.5	11.706 + 107.5	5.20	32.58 + 29.5	29.25 + 27.5
22	5.843 48.5	4.820 44	22	13.679 120	11.921 109.5	22	33.17 30.5	29.80 27.5
24	5.940 49.5	4.908 44.5	24	13.919 122.5	12.140 111.5	24	33.78 30.5	30.35 28.5
26	6.039 50.5	4.997 45.5	26	14.164 125	12.363 113.5	26	34.39 31	30.92 28.5
28	6.140 51.5	5.088 46.5	28	14.414 127	12.590 116	28	35.01 32	31.49 29.5
3.30	6.243 + 52	5.181 + 47	4.30	14.668 + 129.5	12.822 + 118	5.30	35.65 + 32.5	32.08 + 30
32	6.347 53.5	5.275 48	32	14.927 131.5	13.058 120	32	36.30 33	32.68 30.5
34	6.454 54	5.371 49	34	15.190 134.5	13.298 122.5	34	36.96 33.5	33.29 31
36	6.562 55	5.469 50	36	15.459 136.5	13.543 124.5	36	37.63 34	33.91 31.5
38	6.672 56.5	5.569 50.5	38	15.732 139	13.792 127	38	38.31 35	34.54 32
3.40	6.785 + 57	5.670 + 51.5	4.40	16.010 + 142	14.046 + 129.5	5.40	39.01 + 35.5	35.18 + 33
42	6.899 58.5	5.773 53	42	16.294 144.5	14.305 132	42	39.72 36	35.84 33.5
44	7.016 59	5.879 53.5	44	16.583 147	14.569 134	44	40.44 37	36.51 34
46	7.134 60.5	5.986 54.5	46	16.877 149.5	14.837 137	46	41.18 37.5	37.19 34.5
48	7.255 61.5	6.095 55.5	48	17.176 152.5	15.111 139	48	41.93 38	37.88 35.5
3.50	7.378 + 62.5	6.206 + 56.5	4.50	17.48 + 15.5	15.389 + 142	5.50	42.69 + 39	38.59 + 36
52	7.503 64	6.319 57.5	52	17.79 16	15.673 144.5	52	43.47 40	39.31 36.5
54	7.631 65	6.434 59	54	18.11 16	15.962 147.5	54	44.27 40.5	40.04 37.5
56	7.761 66	6.552 59.5	56	18.43 16.5	16.257 150	56	45.08 41	40.79 38
58	7.893 67.5	6.671 61	58	18.76 16.5	16.557 153	58	45.90 42	41.55 39
3.60	8.028 + 68.5	6.793 + 62	4.60	19.09 + 17	16.86 + 15.5	5.60	46.74 + 42.5	42.33 + 39.5
62	8.165 69.5	6.917 63	62	19.43 17.5	17.17 16	62	47.59 43.5	43.12 40.5
64	8.304 71.5	7.043 64	64	19.78 17.5	17.49 16	64	48.46 44.5	43.93 41
66	8.447 72	7.171 65.5	66	20.13 18	17.81 16.5	66	49.35 45	44.75 41.5
68	8.591 74	7.302 67	68	20.49 18.5	18.14 17	68	50.25 46	45.58 43
3.70	8.739 + 75	7.436 + 68	4.70	20.86 + 18.5	18.48 + 17	5.70	51.17 + 47	46.44 + 43
72	8.889 76	7.572 69	72	21.23 19	18.82 17.5	72	52.11 47.5	47.30 44.5
74	9.041 78	7.710 70.5	74	21.61 19.5	19.17 17.5	74	53.06 49	48.19 45
76	9.197 79.5	7.851 71.5	76	22.00 19.5	19.52 18	76	54.04 49.5	49.09 46
78	9.356 80.5	7.994 73	78	22.39 20	19.88 18.5	78	55.03 50.5	50.01 47
3.80	9.517 + 82	8.140 + 74.5	4.80	22.79 + 20.5	20.25 + 19	5.80	56.04 + 51.5	50.95 + 47.5
82	9.681 83.5	8.289 76	82	23.20 21	20.63 19	82	57.07 52	51.90 48.5
84	9.848 85.5	8.441 77	84	23.62 21	21.01 19.5	84	58.11 53.5	52.87 49.5
86	10.019 86.5	8.595 79	86	24.04 21.5	21.40 20	86	59.18 54.5	53.86 50.5
88	10.192 88.5	8.753 80	88	24.47 22	21.80 20	88	60.27 55.5	54.87 51.5
3.90	10.369 + 90	8.913 + 81.5	4.90	24.91 + 22.5	22.20 + 20.5	5.90	61.38 + 56.5	55.90 + 52.5
92	10.549 91.5	9.076 83	92	25.36 23	22.61 21	92	62.51 57	56.95 53.5
94	10.732 93.5	9.242 84.5	94	25.82 23	23.03 21.5	94	63.65 59	58.02 54
96	10.919 94.5	9.411 86.5	96	26.28 24	23.46 21.5	96	64.83 59.5	59.10 55.5
98	11.108 97	9.584 87.5	98	26.76 24	23.89 22.5	98	66.02 60.5	60.21 56.5
4.00	11.302	9.759	5.00	27.24	24.34	6.00	67.23	61.34

Продолжение табл. 53

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$
6,00	67,23 + 62	61,34 + 57,5	7,00	168,6 + 15,5	156,04 + 147,5	8,00	427,6 + 40	399,9 + 38
02	68,47 63	62,49 59	02	171,7 16,5	158,99 150,5	02	435,6 41,5	407,5 39
04	69,73 64,5	63,67 59,5	04	175,0 16	162,00 153,5	04	443,9 41,5	415,3 39,5
06	71,02 65,5	64,86 61	06	178,2 17	165,07 156,5	06	452,2 43	423,2 40,5
08	72,33 66,5	66,08 62	08	181,6 17	168,20 159	08	460,8 43,5	431,3 41
6,10	73,66 + 68	67,32 + 63	7,10	185,0 + 17	171,4 + 16	8,10	469,5 + 44,5	439,5 + 42
12	75,02 69,5	68,58 64,5	12	188,4 17,5	174,6 16,5	12	478,4 45	447,9 42,5
14	76,41 70,5	69,87 65,5	14	191,9 18	177,9 17	14	487,4 46	456,4 43,5
16	77,82 71,5	71,18 67	16	195,5 18,5	181,3 17	16	496,6 47	465,1 44,5
18	79,25 73,5	72,52 68,5	18	199,2 18,5	184,7 18	18	506,0 48	474,0 45
6,20	80,72 + 74,5	73,89 + 69	7,20	202,9 + 19	188,3 + 17,5	8,20	515,6 + 48,5	483,0 + 46,5
22	82,21 76	75,27 71	22	206,7 19,5	191,8 18,5	22	525,3 50	492,3 47
24	83,73 77,5	76,69 72	24	210,6 19,5	195,5 18,5	24	535,3 50,5	501,7 47,5
26	85,28 78,5	78,13 73,5	26	214,5 20,5	199,2 18,5	26	545,4 51,5	511,2 49
28	86,85 80,5	79,60 75	28	218,6 20,5	202,9 19,5	28	555,7 53	521,0 50
6,30	88,46 + 82	81,10 + 76,5	7,30	222,7 + 20,5	206,8 + 19,5	8,30	566,3 + 53,5	531,0 + 50,5
32	90,10 83,5	82,63 77,5	32	226,8 21,5	210,7 20	32	577,0 54,5	541,1 51,5
34	91,77 85	84,18 79,5	34	231,1 21,5	214,7 20,5	34	587,9 55,5	551,4 53
36	93,47 86,5	85,77 80,5	36	235,4 22	218,8 20,5	36	599,0 57	562,0 53,5
38	95,20 88	87,38 82,5	38	239,8 22,5	222,9 21,5	38	610,4 57,5	572,7 55
6,40	96,96 + 90	89,03 + 83,5	7,40	244,3 + 23	227,2 + 21,5	8,40	621,9 + 59	583,7 + 55,5
42	98,76 91,5	90,70 85,5	42	248,9 23,5	231,5 22	42	633,7 60	594,8 57
44	100,59 93,5	92,41 87	44	253,6 24	235,9 22,5	44	645,7 61,5	606,2 58
46	102,46 95	94,15 89	46	258,4 24	240,4 22,5	46	658,0 62,5	617,8 59
48	104,36 96,5	95,93 90,5	48	263,2 25	244,9 23,5	48	670,5 63,5	629,6 60
6,50	106,29 + 99	97,74 + 92	7,50	268,2 + 25	249,6 + 23,5	8,50	683,2 + 64,5	641,6 + 61,5
52	108,27 100,5	99,58 93,5	52	273,2 25,5	254,3 24,5	52	696,1 66	653,9 62,5
54	110,28 102	101,45 96	54	278,3 26,5	259,2 24,5	54	709,3 67,5	666,4 63,5
56	112,32 104,5	103,37 97,5	56	283,6 26,5	264,1 25	56	722,8 68,5	679,1 65
58	114,41 106,5	105,32 99	58	288,9 27	269,1 25,5	58	736,5 70	692,1 66,5
6,60	116,54 + 108	107,30 + 101,5	7,60	294,3 + 28	274,2 + 26	8,60	750,5 + 71	705,4 + 67,5
62	118,70 110,5	109,33 103	62	299,9 28	279,4 27	62	764,7 72,5	718,9 68,5
64	120,91 112,5	111,39 105	64	305,5 29	284,8 27	64	779,2 74	732,6 70,5
66	123,16 114,5	113,49 107,5	66	311,3 29	290,2 27,5	66	794,0 75,5	746,7 71
68	125,45 117	115,64 109	68	317,1 30	295,7 28	68	809,1 76,5	760,9 73
6,70	127,79 + 118,5	117,82 + 111,5	7,70	323,1 + 30,5	301,3 + 28,5	8,70	824,4 + 78,5	775,5 + 74,5
72	130,16 121,5	120,05 113	72	329,2 31	307,0 29,5	72	840,1 80	790,4 75,5
74	132,59 123,5	122,31 115,5	74	335,4 31,5	312,9 29,5	74	856,1 81	805,5 77
76	135,06 125,5	124,62 118	76	341,7 32	318,8 30,5	76	872,3 83	820,9 78,5
78	137,57 128,5	126,98 120	78	348,1 33	324,9 31	78	888,9 84,5	836,6 80,5
6,80	140,14 + 130,5	129,38 + 122	7,80	354,7 + 33,5	331,1 + 31,5	8,80	905,8 + 86	852,7 + 81,5
82	142,75 133	131,82 124,5	82	361,4 34	337,4 32	82	923,0 88	869,0 83
84	145,41 135,5	134,31 127	84	368,2 34,5	343,8 33	84	940,6 89	885,6 85
86	148,12 138	136,85 129,5	86	375,1 35,5	350,4 33,5	86	958,4 91,5	902,6 86,5
88	150,88 141	139,44 132	88	382,2 36	357,1 34	88	976,7 92,5	919,9 88
6,90	153,70 + 143,5	142,08 + 134,5	7,90	389,4 + 37	363,9 + 34,5	8,90	995,2 + 95	937,5 + 90
92	156,57 146	144,77 137	92	396,8 37	370,8 35,5	92	1014,2 96,5	955,5 91,5
94	159,49 149	147,51 139,5	94	404,2 38,5	377,9 36	94	1033,5 98	973,8 93,5
96	162,47 151,5	150,30 142	96	411,9 38,5	385,1 36,5	96	1053,1 100,5	992,5 95
98	165,50 154,5	153,14 145	98	419,6 40	392,4 37,5	98	1073,2 102	1011,5 97
7,00	168,59	156,04	8,00	427,6	399,9	9,00	1093,6	1030,9

Продолжение табл. 53

x	I ₀ (x)	I ₁ (x)	x	I ₀ (x)	I ₁ (x)	x	I ₀ (x)	I ₁ (x)
9,00	1093,6 + 104	1030,9 + 99	9,40	1595 + 15,5	1508 + 14,5	9,80	2329 + 22,5	2207 + 21,5
02	1114,4 106	1050,7 100,5	42	1626 15,5	1537 14,5	82	2374 22,5	2250 21,5
04	1135,6 108	1070,8 103	44	1657 15,5	1566 15	84	2419 23,5	2293 22
06	1157,2 110,5	1091,4 104,5	46	1688 16,5	1596 15,5	86	2466 23,5	2337 22,5
08	1179,3 112	1112,3 106,5	48	1721 16	1627 15,5	88	2513 24	2382 23
9,10	1201,7 + 114,5	1133,6 + 109	9,50	1753 + 17	1658 + 16	9,90	2561 + 24,5	2428 + 23,5
12	1224,6 117	1155,4 111	52	1787 17	1690 16,5	92	2610 25	2475 23,5
14	1248,0 118,5	1177,6 113	54	1821 17,5	1723 16,5	94	2660 25,5	2522 24,5
16	1271,7 121,5	1200,2 115	56	1856 17,5	1756 17	96	2711 26	2571 25
18	1296,0 123,5	1223,2 117,5	58	1891 18	1790 17	98	2763 26,5	2621 25
9,20	1320,7 + 125,5	1246,7 + 119,5	9,60	1927 + 18,5	1824 + 17,5	10,00	2816	2671
22	1345,8 128,5	1270,6 122	62	1964 19	1859 18			
24	1371,5 130,5	1295,0 124,5	64	2002 19	1895 18			
26	1397,6 133,5	1319,9 126,5	66	2040 19,5	1931 19			
28	1424,3 135,5	1345,2 129	68	2079 20	1969 18,5			
9,30	1451,4 + 138,5	1371,0 + 132	9,70	2119 + 20	2006 + 19,5			
32	1479,1 141	1397,4 134	72	2159 21	2045 19,5			
34	1507,3 144	1424,2 137	74	2201 21	2084 20,5			
36	1536,1 146,5	1451,6 139,5	76	2243 21,5	2125 20			
38	1565,4 149,5	1479,5 142	78	2286 21,5	2165 21			
9,40	1595,3	1507,9	9,80	2329	2207			

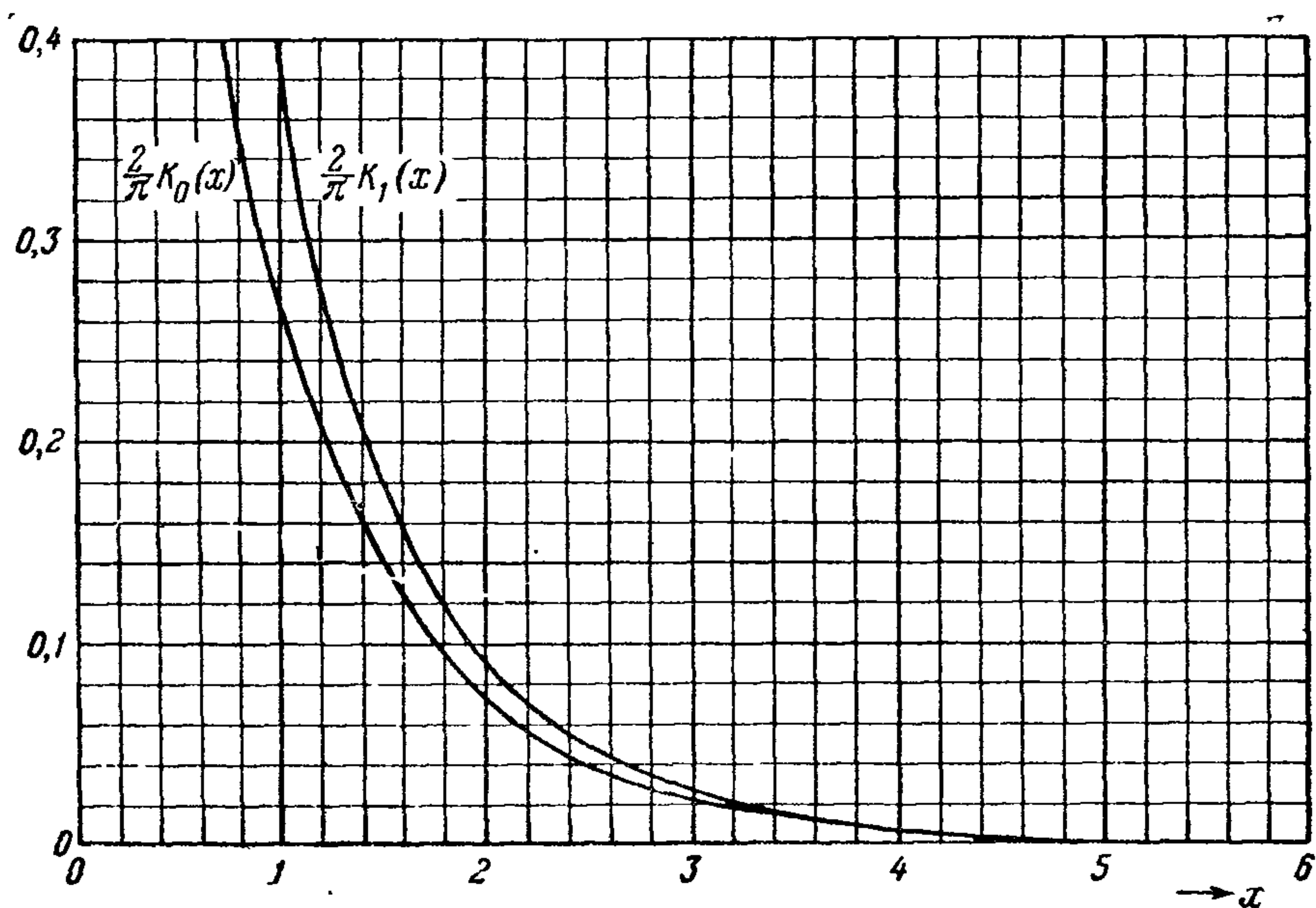


Рис. 149. Модифицированные функции Бесселя $\frac{2}{\pi} K_0(x)$ и $\frac{2}{\pi} K_1(x)$.

Т а б л и ц а 54. Модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$I_2(x)$	$I_3(x)$	$I_4(x)$	$I_5(x)$
0,0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	1,0100	0,1005	0,5017 (— 2)	0,1671 (— 3)	0,4175 (— 5)	0,8347 (— 7)
0,4	1,0404	0,2040	0,2027 (— 1)	0,1347 (— 2)	0,6720 (— 4)	0,2684 (— 5)
0,6	1,0920	0,3137	0,4637 (— 1)	0,4602 (— 2)	0,3436 (— 3)	0,2056 (— 4)
0,8	1,1665	0,4329	0,8435 (— 1)	0,1110 (— 1)	0,1101 (— 2)	0,8764 (— 4)
1,0	1,2661	0,5652	0,1357	0,2217 (— 1)	0,2737 (— 2)	0,2715 (— 3)
1,2	1,3937	0,7147	0,2026	0,3936 (— 1)	0,5801 (— 2)	0,6879 (— 3)
1,4	1,5534	0,8861	0,2875	0,6452 (— 1)	0,1103 (— 1)	0,1519 (— 2)
1,6	1,7500	1,0848	0,3940	0,9989 (— 1)	0,1937 (— 1)	0,3036 (— 2)
1,8	1,9896	1,3172	0,5260	0,1482	0,3208 (— 1)	0,5625 (— 2)
2,0	2,2796	1,5906	0,6889	0,2127	0,5073 (— 1)	0,9826 (— 2)
2,2	2,6291	1,9141	0,8891	0,2976	0,7734 (— 1)	0,1637 (— 1)
2,4	3,0493	2,2981	1,1342	0,4079	0,1145	0,2626 (— 1)
2,6	3,5533	2,7554	1,4337	0,5496	0,1654	0,4079 (— 1)
2,8	4,1573	3,3011	1,7994	0,7305	0,2341	0,6169 (— 1)
3,0	4,8808	3,9534	2,2452	0,9598	0,3257	0,9121 (— 1)
3,2	5,7472	4,7343	2,7883	1,2489	0,4466	0,1323
3,4	6,7848	5,6701	3,4495	1,6119	0,6049	0,1886
3,6	8,0277	6,7927	4,2540	2,0661	0,8105	0,2651
3,8	9,5169	8,1404	5,2325	2,6326	1,0758	0,3678
4,0	11,3019	9,7595	6,4222	3,3373	1,4163	0,5047
4,2	13,4425	11,7056	7,8684	4,2120	1,8513	0,6857
4,4	16,0104	14,0462	9,6258	5,2955	2,4046	0,9234
4,6	19,0926	16,8626	11,7611	6,6355	3,1060	1,2338
4,8	22,7937	20,2528	14,3550	8,2903	3,9921	1,6369
5,0	27,2399	24,3356	17,5056	10,3312	5,1082	2,1580
5,2	32,5836	29,2543	21,3319	12,8451	6,5106	2,8288
5,4	39,0088	35,1821	25,9784	15,9388	8,2686	3,6890
5,6	46,7376	42,3283	31,6203	19,7424	10,4678	4,7884
5,8	56,0381	50,9462	38,4704	24,4148	13,2137	6,1890
6,0	67,2344	61,3419	46,7871	30,1505	16,6366	7,9685

x	$I_6(x)$	$-I_7(x)$	$I_8(x)$	$-I_9(x)$	$I_{10}(x)$	$I_{11}(x)$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,1391 (— 8)	0,1987 (— 10)	0,2483 (— 12)	0,2758 (— 14)	0,2758 (— 16)	0,2507 (— 18)
0,4	0,8940 (— 7)	0,2552 (— 8)	0,6377 (— 10)	0,1417 (— 11)	0,2832 (— 13)	0,5148 (— 15)
0,6	0,1026 (— 5)	0,4388 (— 7)	0,1644 (— 8)	0,5473 (— 10)	0,1641 (— 11)	0,4471 (— 13)
0,8	0,5820 (— 5)	0,3316 (— 6)	0,1655 (— 7)	0,7340 (— 9)	0,2932 (— 10)	0,1065 (— 11)
1,0	0,2249 (— 4)	0,1599 (— 5)	0,9961 (— 7)	0,5518 (— 8)	0,2753 (— 9)	0,1249 (— 10)
1,2	0,6821 (— 4)	0,5809 (— 5)	0,4335 (— 6)	0,2879 (— 7)	0,1722 (— 8)	0,9365 (— 10)
1,4	0,1752 (— 3)	0,1737 (— 4)	0,1510 (— 5)	0,1168 (— 6)	0,8138 (— 8)	0,5160 (— 9)
1,6	0,3987 (— 3)	0,4506 (— 4)	0,4467 (— 5)	0,3942 (— 6)	0,3136 (— 7)	0,2270 (— 8)
1,8	0,8280 (— 3)	0,1050 (— 3)	0,1168 (— 4)	0,1157 (— 5)	0,1034 (— 6)	0,8409 (— 8)
2,0	0,1600 (— 2)	0,2246 (— 3)	0,2770 (— 4)	0,3044 (— 5)	0,3017 (— 6)	0,2722 (— 7)
2,2	0,2919 (— 2)	0,4492 (— 3)	0,6076 (— 4)	0,7329 (— 5)	0,7975 (— 6)	0,7903 (— 7)
2,4	0,5081 (— 2)	0,8497 (— 3)	0,1250 (— 3)	0,1641 (— 4)	0,1944 (— 5)	0,2098 (— 6)
2,6	0,8505 (— 2)	0,1534 (— 2)	0,2437 (— 3)	0,3456 (— 4)	0,4426 (— 5)	0,5165 (— 6)
2,8	0,1377 (— 1)	0,2664 (— 2)	0,4540 (— 3)	0,6915 (— 4)	0,9513 (— 5)	0,1193 (— 5)
3,0	0,2168 (— 1)	0,4472 (— 2)	0,8137 (— 3)	0,1324 (— 3)	0,1946 (— 4)	0,2610 (— 5)
3,2	0,3332 (— 1)	0,7295 (— 2)	0,1410 (— 2)	0,2439 (— 3)	0,3816 (— 4)	0,5446 (— 5)
3,4	0,5015 (— 1)	0,1160 (— 1)	0,2373 (— 2)	0,4347 (— 3)	0,7205 (— 4)	0,1090 (— 4)
3,6	0,7411 (— 1)	0,1806 (— 1)	0,3893 (— 2)	0,7523 (— 3)	0,1316 (— 3)	0,2103 (— 4)
3,8	0,1078	0,2755 (— 1)	0,6243 (— 2)	0,1269 (— 2)	0,2336 (— 3)	0,3929 (— 4)
4,0	0,1545	0,4133 (— 1)	0,9810 (— 2)	0,2090 (— 2)	0,4038 (— 3)	0,7131 (— 4)
4,2	0,2186	0,6105 (— 1)	0,1514 (— 1)	0,3373 (— 2)	0,6819 (— 3)	0,1261 (— 3)
4,4	0,3060	0,8894 (— 1)	0,2299 (— 1)	0,5344 (— 2)	0,1128 (— 2)	0,2178 (— 3)
4,6	0,4239	0,1280	0,3440 (— 1)	0,8324 (— 2)	0,1830 (— 2)	0,3683 (— 3)
4,8	0,5819	0,1821	0,5080 (— 1)	0,1277 (— 1)	0,2918 (— 2)	0,6109 (— 3)
5,0	0,7923	0,2565	0,7412 (— 1)	0,1932 (— 1)	0,4580 (— 2)	0,9955 (— 3)
5,2	1,0707	0,3580	0,1070	0,2885 (— 1)	0,7086 (— 2)	0,1596 (— 2)
5,4	1,4371	0,4954	0,1528	0,4260 (— 1)	0,1082 (— 1)	0,2523 (— 2)
5,6	1,9171	0,6803	0,2163	0,6222 (— 1)	0,1632 (— 1)	0,3932 (— 2)
5,8	2,5430	0,9277	0,3037	0,9000 (— 1)	0,2435 (— 1)	0,6052 (— 2)
6,0	3,3558	1,2569	0,4230	0,1290	0,3594 (— 1)	0,9207 (— 2)

Т а б л и ц а 55. Модифицированные функции Бесселя $\frac{2}{\pi} K_0(x)$ и $\frac{2}{\pi} K_1(x)$

$\frac{2}{\pi} K_0(x) = {}_1H_0^{(1)}(ix) = -{}_1H_0^{(2)}(-ix), \quad \frac{2}{\pi} K_1(x) = -H_1^{(1)}(ix) = -H_1^{(2)}(-ix)$

x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
0,00	∞	∞	1,00	0, 2680 — 37 5	0, 3832 — 64	2,00	0,0 7251 — 88	0,0 8904 — 115 5
02	+ 2,565	+ 31,802	02	2605 — 36 5	3704 — 61	02	7075 — 85 5	8673 — 112
04	2,124	15,867	04	2532 — 35	3582 — 58,5	04	6904 — 83 5	8449 — 108 5
06	1,867	10,545	06	2462 — 34,5	3465 — 56	06	6737 — 81 5	8232 — 106
08	1,685	7,878	08	2393 — 33	3353 — 54	08	6574 — 79	8020 — 103
0,10	+ 1,5451 + 249	+ 6,273	1,10	2327 — 31 5	3245 — 51 5	2,10	6416 — 77	7814 — 100
12	1,4310 176	5,200	12	2264 — 31	3142 — 50	12	6262 — 75 5	7614 — 97
14	1,3351 130	4,432	14	2202 — 30	3042 — 47 5	14	6111 — 73	7420 — 94 5
16	1,2525 100	3,854	16	2142 — 29	2947 — 46	16	5965 — 71 5	7231 — 91,5
18	1,1801 80	3,403	18	2084 — 28	2855 — 44	18	5822 — 69 5	7048 — 89 5
0,20	+ 1,1158 + 65	+ 3,0405 + 634	1,20	2028 — 27 5	2767 — 42,5	2,20	5683 — 68	6869 — 87
22	1,0581 54	2,7433 479	22	1973 — 26,5	2682 — 41	22	5547 — 66	6695 — 84 5
24	1,0057 45	2,4950 370	24	1920 — 25,5	2600 — 39,5	24	5415 — 64 5	6526 — 82
26	0,9580 39	2,2842 292	26	1869 — 24,5	2521 — 38	26	5286 — 62,5	6362 — 80
28	0,9142 34	2,1030 235	28	1820 — 24,5	2445 — 36,5	28	5161 — 61 5	6202 — 77,5
0,30	+ 0,8737 + 29	+ 1,9455 + 191	1,30	1771 — 23	2372 — 35,5	2 30	5038 — 59 5	6047 — 75,5
32	0,8362 26	1,8074 158	32	1725 — 23	2301 — 34	32	4919 — 58 5	5896 — 74
34	0,8013 23	1,6852 132	34	1679 — 22	2239 — 33	34	4802 — 56 5	5748 — 71 5
36	0,7687 21	1,5763 112	36	1635 — 21	2167 — 31,5	36	4689 — 55 5	5605 — 69 5
38	0,7382 18	1,4786 95	38	1593 — 21	2104 — 30,5	38	4578 — 54	5466 — 68
0,40	+ 0,7095 + 17	+ 1,3906 + 82	1,40	15512 — 201,5	2043 — 30	2,40	4470 — 52 5	5330 — 66
42	0,6825 15	1,3108 71	42	15109 — 195,5	1983 — 28,5	42	4365 — 51,5	5198 — 64
44	0,6571 14	1,2381 62	44	14718 — 190	1926 — 27,5	44	4262 — 50	5070 — 63
46	0,6330 13	1,1717 54	46	14338 — 184	1871 — 26,5	46	4162 — 49	4944 — 60 5
48	0,6101 + 12	1,1107 48	48	13970 — 179,5	1818 — 26	48	4064 — 47 5	4823 — 59,5
0,50	+ 0,5885 + 11	+ 1,0545 + 43	1,50	13611 — 174	1766 — 25	2,50	3969 — 46 5	4704 — 57,5
52	0,5679 — 103	1,0026 38	52	13263 — 169	1716 — 24	52	3876 — 45	4589 — 56,5
54	0,5484 97 5	0,9545 34	54	12925 — 164,5	1668 — 23 5	54	3786 — 44,5	4476 — 54,5
56	0,5297 93,5	0,9099 31	56	12596 — 160	1621 — 22,5	56	3697 — 43	4367 — 53,5
58	0,5120 88,5	0,8683 28	58	12276 — 155	1576 — 22	58	3611 — 42	4260 — 52
0,60	+ 0,4950 — 81	+ 0,8294 + 25	1,60	11966 — 151 5	15319 — 212	2,60	3527 — 41	4156 — 50,5
62	0,4788 — 78	0,7931 23	62	11663 — 146,5	14895 — 205	62	3445 — 40	4055 — 49 5
64	0,4632 74	0,7590 21	64	11370 — 143	14485 — 199	64	3365 — 39,5	3956 — 48
66	0,4484 71	0,7270 19	66	11084 — 139	14087 — 192,5	66	3286 — 38	3860 — 46 5
68	0,4342 68,5	0,6970 17	68	10806 — 135	13702 — 187	68	3210 — 37	3767 — 45 5
0,70	+ 0,4205 — 65 5	+ 0,6686 + 16	1,70	10536 — 131,5	13328 — 180 5	2,70	3136 — 36,5	3676 — 44 5
72	0,4074 — 63	0,6419 — 133,5	72	10273 — 128	12967 — 175 5	72	3063 — 35 5	3587 — 43 5
74	0,3948 60,5	0,6166 126,5	74	10017 — 124,5	12616 — 170	74	2992 — 34 5	3500 — 42
76	0,3827 58	0,5927 119,5	76	09768 — 121	12276 — 165	76	2923 — 33 5	3416 — 41
78	0,3711 56	0,5701 113	78	09526 — 118	11946 — 160	78	2856 — 33	3334 — 40
0,80	+ 0,3599 — 54	+ 0,5486 — 102	1,80	09290 — 114,5	11626 — 155	2,80	2790 — 32 5	3254 — 39
82	0,3491 — 51,5	0,5282 96,5	82	09061 — 111 5	11316 — 150 5	82	2725 — 31	3176 — 38
84	0,3388 50	0,5089 92,5	84	08838 — 109	11015 — 146	84	2663 — 31	3100 — 37
86	0,3288 48	0,4904 87,5	86	08620 — 105 5	10723 — 142	86	2601 — 29 5	3026 — 36 5
88	0,3192 46 5	0,4729 83,5	88	08409 — 103	10439 — 137,5	88	2542 — 29 5	2953 — 35
0,90	+ 0,3099 — 45	+ 0,4562 — 80	1,90	08203 — 100 5	10164 — 133,5	2,90	2483 — 28 5	2883 — 34 5
92	0,3009 43,5	0,4402 76	92	08002 — 97 5	09897 — 129 5	92	2426 — 27 5	2814 — 33 5
94	0,2922 41 5	0,4250 73	94	07807 — 95 5	09638 — 126	94	2371 — 27 5	2747 — 32,5
96	0,2839 40 5	0,4104 69 5	96	07616 — 92 5	09386 — 122	96	2316 — 26 5	2682 — 32
98	0,2758 39	0,3965 66,5	98	07431 — 90	09142 — 119	98	2263 — 25 5	2618 — 31
1,00	+ 0,2680	+ 0,3832	2,00	07251 0,	08904 0,	3,00	2212 0,0	2556 0,0

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
	0,0	0,0		$10^{-2} \times 0,$	$10^{-2} \times 0,$		$10^{-2} \times 0,$	$10^{-2} \times 0,$
3,00	2212 — 25,5	2556 — 30	4,00	7104 — 78,5	7947 — 89,5	5,00	2350 — 25,5	2575 — 28,5
02	2161 — 24,5	2496 — 29,5	02	6947 — 76,5	7768 — 88	02	2299 — 25	2518 — 27,5
04	2112 — 24	2437 — 29	04	6794 — 75	7592 — 85,5	04	2249 — 24,5	2463 — 27
06	2064 — 23,5	2379 — 28	06	6644 — 73,5	7421 — 84	06	2200 — 23,5	2409 — 26,5
08	2017 — 23	2323 — 27	08	6497 — 72	7253 — 81,5	08	2153 — 23,5	2356 — 26
3,10	1971 — 22,5	2269 — 27	4,10	6353 — 70	7090 — 80	5,10	2106 — 22,5	2304 — 25,5
12	1926 — 22	2215 — 26	12	6213 — 68,5	6930 — 78	12	2061 — 22,5	2253 — 24,5
14	1882 — 21,5	2163 — 25,5	14	6076 — 67	6774 — 76,5	14	2016 — 22	2204 — 24
16	1839 — 20,5	2112 — 24,5	16	5942 — 65,5	6621 — 74,5	16	1972 — 21	2156 — 24
18	1798 — 20,5	2063 — 24,5	18	5811 — 64	6472 — 72,5	18	1930 — 21	2108 — 23
3,20	17568 — 199,5	2014 — 23,5	4,20	5683 — 62,5	6327 — 71	5,20	1888 — 20,5	2062 — 22,5
22	17169 — 194	1967 — 23	22	5558 — 61	6185 — 69,5	22	1847 — 20	2017 — 22
24	16781 — 190	1921 — 22,5	24	5436 — 60	6046 — 68	24	1807 — 19,5	1973 — 21,5
26	16401 — 185,5	1876 — 21,5	26	5316 — 58	5910 — 66	26	1768 — 19	1930 — 21,5
28	16030 — 181	1833 — 21,5	28	5200 — 57,5	5778 — 65	28	1730 — 18,5	1887 — 20,5
3,30	15668 — 177	17900 — 208,5	4,30	5085 — 55,5	5648 — 63	5,30	16928 — 182,5	1846 — 20
32	15314 — 173	17483 — 203	32	4974 — 55	5522 — 62	32	16563 — 178,5	1806 — 20
34	14968 — 168,5	17077 — 198,5	34	4864 — 53	5398 — 60,5	34	16206 — 174,5	1766 — 19
36	14631 — 165	16680 — 193,5	36	4758 — 52,5	5277 — 59	36	15857 — 171	1728 — 19
38	14301 — 161	16293 — 189	38	4653 — 51	5159 — 57,5	38	15515 — 167	1690 — 18,5
3,40	13979 — 157,5	15915 — 184,5	4,40	4551 — 49,5	5044 — 56,5	5,40	15181 — 163,5	16531 — 180,5
42	13664 — 153,5	15546 — 180	42	4452 — 49	4931 — 55	42	14854 — 160	16170 — 176,5
44	13357 — 150	15186 — 175,5	44	4354 — 47,5	4821 — 53,5	44	14534 — 156,5	15817 — 172,5
46	13057 — 146,5	14835 — 171	46	4259 — 47	4714 — 52,5	46	14221 — 153	15472 — 168,5
48	12764 — 143,5	14493 — 167,5	48	4165 — 45,5	4609 — 51,5	48	13915 — 150	15135 — 165
3,50	12477 — 140	14158 — 163	4,50	4074 — 44,5	4506 — 50	5,50	13615 — 146	14805 — 161
52	12197 — 136,5	13832 — 159,5	52	3985 — 43,5	4406 — 49	52	13323 — 143,5	14483 — 158
54	11924 — 133,5	13513 — 155,5	54	3898 — 42,5	4308 — 48	54	13036 — 140	14167 — 154
56	11657 — 130,5	13202 — 152	56	3813 — 41,5	4212 — 47	56	12756 — 137	13859 — 151
58	11396 — 127,5	12898 — 148	58	3730 — 41	4118 — 45,5	58	12482 — 134	13557 — 147,5
3,60	11141 — 125	12602 — 144,5	4,60	3648 — 40	4027 — 45	5,60	12214 — 131,5	13262 — 144
62	10891 — 121,5	12313 — 141,5	62	3568 — 38,5	3937 — 43,5	62	11951 — 128	12974 — 141
64	10648 — 119	12030 — 138	64	3491 — 38,5	3850 — 43	64	11695 — 126	12692 — 138
66	10410 — 116	11754 — 134,5	66	3414 — 37	3764 — 41,5	66	11443 — 122,5	12416 — 135
68	10178 — 113,5	11485 — 131,5	68	3340 — 36,5	3681 — 41	68	11198 — 120	12146 — 132
3,70	09951 — 111	11222 — 128	4,70	3267 — 35,5	3599 — 39,5	5,70	10958 — 117,5	11882 — 128,5
72	09729 — 108,5	10966 — 125,5	72	3196 — 35	3520 — 39	72	10723 — 115	11625 — 126,5
74	09512 — 106	10715 — 122	74	3126 — 34	3442 — 38,5	74	10493 — 112,5	11372 — 123
76	09300 — 103,5	10471 — 119,5	76	3058 — 33	3365 — 37	76	10268 — 110,5	11126 — 121
78	09093 — 101	10232 — 116,5	78	2992 — 32,5	3291 — 36,5	78	10047 — 107,5	10884 — 118
3,80	08891 — 99	09999 — 114	4,80	2927 — 32	3218 — 35,5	5,80	09832 — 105	10648 — 115,5
82	08693 — 96,5	09771 — 111,5	82	2863 — 31	3147 — 34,5	82	09622 — 103,5	10417 — 112,5
84	08500 — 94,5	09548 — 108,5	84	2801 — 30,5	3078 — 34	84	09415 — 100,5	10192 — 110,5
86	08311 — 92	09331 — 106	86	2740 — 30	3010 — 33,5	86	09214 — 98,5	09971 — 108
88	08127 — 90,5	09119 — 103,5	88	2680 — 29	2943 — 32,5	88	09017 — 96,5	09755 — 105,5
3,90	07946 — 88	08912 — 101	4,90	2622 — 28,5	2878 — 31,5	5,90	08824 — 94,5	09544 — 103,5
92	07770 — 86	08710 — 99	92	2565 — 27,5	2815 — 31	92	08635 — 92,5	09337 — 101
94	07598 — 84	08512 — 96	94	2510 — 27,5	2753 — 30,5	94	08450 — 90,5	09135 — 98,5
96	07430 — 82,5	08320 — 94,5	96	2455 — 26,5	2692 — 29,5	96	08269 — 88	08938 — 96,5
98	07265 — 80,5	08131 — 92	98	2402 — 26	2633 — 29	98	08093 — 86,5	08745 — 94,5
4,00	07104 — 0,0	07947 — 0,0	5,00	2350 — $10^{-2} \times 0,$	2575 — $10^{-2} \times 0,$	6,00	07920 — $10^{-2} \times 0,$	08556 — $10^{-2} \times 0,$

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
	$10^{-3} \times 0,$	$10^{-3} \times 0,$		$10^{-3} \times 0,$	$10^{-3} \times 0,$		$10^{-4} \times 0,$	$10^{-4} \times 0,$
6,00	7920 — 85	8556 — 92,5	7,00	2704 — 20,5	2891 — 30,5	8,00	9325 — 98	9891 — 104,5
02	7750 82,5	8371 90,5	02	2647 28	2830 30,5	02	9129 96	9682 102
04	7585 81	8190 88,5	04	2591 27,5	2769 29,5	04	8937 93,5	9478 100,5
06	7423 79,5	8013 86,5	06	2536 26,5	2710 28,5	06	8750 92	9277 97,5
08	7264 77,5	7840 84,5	08	2483 26,5	2653 28,5	08	8566 90	9082 96
6,10	7109 — 76	7671 — 83	7,10	2430 — 25,5	2596 — 27,5	8,10	8386 — 87,5	8890 — 94
12	6957 74	7505 80,5	12	2379 25	2541 27	12	8211 86,5	8702 91,5
14	6809 73	7344 79,5	14	2329 25	2487 26,5	14	8038 84	8519 90
16	6663 71	7185 77,5	16	2279 24	2434 26	16	7870 82,5	8339 88
18	6521 69,5	7030 75,5	18	2231 23,5	2382 25,5	18	7705 81	8163 86
6,20	6382 — 68	6879 — 74	7,20	2184 — 23	2331 — 24,5	8,20	7543 — 79	7991 — 84,5
22	6246 66,5	6731 72,5	22	2138 22,5	2282 24,5	22	7385 77,5	7822 82,5
24	6113 65	6586 71	24	2093 22	2233 24	24	7230 75,5	7657 80,5
26	5983 64	6444 69,5	26	2049 22	2185 23	26	7079 74,5	7496 79
28	5855 62,5	6305 67,5	28	2005 21	2139 23	28	6930 72,5	7338 77,5
6,30	5730 — 61	6170 — 66,5	7,30	1963 — 20,5	2093 — 22	8,30	6785 — 71	7183 — 75,5
32	5608 59,5	6037 65	32	1922 20,5	2049 22	32	6643 69,5	7032 74,5
34	5489 58,5	5907 63,5	34	1881 20	2005 21	34	6504 68	6883 72,5
36	5372 57	5780 62	36	1841 19	1963 21	36	6368 67	6738 71
38	5258 56	5656 61	38	1803 19	1921 20,5	38	6234 65	6596 69
6,40	5146 — 55	5534 — 59,5	7,40	17646 — 186	1880 — 20	8,40	6104 — 64	6458 — 68
42	5036 53,5	5415 58	42	17274 182	1840 19,5	42	5976 62,5	6322 67
44	4929 52,5	5299 57	44	16910 178,5	1801 19	44	5851 61	6188 65
46	4824 51	5185 55,5	46	16553 174	1763 18,5	46	5729 60	6058 63,5
48	4722 50,5	5074 54,5	48	16205 171	1726 18,5	48	5609 59	5931 62,5
6,50	4621 — 49	4965 — 53,5	7,50	15863 — 167	16889 — 179	8,50	5491 — 57,5	5806 — 61
52	4523 48	4858 52	52	15529 163,5	16531 175,5	52	5376 56	5684 60
54	4427 47	4754 51	54	15202 160	16180 171,5	54	5264 55	5564 58,5
56	4333 46	4652 49,5	56	14882 157	15837 168	56	5154 54	5447 57,5
58	4241 45	4553 49	58	14568 153	15501 164,5	58	5046 52,5	5332 56
6,60	4151 — 44	4455 — 48	7,60	14262 — 150,5	15172 — 160,5	8,60	4941 — 52	5220 — 55
62	4063 43	4359 46,5	62	13961 146,5	14851 157,5	62	4837 50,5	5110 53,5
64	3977 42,5	4266 45,5	64	13668 144	14536 154	64	4736 49,5	5003 52,5
66	3892 41	4175 45	66	13380 141	14228 151	66	4637 48,5	4898 51,5
68	3810 40,5	4085 43,5	68	13098 137,5	13926 147,5	68	4540 47,5	4795 50,5
6,70	3729 — 39,5	3998 — 43	7,70	12823 — 135	13631 — 144	8,70	4445 — 46,5	4694 — 49
72	3650 39	3912 41,5	72	12553 132	13343 141,5	72	4352 45,5	4596 48,5
74	3572 38	3829 41	74	12289 129	13060 138	74	4261 44,5	4499 47,5
76	3496 37	3747 40	76	12031 126,5	12784 135,5	76	4172 43,5	4404 46
78	3422 36	3667 39,5	78	11778 124	12513 132,5	78	4085 42,5	4312 45,5
6,80	3350 — 35,5	3588 — 38,5	7,80	11530 — 121	12248 — 129,5	8,80	4000 — 42	4221 — 44
82	3279 35	3511 37,5	82	11288 119	11989 127	82	3916 40,5	4133 43,5
84	3209 34	3436 36,5	84	11050 116	11735 124	84	3835 40	4046 42,5
86	3141 33	3363 36	86	10818 113,5	11487 121,5	86	3755 39,5	3961 41,5
88	3075 32,5	3291 35	88	10591 111,5	11244 119	88	3676 38,5	3878 40,5
6,90	3010 — 32	3221 — 34,5	7,90	10368 — 108,5	11006 — 116,5	8,90	3599 — 37,5	3797 — 40
92	2946 31	3152 33,5	92	10151 106,5	10773 113,5	92	3524 36,5	3717 39
94	2884 30,5	3085 33	94	09938 104,5	10546 111,5	94	3451 36	3639 38
96	2823 30	3019 32,5	96	09729 102	10323 109	96	3379 35,5	3563 37,5
98	2763 29,5	2954 31,5	98	09525 100	10105 107	98	3308 34,5	3488 36,5
7,00	2704	2891	8,00	09325	09891	9,00	3239	3415
	$10^{-3} \times 0,$	$10^{-3} \times 0,$		$10^{-3} \times 0,$	$10^{-3} \times 0,$		$10^{-4} \times 0,$	$10^{-4} \times 0,$

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
$10^{-4} \times 0,$		$10^{-4} \times 0,$	$10^{-4} \times 0,$		$10^{-4} \times 0,$	$10^{-5} \times 0,$		$10^{-5} \times 0,$
9.00	3239 — 33.5	3415 — 36	10.00	11319 — 117.5	11872 — 123.5	11.00	3974 — 41	4151 — 43
02	3172 — 33.5	3343 — 35	02	11084 — 115	11625 — 121.5	02	3892 — 40	4065 — 42
04	3105 — 32	3273 — 34.5	04	10854 — 112.5	11382 — 118.5	04	3812 — 39.5	3981 — 41.5
06	3041 — 32	3204 — 33.5	06	10629 — 110.5	11145 — 116	06	3733 — 38.5	3898 — 40.5
08	2977 — 31	3137 — 33	08	10408 — 108	10913 — 114	08	3656 — 38	3817 — 39.5
9.10	2915 — 30.5	3071 — 32	10.10	10192 — 105.5	10685 — 111	11.10	3580 — 37	3738 — 38.5
12	2854 — 29.5	3007 — 31.5	12	09981 — 103.5	10463 — 109	12	3506 — 36	3661 — 38
14	2795 — 29	2944 — 31	14	09774 — 101.5	10245 — 107	14	3434 — 35.5	3585 — 37.5
16	2737 — 28.5	2882 — 30	16	09571 — 99.5	10031 — 104.5	16	3363 — 35	3510 — 36
18	2680 — 28	2822 — 29.5	18	09372 — 97	09822 — 102	18	3293 — 34	3438 — 36
9.20	2624 — 27.5	2763 — 29	10.20	09178 — 95	09618 — 100	11.20	3225 — 33	3366 — 34.5
22	2569 — 26.5	2705 — 28.5	22	08988 — 93.5	09418 — 98.5	22	3159 — 32.5	3297 — 34.5
24	2516 — 26.5	2648 — 27.5	24	08801 — 91	09221 — 96	24	3094 — 32	3228 — 33.5
26	2463 — 25.5	2593 — 27	26	08619 — 89.5	09029 — 93.5	26	3030 — 31.5	3161 — 32.5
28	2412 — 25	2539 — 27	28	08440 — 87.5	08842 — 92.5	28	2967 — 30.5	3096 — 32
9.30	2362 — 25	2485 — 26	10.30	08265 — 85.5	08657 — 90	11.30	2906 — 30	3032 — 31.5
32	2312 — 24	2433 — 25	32	08094 — 84	08477 — 88	32	2846 — 29.5	2969 — 31
34	2264 — 23.5	2383 — 25	34	07926 — 82	08301 — 86.5	34	2787 — 29	2907 — 30
36	2217 — 23	2333 — 24.5	36	07762 — 80.5	08128 — 84.5	36	2729 — 28	2847 — 29.5
38	2171 — 22.5	2284 — 24	38	07601 — 79	07959 — 83	38	2673 — 27.5	2788 — 29
9.40	2126 — 22.5	2236 — 23.5	10.40	07443 — 77	07793 — 81	11.40	2618 — 27	2730 — 28
42	2081 — 21.5	2189 — 22.5	42	07289 — 75.5	07631 — 79.5	42	2564 — 26.5	2674 — 27.5
44	2038 — 21	2144 — 22.5	44	07138 — 74	07472 — 77.5	44	2511 — 26	2619 — 27.5
46	1996 — 21	2099 — 22	46	06990 — 72.5	07317 — 76	46	2459 — 25.5	2564 — 26.5
48	1954 — 20	2055 — 21.5	48	06845 — 70.5	07165 — 74.5	48	2408 — 24.5	2511 — 26
9.50	1914 — 20	2012 — 21	10.50	06704 — 69.5	07016 — 73	11.50	2359 — 24.5	2459 — 25.5
52	1874 — 19.5	1970 — 20.5	52	06565 — 68	06870 — 71.5	52	2310 — 24	2408 — 25
54	1835 — 19	1929 — 20.5	54	06429 — 66.5	06727 — 70	54	2262 — 23	2358 — 24
56	1797 — 19	1888 — 19.5	56	06296 — 65.5	06587 — 68.5	56	2216 — 23	2310 — 24
58	1759 — 18	1849 — 19.5	58	06165 — 63.5	06450 — 67	58	2170 — 22.5	2262 — 23.5
9.60	17226 — 179	1810 — 19	10.60	06038 — 62.5	06316 — 65.5	11.60	2125 — 22	2215 — 23
62	16868 — 175.5	1772 — 18.5	62	05883 — 61.5	06185 — 64.5	62	2081 — 21.5	2169 — 22.5
64	16517 — 171.5	1735 — 18	64	05790 — 60	06056 — 62.5	64	2038 — 21	2124 — 22
66	16174 — 168.5	1699 — 17.5	66	05670 — 58.5	05931 — 62	66	1996 — 20.5	2080 — 21.5
68	15837 — 164.5	1664 — 17.5	68	05553 — 57.5	05807 — 60	68	1955 — 20	2037 — 21
9.70	15508 — 161	16289 — 170	10.70	05438 — 56.5	05687 — 59	11.70	1915 — 20	1995 — 20.5
72	15186 — 158	15949 — 166.5	72	05325 — 55	05569 — 58	72	1875 — 19	1954 — 20.5
74	14870 — 154.5	15616 — 163	74	05215 — 54	05453 — 56.5	74	1837 — 19	1913 — 19.5
76	14561 — 151	15290 — 159.5	76	05107 — 52.5	05340 — 55.5	76	1799 — 18.5	1874 — 19.5
78	14259 — 148.5	14971 — 156.5	78	05002 — 52	05229 — 54.5	78	1762 — 18.5	1835 — 19
9.80	13962 — 145	14658 — 153	10.80	04898 — 50.5	05120 — 53	11.80	17255 — 178	17971 — 183.5
82	13672 — 142	14352 — 149.5	82	04797 — 49.5	05014 — 52	82	16899 — 174.5	17600 — 182
84	13388 — 139	14053 — 146.5	84	04698 — 49	04910 — 51	84	16550 — 170.5	17236 — 178.5
86	13110 — 136	13760 — 144	86	04600 — 47.5	04808 — 50	86	16209 — 167	16879 — 174.5
88	12838 — 133.5	13472 — 140.5	88	04505 — 46.5	04708 — 49	88	15875 — 163.5	16530 — 170.5
9.90	12571 — 130.5	13191 — 137.5	10.90	04412 — 45.5	04610 — 47.5	11.90	15548 — 160	16189 — 167.5
92	12310 — 128	12916 — 134.5	92	04321 — 44.5	04515 — 47	92	15228 — 157	15854 — 164
94	12054 — 125	12647 — 132	94	04232 — 44	04421 — 46	94	14914 — 153.5	15526 — 160.5
96	11804 — 122.5	12383 — 129	96	04144 — 43	04329 — 45	96	14607 — 150.5	15205 — 157
98	11559 — 120	12125 — 126.5	98	04058 — 42	04239 — 44	98	14306 — 147.5	14891 — 154
10.00	11319	11872	11.00	03974	04151	12.00	14011	14583
$10^{-4} \times 0,$		$10^{-4} \times 0,$	$10^{-4} \times 0,$		$10^{-4} \times 0,$	$10^{-5} \times 0,$		$10^{-5} \times 0,$

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
$10^{-5} \times 0,$		$10^{-5} \times 0,$	$10^{-6} \times 0$		$10^{-6} \times 0,$	$10^{-6} \times 0,$		$10^{-6} \times 0,$
12 00	14011 — 144 5	14583 — 150 5	13 00	4956 — 51	5143 — 53	14 00	17579 — 180	18197 — 181
02	13722 141	14282 147 5	02	4854 50	5037 52	02	17219 176 5	17823 183
04	13440 138 5	13987 144 5	04	4754 48 5	4933 50 5	04	16866 172 5	17457 179
06	13163 135 5	13698 141 5	06	4657 48	4832 50	06	16521 169 5	17099 175 5
08	12892 133	13415 138 5	08	4561 47	4732 48 5	08	16182 165 5	16748 172
12 10	12626 — 130	13138 — 136	13 10	4467 — 45 5	4635 — 48	14 10	15851 — 162 5	16404 — 168 5
12	12366 127 5	12866 132 5	12	4376 45	4539 46 5	12	15526 159	16067 165
14	12111 124 5	12601 130 5	14	4286 44	4446 46	14	15208 155 5	15737 161 5
16	11862 122	12340 127	16	4198 43	4354 44 5	16	14897 152 5	15414 158
18	11618 119 5	12086 125	18	4112 42 5	4265 44	18	14592 149 5	15098 155
12 20	11379 — 117 5	11836 — 122	13 20	4027 — 41 5	4177 — 43	14 20	14293 — 146 5	14788 — 152
22	11144 114 5	11592 120	22	3944 40 5	4091 42	22	14000 143 5	14484 148 5
24	10915 112 5	11352 117	24	3863 39 5	4007 41 5	24	13713 140	14187 145 5
26	10690 110	11118 115	26	3784 38 5	3924 40	26	13433 137 5	13896 142 5
28	10470 107 5	10888 112	28	3707 38 5	3844 39 5	28	13158 135	13611 140
12 30	10255 — 105 5	10664 — 110 5	13 30	3630 — 37	3765 — 39	14 30	12888 — 132	13331 — 136 5
32	10044 103 5	10443 107 5	32	3556 36 5	3687 38	32	12624 129	13058 134
34	09837 101 5	10228 105 5	34	3483 36	3611 37	34	12366 126 5	12790 131 5
36	09634 99	10017 103 5	36	3411 35	3537 36 5	36	12113 124	12527 128 5
38	09436 97	09810 101	38	3341 34	3464 35 5	38	11865 121 5	12270 125 5
12 40	09242 — 95	09608 — 99 5	13 40	3273 — 33 5	3393 — 35	14 40	11622 — 119	12019 — 123 5
42	09052 93	09409 97	42	3206 33	3323 34	42	11384 116 5	11772 120 5
44	08866 91 5	09215 95	44	3140 32	3255 33 5	44	11151 114	11531 118 5
46	08683 89	09025 93	46	3076 32	3188 33	46	10923 112	11294 116
48	08505 87 5	08839 91	48	3012 30 5	3122 32	48	10699 109 5	11062 113
12 50	08330 — 86	08657 — 89 5	13 50	2951 — 30 5	3058 — 31 5	14 50	10480 — 107	10836 — 111 5
52	08158 84	08478 87 5	52	2890 29 5	2995 30 5	52	10266 105 5	10613 108 5
54	07990 82	08303 85 5	54	2831 29	2934 30 5	54	10055 102 5	10396 107
56	07826 80 5	08132 84	56	2773 28 5	2873 29 5	56	09850 101	10182 104
58	07665 79	07964 82	58	2716 28	2814 29	58	09648 98 5	09974 102 5
12 60	07507 — 77	07800 — 80 5	13 60	2660 — 27	2756 — 28	14 60	09451 — 97	09769 — 100
62	07353 75 5	07639 78 5	62	2606 27	2700 28	62	09257 94 5	09569 98
64	07202 74	07482 77 5	64	2552 26	2644 27	64	09068 93	09373 96
66	07054 72 5	07327 75 5	66	2500 25 5	2590 26 5	66	08882 90 5	09181 94 5
68	06909 71	07176 74	68	2449 25 5	2537 26 5	68	08701 89	08992 92
12 70	06767 — 69 5	07028 — 72 5	13 70	2398 — 24 5	2484 — 25 5	14 70	08523 — 87 5	08808 — 90 5
72	06628 68 5	06883 70 5	72	2349 24	2433 25	72	08348 85	08627 88
74	06491 66 5	06742 69 5	74	2301 23 5	2383 24 5	74	08178 84	08451 87
76	06358 65 5	06603 68 5	76	2254 23	2334 24	76	08010 82	08277 84 5
78	06227 64	06466 66 5	78	2208 23	2286 23 5	78	07846 80	08108 83
12 80	06099 — 62 5	06333 — 65	13 80	2162 — 22	2239 — 23	14 80	07686 — 78 5	07942 — 81 5
82	05974 61 5	06203 64	82	2118 21 5	2193 22 5	82	07529 77	07779 80
84	05851 60	06075 62 5	84	2075 21 5	2148 22	84	07375 75 5	07619 78
86	05731 59	05950 61 5	86	2032 21	2104 21 5	86	07224 74	07463 76 5
88	05613 57 5	05827 60	88	1990 20	2061 21	88	07076 72	07310 75
12 90	05498 — 56 5	05707 — 59	13 90	1950 — 20	2019 — 21	14 90	06932 — 71	07160 — 73
92	05385 55 5	05589 57 5	92	1910 19 5	1977 20	92	06790 69 5	07014 72
94	05274 54	05474 56	94	1871 19 5	1937 20	94	06651 68	06870 70 5
96	05166 53	05362 55 5	96	1832 18 5	1897 19 5	96	06515 66 5	06729 69
98	05060 52	05251 54	98	1795 18 5	1858 19	98	06382 65 5	06591 67 5
13 00	04956 —	05143 —	14 00	1758 —	1820 —	15 00	06251 —	06456 —
$10^{-5} \times 0,$		$10^{-5} \times 0,$	$10^{-6} \times 0,$		$10^{-6} \times 0,$	$10^{-6} \times 0,$		$10^{-6} \times 0,$

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
15 00	$10^{-7} \times 0$	$10^{-7} \times 0$	15 40	$10^{-7} \times 0$	$10^{-7} \times 0$	15 80	$10^{-7} \times 0$	$10^{-7} \times 0$
02	6251 — 63 5	6456 — 66	42	4136 — 42	4269 — 44	82	2738 — 28	2823 — 28 5
04	6124 63	6324 64 5	44	4052 41 5	4181 42 5	84	2682 27 5	2766 28 5
06	5998 61	6195 63 5	46	3969 40 5	4096 42	86	2627 26 5	2709 27 5
08	5876 60	6068 62 5	48	3888 39 5	4012 41	88	2574 26 5	2654 27 5
10	5756 59	5943 60 5	50	3809 39	3930 40 5	90	2521 25 5	2599 26 5
12	5638 — 57 5	5822 — 59 5	52	3731 — 38	3849 — 39	92	2470 — 25 5	2546 — 26 5
14	5523 56 5	5703 58 5	54	3655 37 5	3771 38 5	94	2419 24 5	2494 25 5
16	5410 55 5	5586 57 5	56	3580 36 5	3694 38	96	2370 24	2443 25
18	5299 54	5471 56	58	3507 36	3618 37	98	2322 24	2393 24 5
20	5191 53	5359 54 5	60	3435 35	3544 36 5	100	2274 23	2344 24
22	5085 — 52	5250 — 54	62	3365 — 34 5	3471 — 35 5	102	2228	2296
24	4981 51	5142 52 5	64	3296 33 5	3400 34 5	104	$10^{-7} \times 0$	$10^{-7} \times 0$
26	4879 50	5037 51 5	66	3229 33	3331 34	106		
28	4779 48 5	4934 50 5	68	3163 32	3263 33 5	108		
30	4682 48	4833 49 5	70	3099 32	3196 32 5	110		
32	4586 — 47	4734 — 48 5	72	3035 — 31	3131 — 32	112		
34	4492 45 5	4637 47 5	74	2973 30	3067 31 5	114		
36	4401 45	4542 46 5	76	2913 30	3004 31	116		
38	4311 44	4449 45 5	78	2853 29	2942 30	118		
40	4223 43 5	4358 44 5	80	2795 28 5	2882 29 5	120		
42	4136	4269	82	2738	2823	122		
44	$10^{-7} \times 0$	$10^{-7} \times 0$	84	$10^{-7} \times 0$	$10^{-7} \times 0$	124		

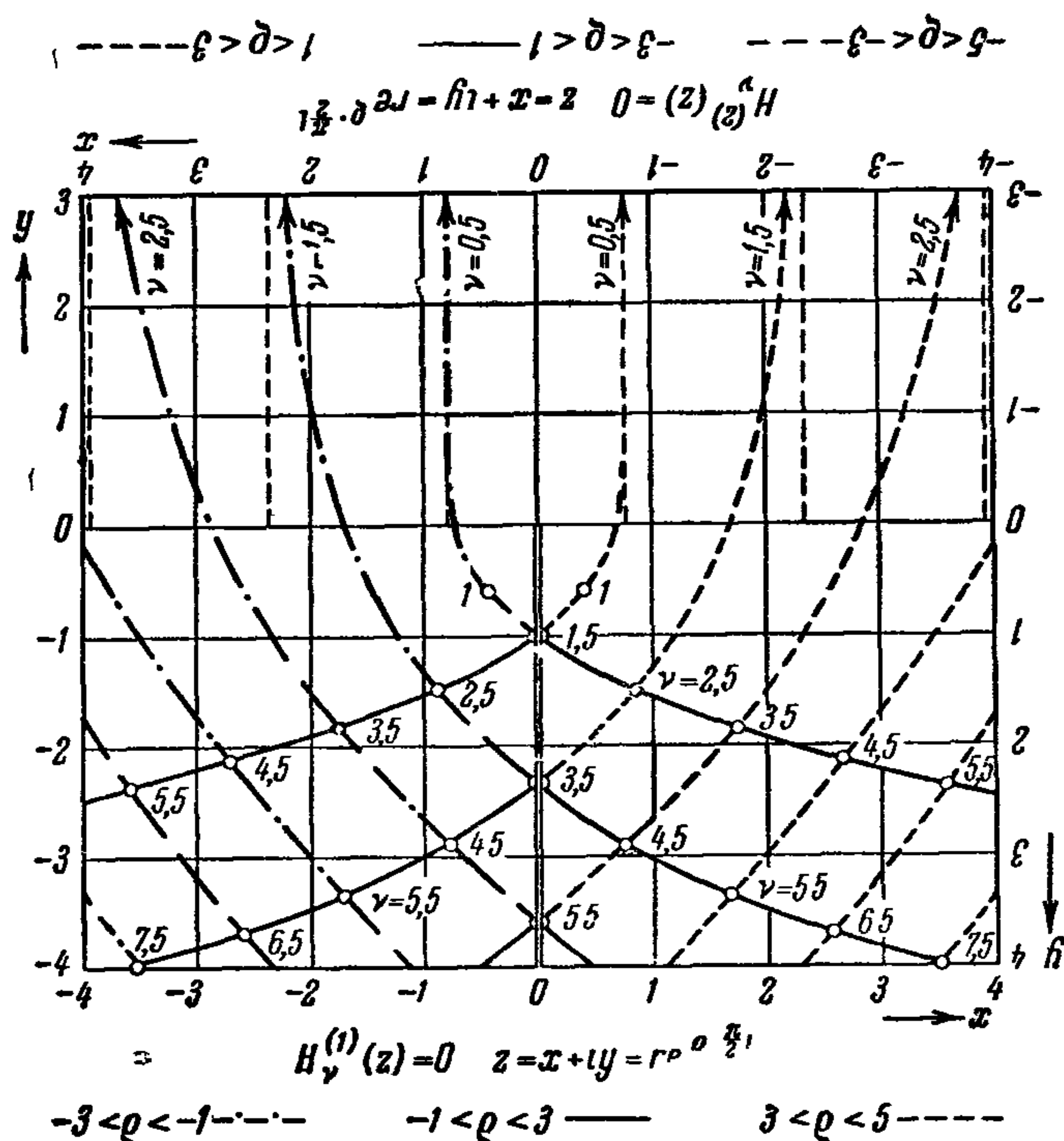


Рис. 150. Нули функций $H_v^{(1)}(z)$ и $H_v^{(2)}(z)$

x	$I_{1/3}(x)$	$\frac{2}{\pi} K_{1/3}(x)$	$I_{2/3}(x)$	$\frac{2}{\pi} K_{2/3}(x)$	x	$I_{1/3}(x)$	$\frac{2}{\pi} K_{1/3}(x)$	$I_{2/3}(x)$	$\frac{2}{\pi} K_{2/3}(x)$
0.0	0.0000	∞	0.00000	∞	5.0	26.898	23739	25.902	24471
1	0.4133	1.8461	0.15057	3.026	1	29.423	21273	28.359	21926
2	0.5237	1.2601	0.24009	1.7837	2	32.19	19067	31.05	19637
3	0.6051	0.9607	0.3170	1.2716	3	35.23	17093	34.01	17594
4	0.6747	0.7676	0.3880	0.9681	4	38.56	15325	37.25	15767
0.5	0.7390	0.6296	0.4563	0.7678	5.5	42.21	13743	40.81	14132
6	0.8012	0.5253	0.5237	0.6257	6	46.22	12326	44.72	12669
7	0.8636	0.4434	0.5915	0.5187	7	50.62	11057	49.00	11360
8	0.9276	0.3776	0.6609	0.4354	8	55.45	09920	53.71	10187
9	0.9943	0.3238	0.7326	0.3688	9	60.74	08901	58.87	09137
1.0	1.0646	0.27911	0.8075	0.3148	6.0	66.55	07988	64.54	08196
1	1.1396	0.24167	0.8864	0.27024	1	72.93	07169	70.77	07354
2	1.2199	0.21001	0.9701	0.23312	2	79.93	06469	77.60	06599
3	1.3065	0.18306	1.0593	0.20191	3	87.61	05778	85.10	05922
4	1.4000	0.16000	1.1547	0.17547	4	96.04	05188	93.34	05315
1.5	1.5014	0.14016	1.2573	0.15294	6.5	105.30	04658	102.39	04771
6	1.6115	0.12302	1.3678	0.13364	6	115.47	04184	112.33	04283
7	1.7313	0.10818	1.4872	0.11704	7	126.63	03758	123.25	03846
8	1.8617	0.09527	1.6165	0.10270	8	138.89	03375	135.24	03454
9	2.0038	0.08402	1.7567	0.09027	9	152.36	03032	148.41	03102
2.0	2.1588	0.07419	1.9089	0.07947	7.0	167.15	027245	162.89	027860
1	2.3279	0.06559	2.0745	0.07007	1	183.39	024481	178.79	025026
2	2.5124	0.05805	2.2546	0.06185	2	201.23	022000	196.26	022483
3	2.7139	0.05142	2.4509	0.05466	3	220.83	019772	215.45	020200
4	2.9339	0.04559	2.6648	0.04835	4	242.37	017779	236.55	018151
2.5	3.174	0.04045	2.8981	0.04282	7.5	266.03	015974	259.73	016312
6	3.437	0.03592	3.153	0.03795	6	292.02	014360	285.21	014660
7	3.724	0.03192	3.431	0.03366	7	320.6	012910	313.2	013176
8	4.038	0.028380	3.734	0.029877	8	352.0	011608	344.0	011844
9	4.381	0.025249	4.066	0.026540	9	386.5	010438	377.8	010647
3.0	4.756	0.022476	4.429	0.023591	8.0	424.4	009386	415.0	009572
1	5.166	0.020018	4.826	0.020982	1	466.1	008441	455.9	008607
2	5.615	0.017838	5.259	0.018672	2	511.9	007592	500.9	007739
3	6.106	0.015902	5.734	0.016625	3	562.2	006828	550.3	006959
4	6.642	0.014183	6.253	0.014810	4	617.6	006142	604.6	006259
3.5	7.230	0.012654	6.821	0.013200	8.5	678.4	005525	664.4	005629
6	7.873	0.011295	7.443	0.011770	6	745.3	004971	730.1	005063
7	8.577	0.010085	8.124	0.010499	7	818.9	004472	802.3	004554
8	9.347	0.009008	8.869	0.009369	8	899.7	004024	881.8	004097
9	10.190	0.008049	9.686	0.008362	9	988.6	003621	969.1	003686
4.0	11.114	0.007194	10.580	0.007468	9.0	1086.4	003258	1065.3	003316
1	12.125	0.006432	11.560	0.006671	1	1194.0	0029322	1171.0	0029837
2	13.233	0.005752	12.633	0.005961	2	1312.2	0026389	1287.2	0026847
3	14.446	0.005145	13.809	0.005329	3	1442.3	0023751	1415.1	0024159
4	15.775	0.004604	15.098	0.004764	4	1585.3	0021377	1555.8	0021741
4.5	17.231	0.004120	16.511	0.004261	9.5	1742.6	0019242	1710.6	0019566
6	18.827	0.003688	18.060	0.003812	6	1915.7	0017321	1880.8	0017610
7	20.576	0.003303	19.759	0.003411	7	2106.1	0015593	2068.1	0015851
8	22.493	0.0029578	21.621	0.003053	8	2315.5	0014038	2274.2	0014268
9	24.594	0.0026495	23.663	0.0027332	9	2545.8	0012639	2500.9	0012843
5.0	26.898	0.0023739	25.902	0.0024474	10.0	2799.2	0011379	2750.4	0011562
						0.00			0.00

Таблица 57. Первые корни $x_{n,s}$ уравнения $I_n(x) J'_n(x) - J_n(x) I'_n(x) = 0$

s	n=0	n=1	n=2	n=3
1	3,196	4,611	5,906	7,144
2	6,306	7,799	9,197	10,537
3	9,439	10,958	12,402	13,795
4	12,577	14,109	15,579	17,005
5	15,716	17,256	18,744	
6	18,857			

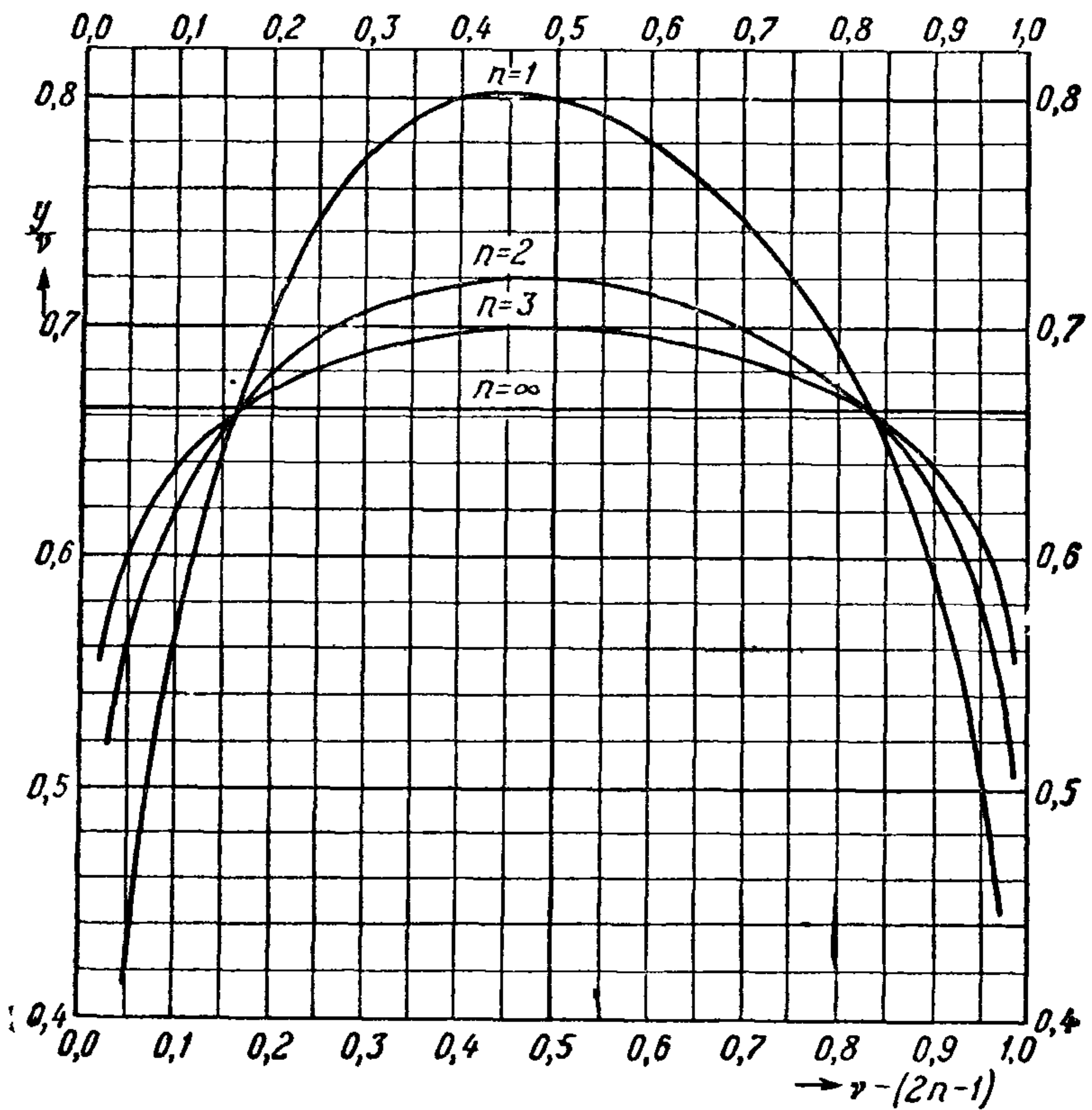
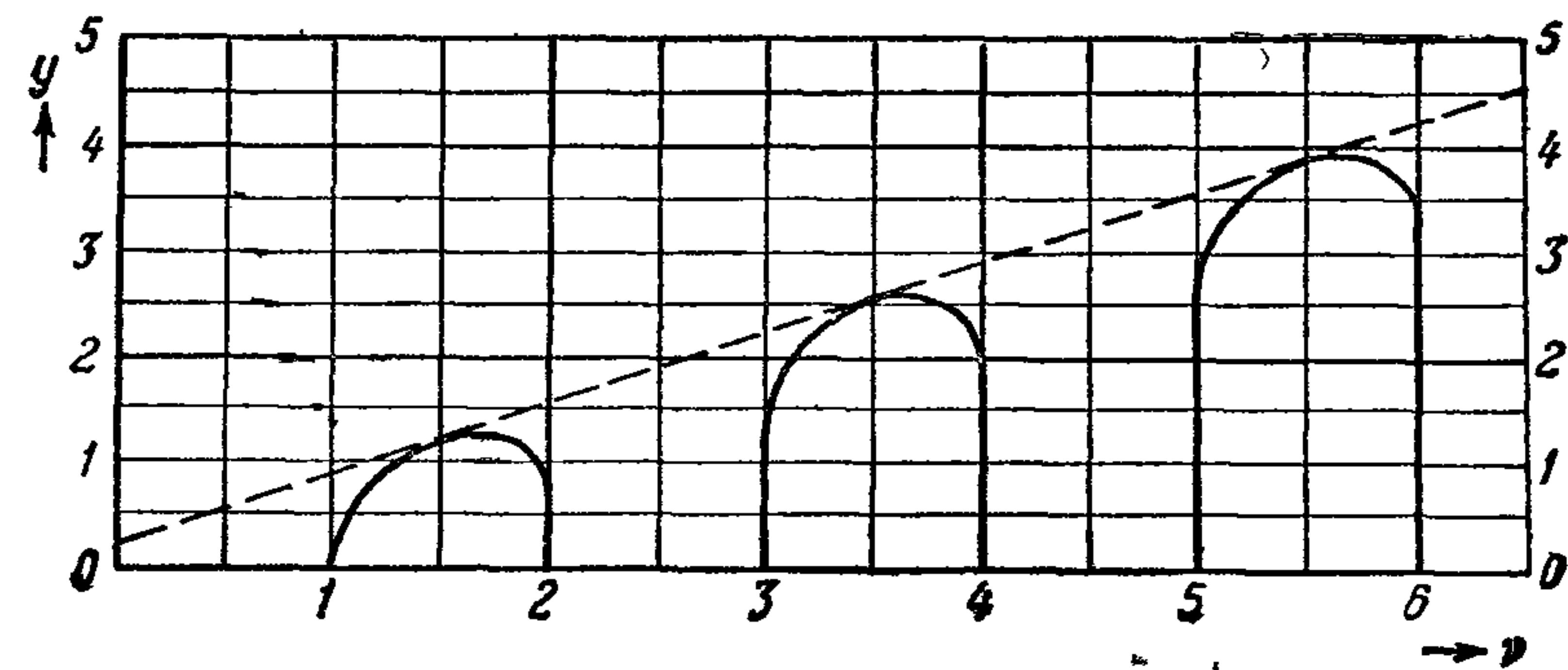


Рис. 151 и 152. Нули y_n функций $J_{-\nu}(iy) = e^{-\nu \frac{\pi}{2}} I_{-\nu}(y)$.

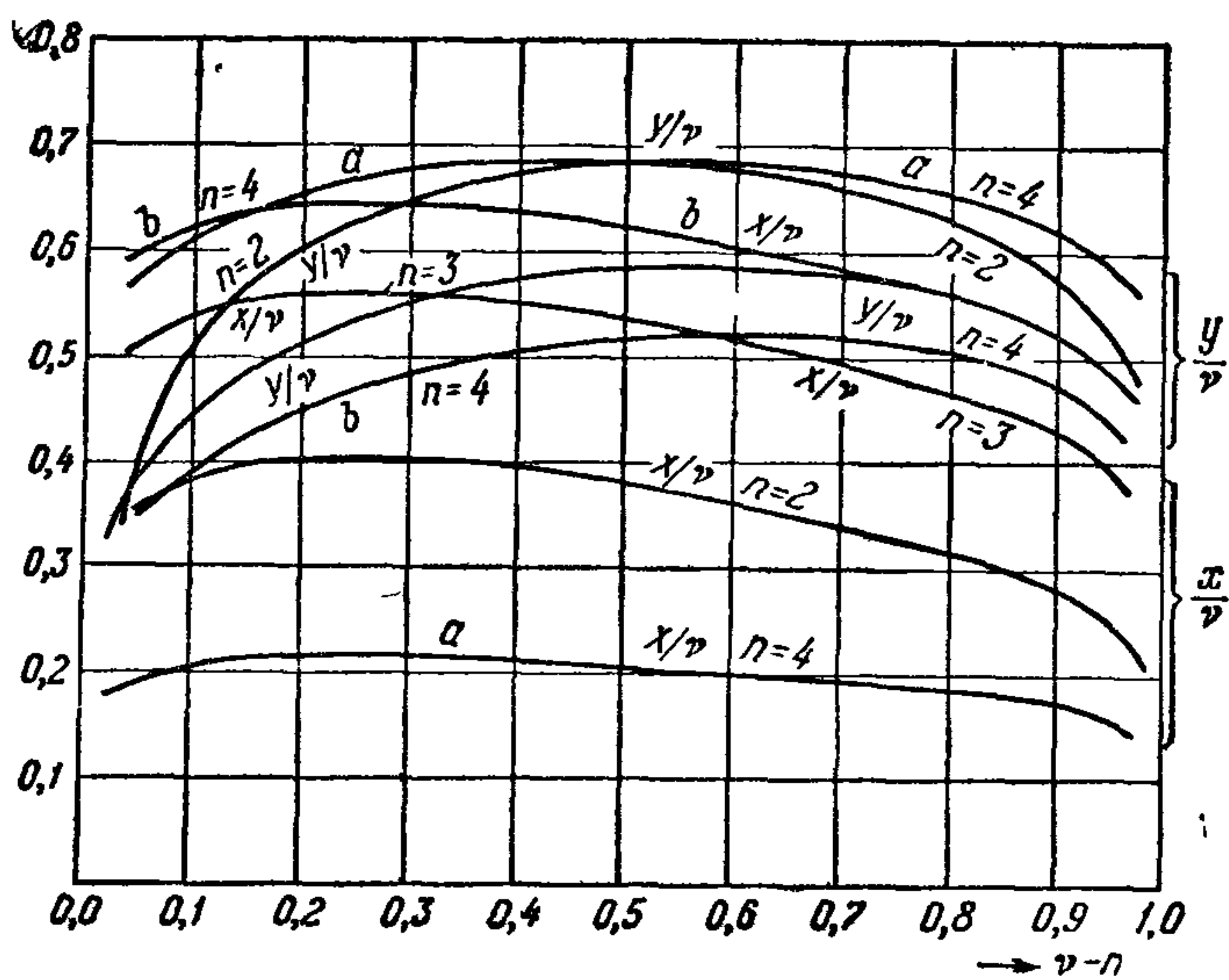
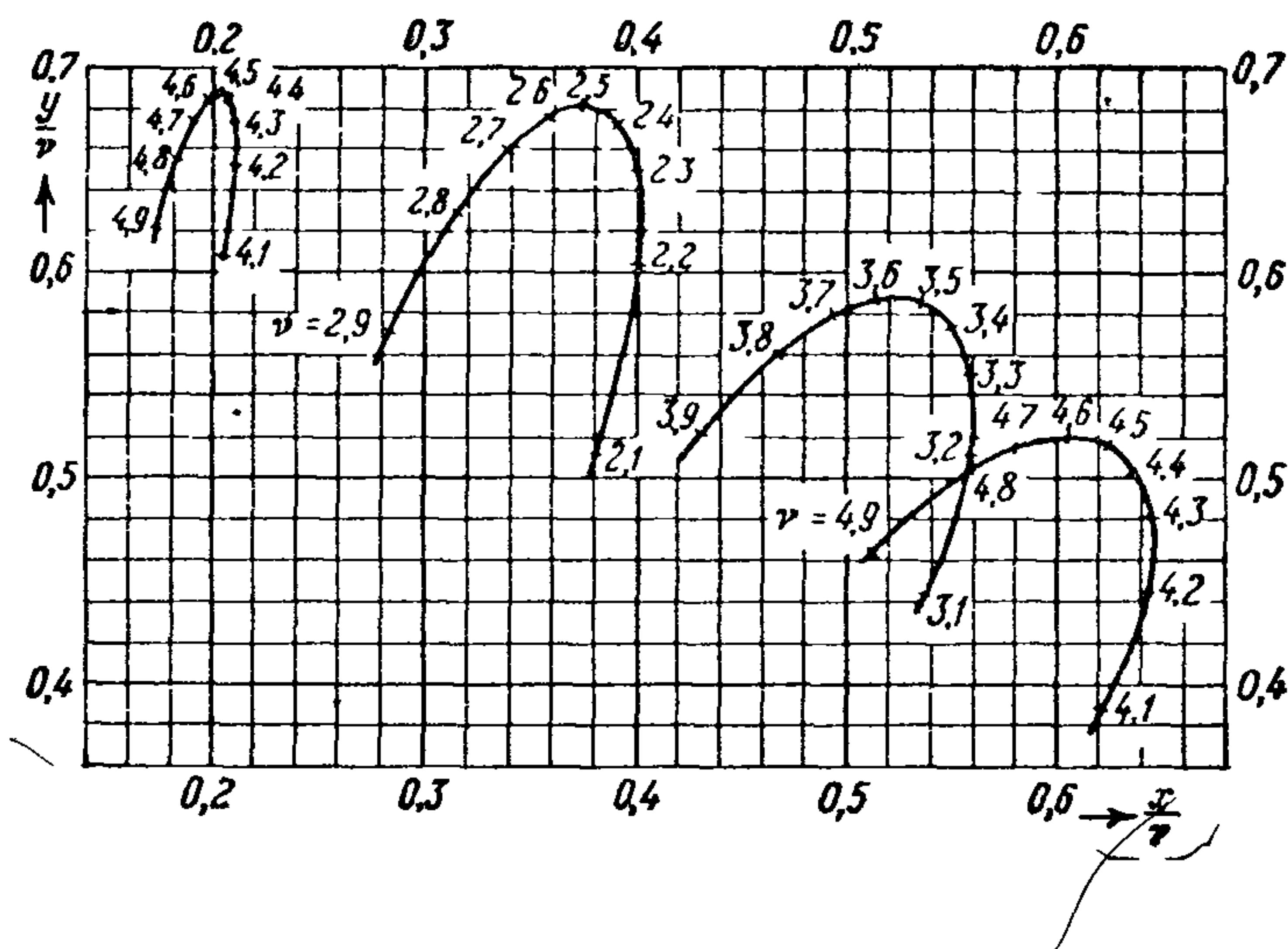


Рис. 153 и 154. Нули $x_n + iy_n$ функций $J_{-\nu}(x + iy)$.

3. Функции Кельвина

3.1. Повороту на 135° соответствуют функции Бесселя $Z_\nu(e^{\frac{3\pi}{4}} z)$. Они являются решениями дифференциального уравнения

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (iz^2 + \nu^2) w = 0.$$

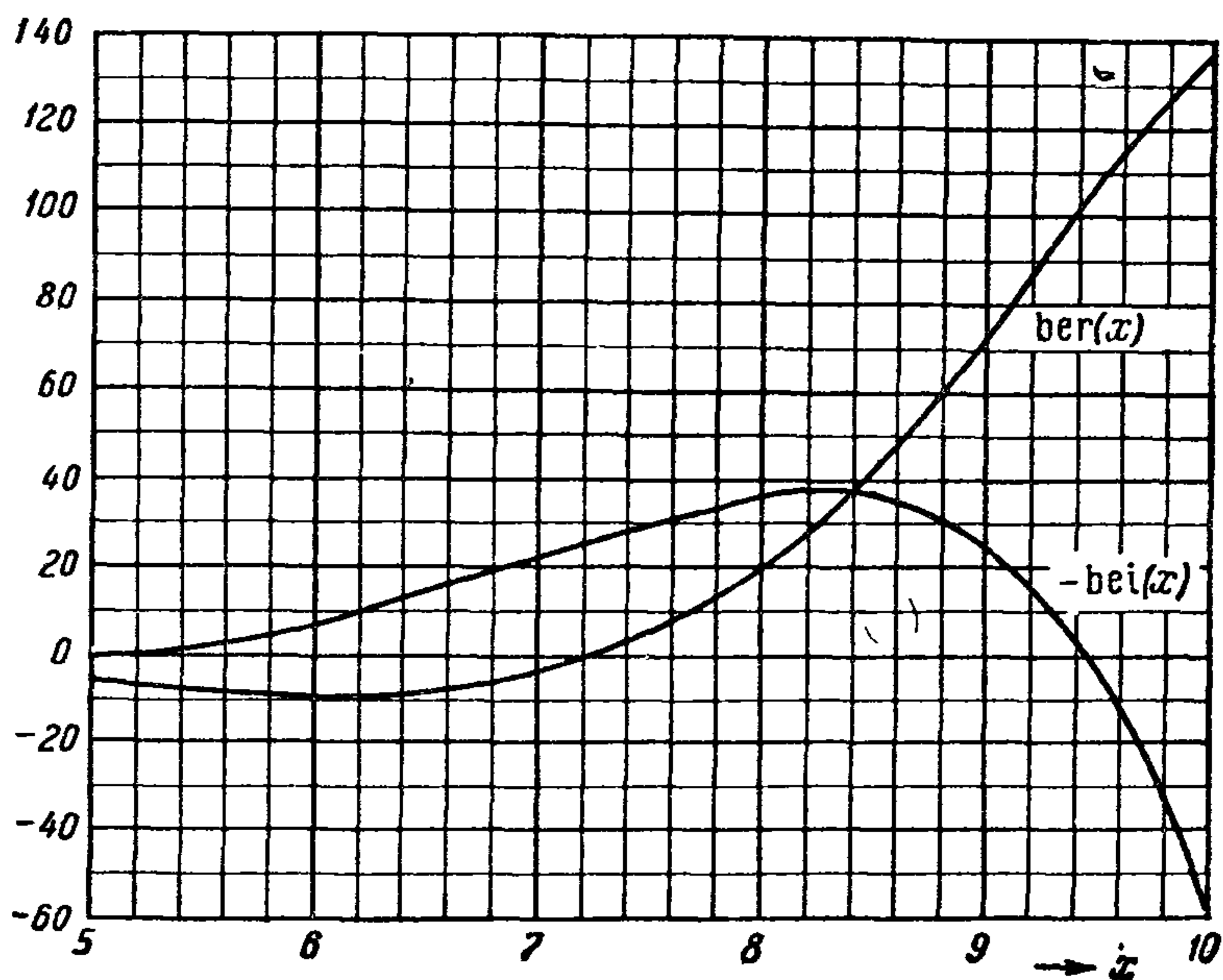
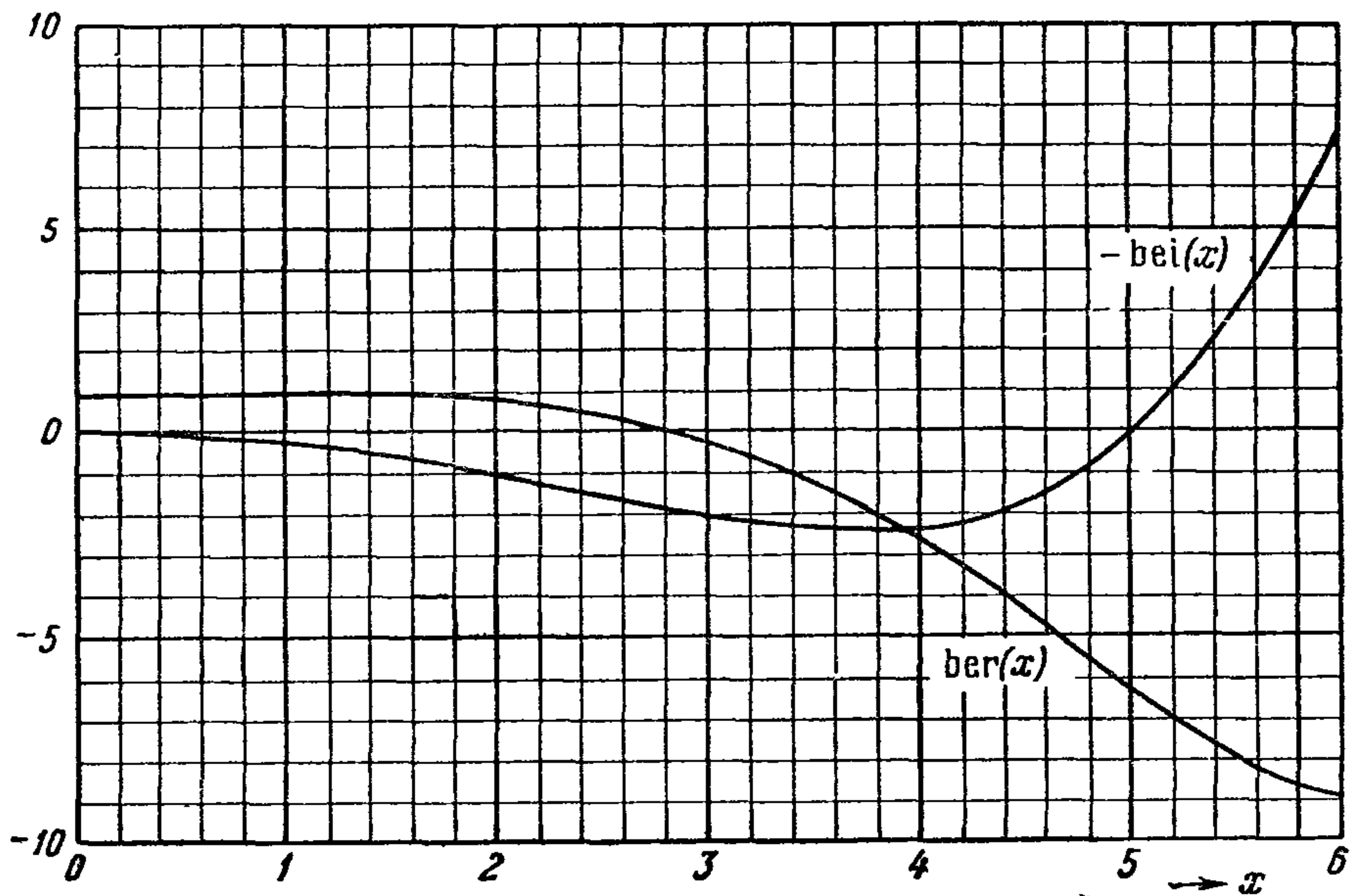
Исходя из функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$, определяют функции Кельвина

СООТНОШЕНИЯМИ

$$\text{ber}_\nu(z) \pm i \text{bei}_\nu(z) = J_\nu(ze^{\pm \frac{3\pi}{4} i}) = e^{\pm \nu \frac{\pi}{2} i} I_\nu(ze^{\pm \frac{\pi}{4} i}),$$

$$\text{her}_\nu(z) + i \text{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{3\pi}{4} i}), \quad \text{her}_\nu(z) - i \text{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(ze^{-\frac{3\pi}{4} i}),$$

$$\text{ker}_\nu(z) + i \text{kei}_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{3\pi}{4} i}), \quad \text{ker}_\nu(z) - i \text{kei}_\nu(z) = -\frac{\pi i}{2} H_\nu^{(2)}(ze^{-\frac{3\pi}{4} i}),$$

Рис. 155 и 156. Функции Кельвина $\text{ber}(x)$ и $\text{bei}(x)$.

или

$$\ker_\nu(z) \pm i \operatorname{kei}_\nu(z) = e^{\mp \frac{\nu\pi}{2} i} K_\nu(ze^{\pm \frac{\pi}{4} i}),$$

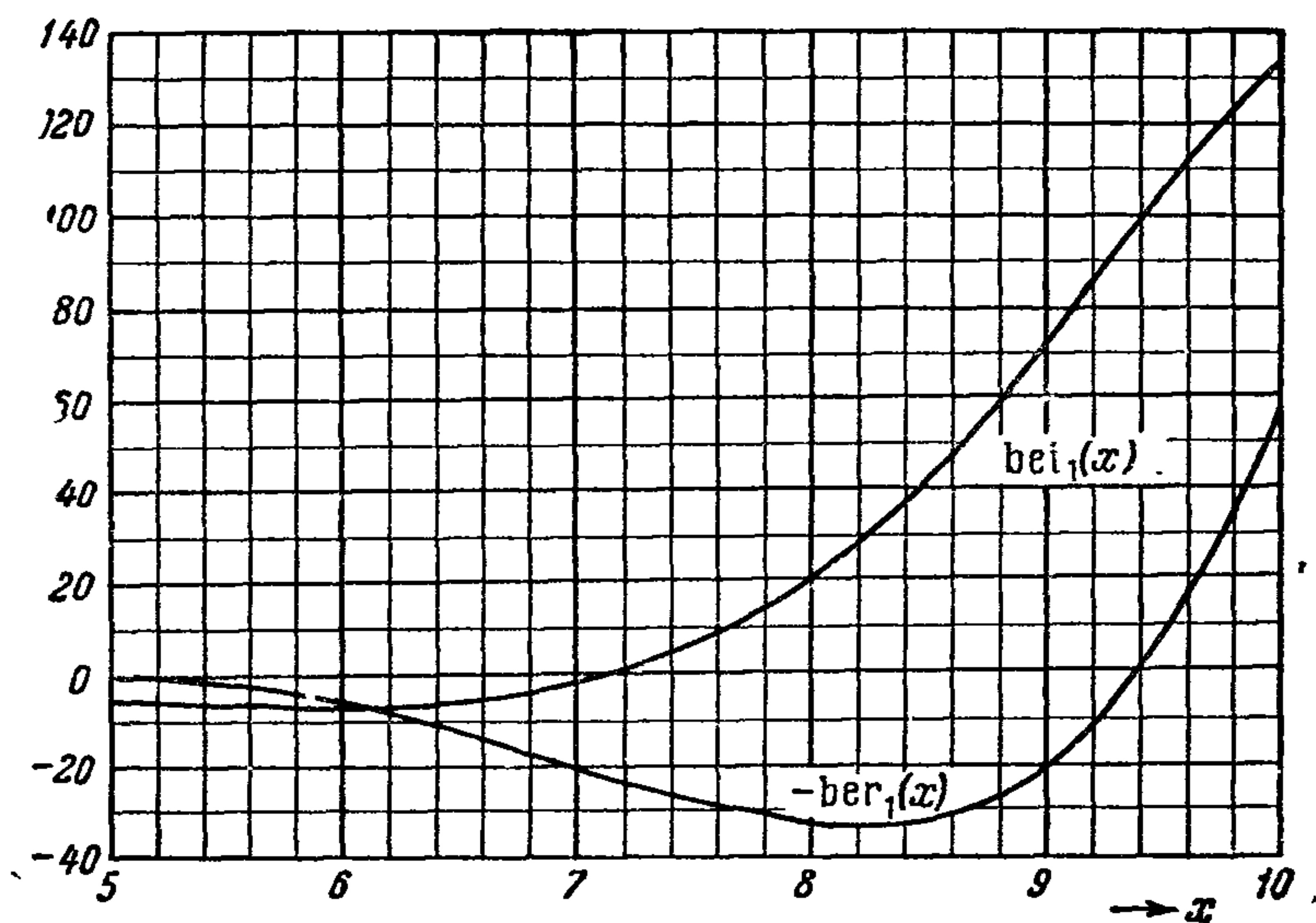
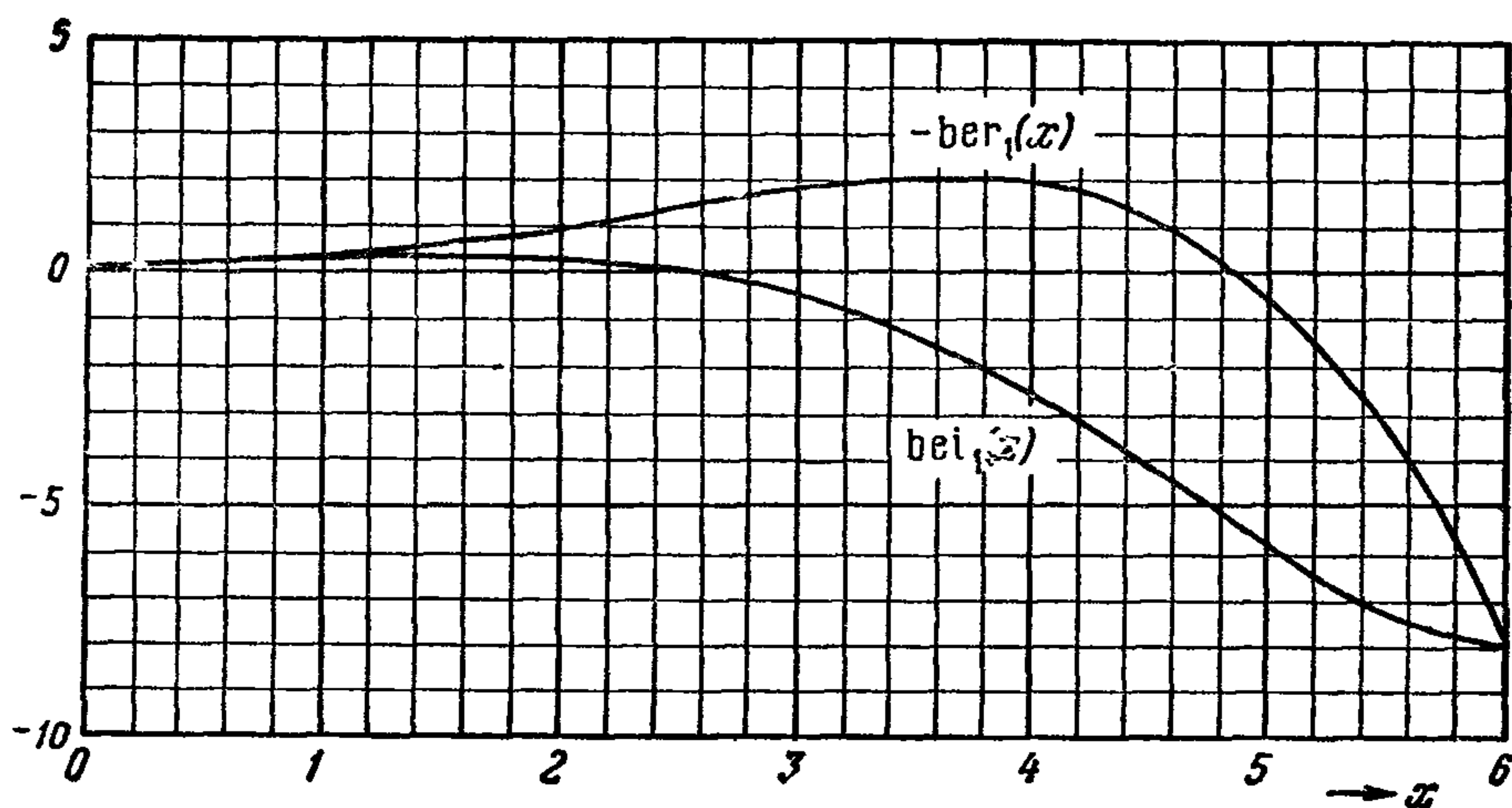
так что

$$\operatorname{her}_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{kei}_\nu(z), \quad \operatorname{hei}_\nu(z) = -\frac{2}{\pi} \ker_\nu(z).$$

Для наиболее важного случая $\nu=0$ индекс у знака функции опускается: $\operatorname{ber}(z)$, $\operatorname{bei}(z)$, $\operatorname{her}(z)$, $\operatorname{hei}(z)$, $\ker(z)$, $\operatorname{kei}(z)$. Разложения $\operatorname{ber}(z)$, $\operatorname{bei}(z)$ в степенные ряды таковы:

$$\operatorname{ber}(z) = 1 - \frac{z^4}{2^2 4^2} + \frac{z^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \dots, \quad \operatorname{bei}(z) = \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

Если порядок ν действителен и аргумент $z=x$ принимает действительные положительные значения, то все функции Кельвина действительны

Рис. 157 и 158. Функции Кельвина $\operatorname{ber}_1(x)$ и $\operatorname{bei}_1(x)$.

(рис. 155—162, таблицы 58—62). В окрестности $x=0$ имеем:

$$\text{ber}(x) \approx 1, \quad \text{bei}(x) \approx \frac{x^2}{4}, \quad \text{her}(x) \approx -\frac{1}{2}, \quad \text{hei}(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2},$$

а для $x \gg 1$, $x \gg \nu^2$ справедливы представления (выписаны лишь первые приближения):

$$\text{ber}(x) \approx \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right), \quad \text{bei}(x) \approx \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right),$$

$$\text{her}(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right), \quad \text{hei}(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right).$$

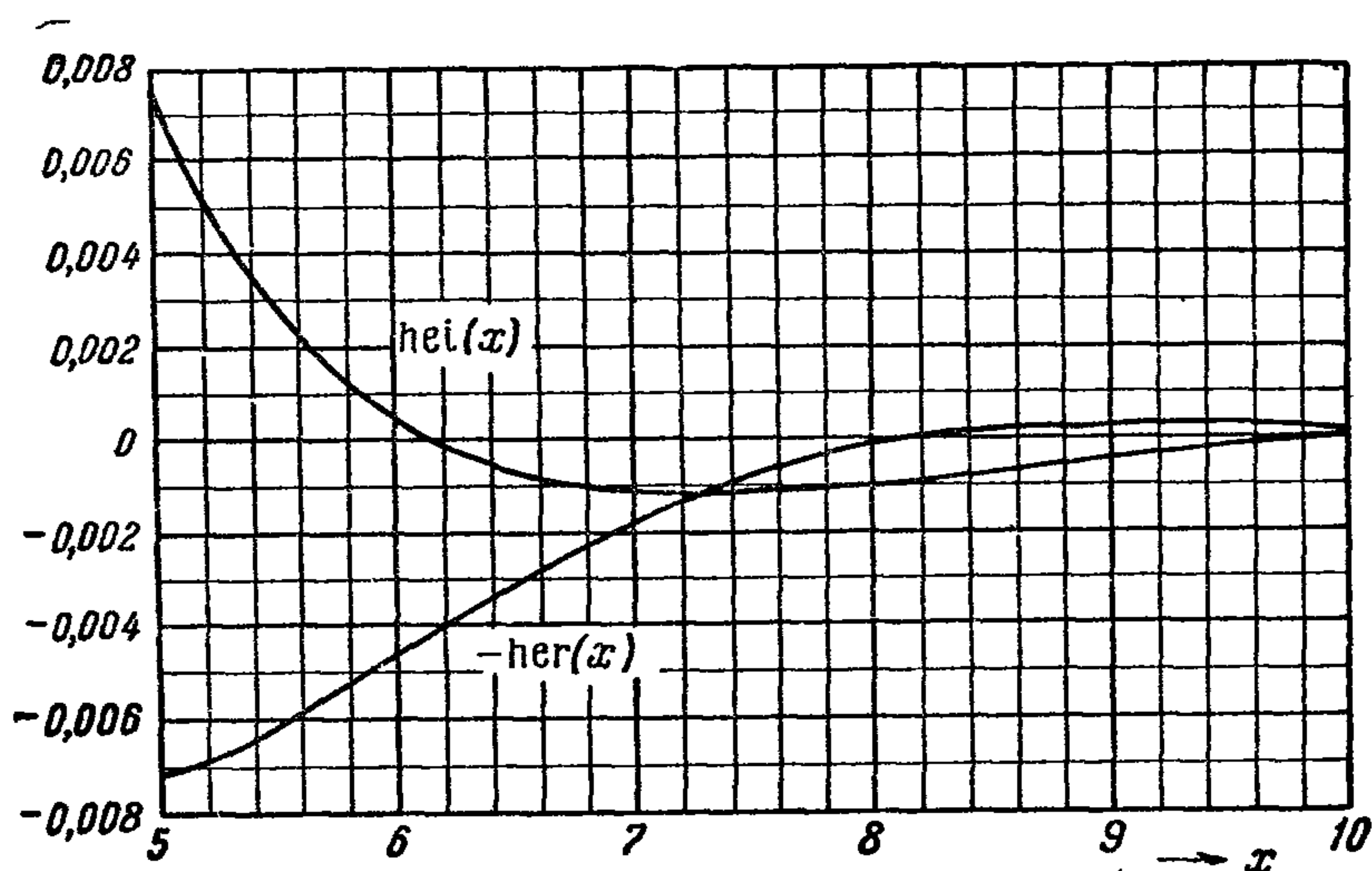
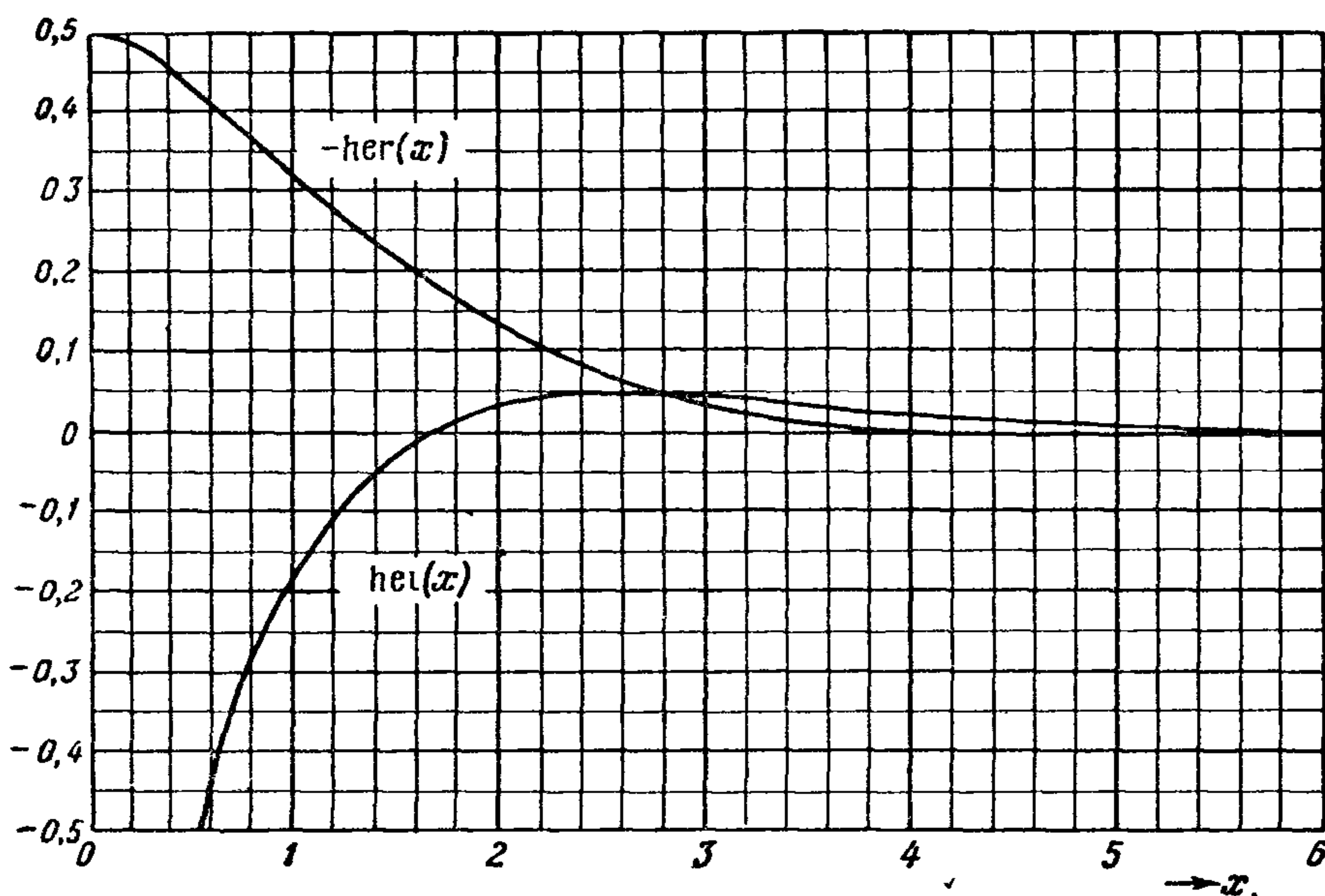
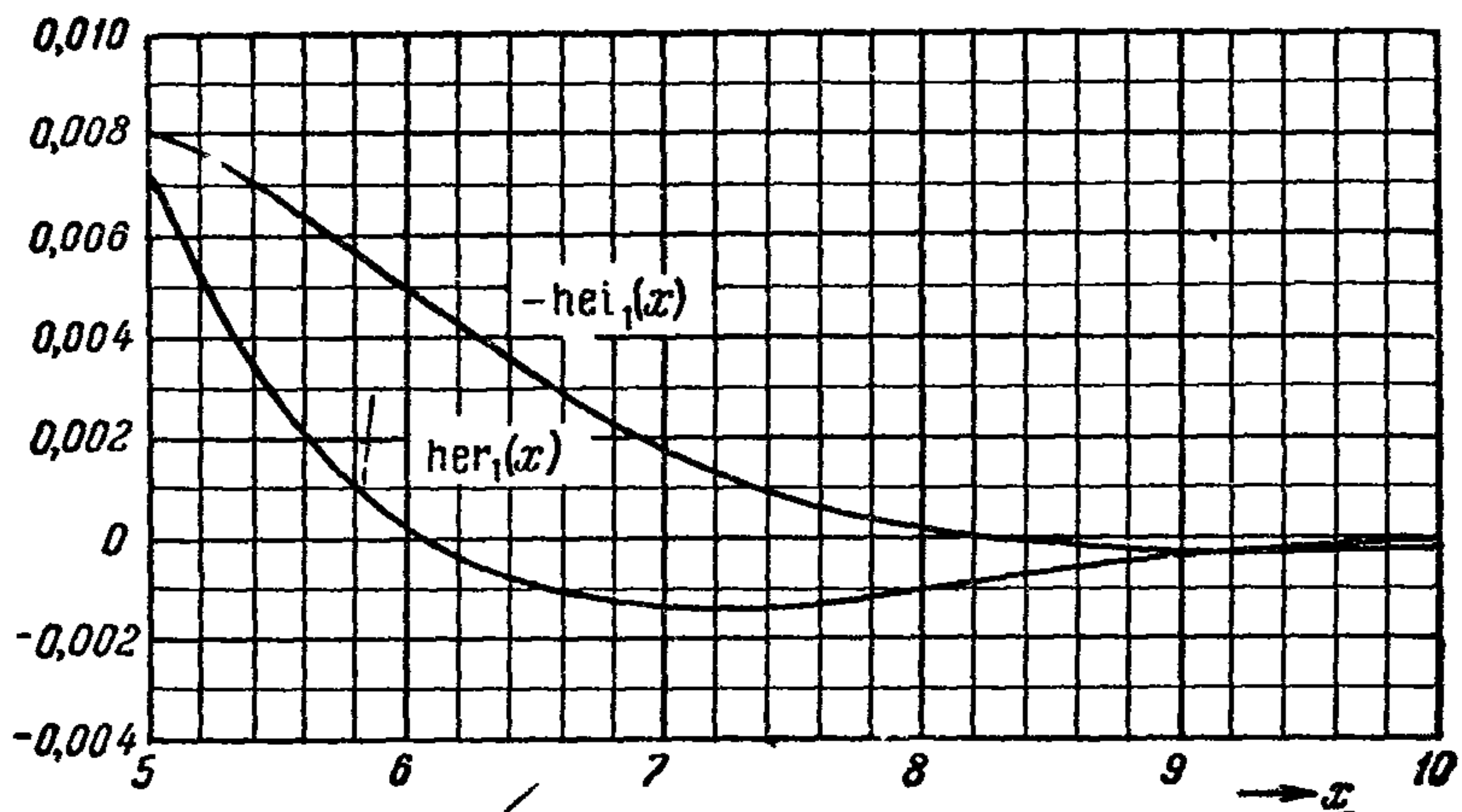
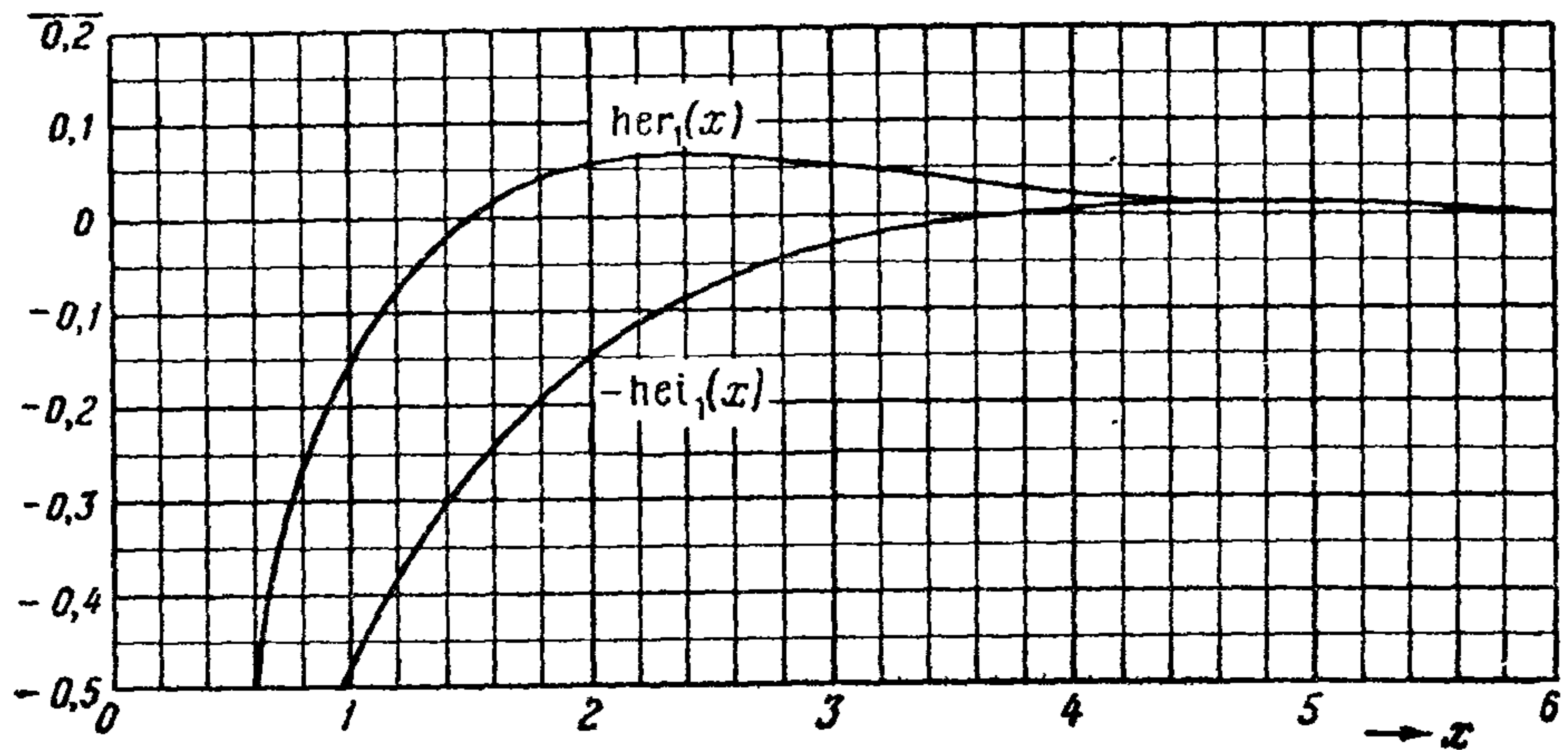


Рис 159 и 160 Функции Кельвина $\text{her}(x)$ и $\text{hei}(x)$.

Рис. 161 и 162. Функции Кельвина $\text{her}_1(x)$ и $\text{hei}_1(x)$.

3.2. Дальнейшие представления и свойства функций Кельвина получаются из представлений и свойств функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$.

Правила дифференцирования:

$$\text{ber}'(z) \pm i \text{bei}'(z) = e^{\mp \frac{\pi}{4} i} [\text{ber}_1(z) \pm i \text{bei}_1(z)],$$

$$\text{her}'(z) \pm i \text{hei}'(z) = e^{\mp \frac{\pi}{4} i} [\text{her}_1(z) \pm i \text{hei}_1(z)].$$

Для действительного $x > 0$ имеем:

$$J_n(x\sqrt{i}) = J_n(xe^{\frac{\pi}{4} i}) = (-1)^n [\text{ber}_n(x) - i \text{bei}_n(x)],$$

$$H_n^{(1)}(x\sqrt{i}) = H_n^{(1)}(xe^{\frac{\pi}{4} i}) = (-1)^{n+1} [\text{her}_n(x) - i \text{hei}_n(x)];$$

в частности,

$$J_0(x\sqrt{i}) = \text{ber}(x) - i \text{bei}(x), \quad H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\text{her}(x) + i \text{hei}(x),$$

$$\frac{d}{dx} [J_0(x\sqrt{i})] = -\sqrt{i} J_1(x\sqrt{i}) = \text{ber}'(x) - i \text{bei}'(x),$$

$$\frac{d}{dx} [H_0^{(1)}(x\sqrt{i})] = -\sqrt{i} H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\text{her}'(x) + i \text{hei}'(x).$$

Часто бывает необходимо знать модуль и аргумент функций Кельвина; тогда пишут:

$$J_\nu(z\sqrt{i}) = b_\nu(z) e^{i\beta_\nu(z)},$$

$$H_\nu^{(1)}(z\sqrt{i}) = h_\nu(z) e^{i\eta_\nu(z)},$$

или

$$\text{ber}_\nu(z) + i \text{bei}_\nu(z) = M_\nu(z) e^{i\Theta_\nu(z)},$$

$$\text{ker}_\nu(z) + i \text{kei}_\nu(z) = N_\nu(z) e^{i\Phi_\nu(z)}$$

(рис. 163—172, таблицы 63, 64).

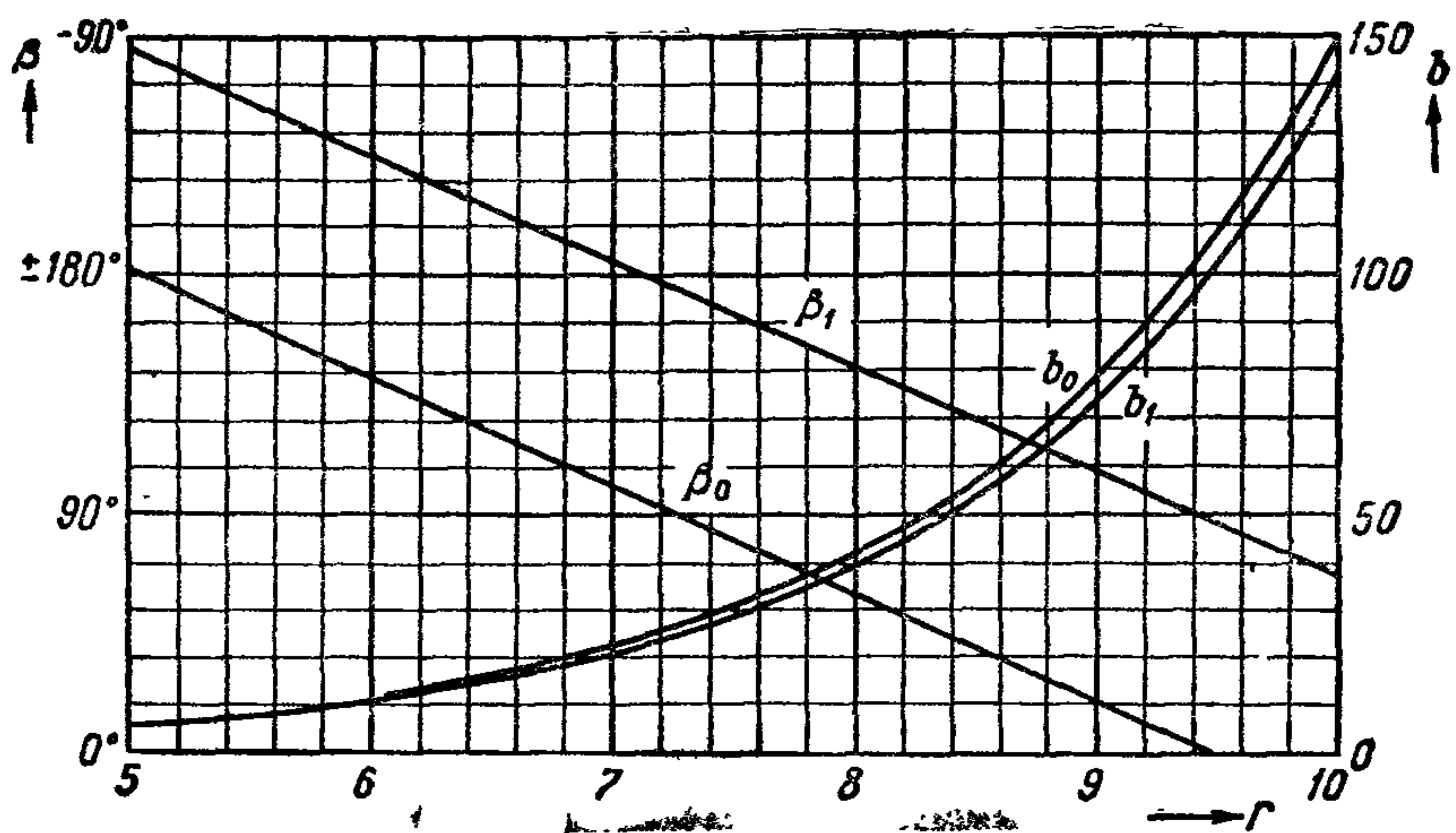
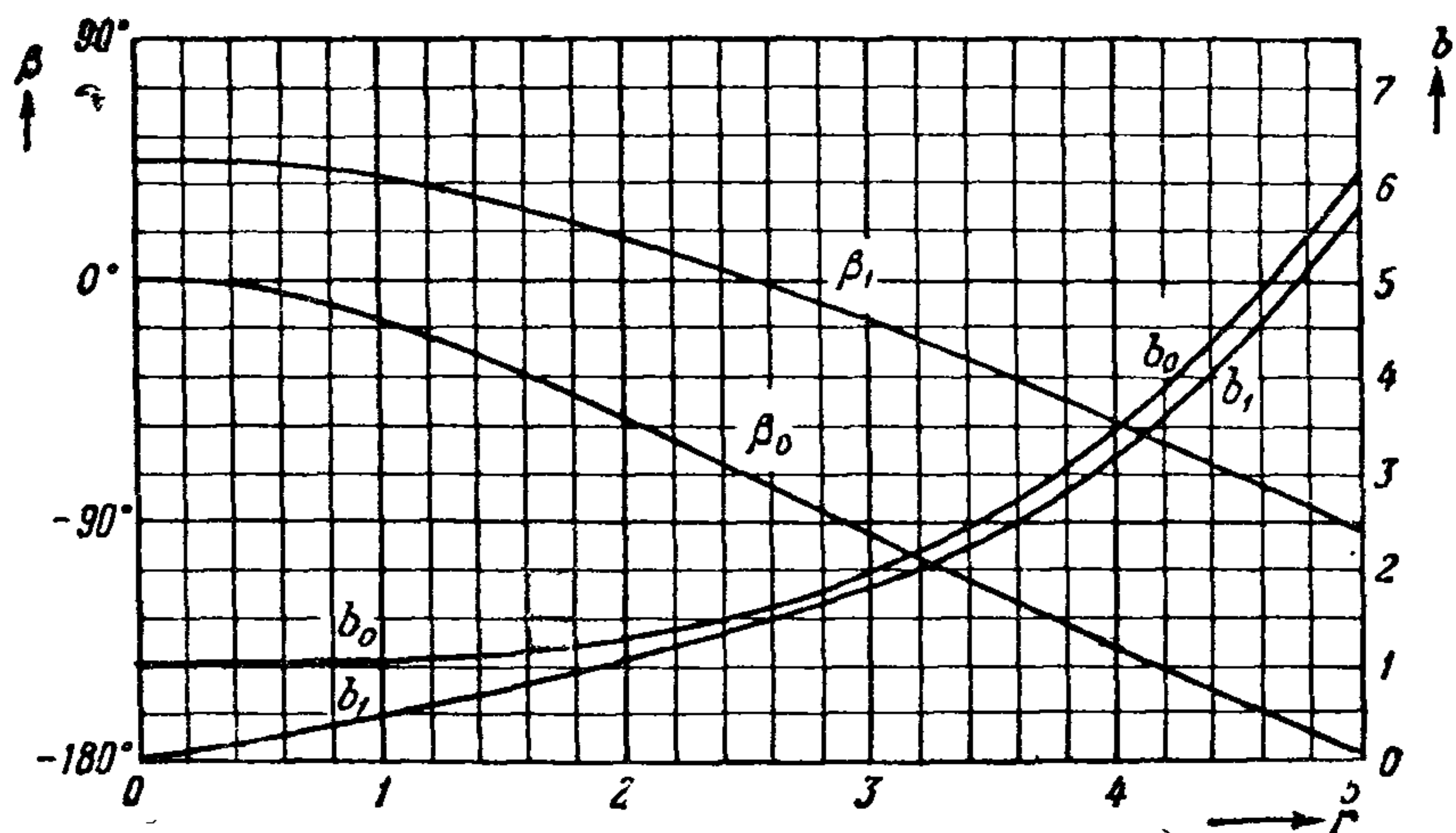


Рис. 163 и 164. Модуль b_n и аргумент β_n функций $J_n(r\sqrt{i})$, $n=0, 1$, как функции r .

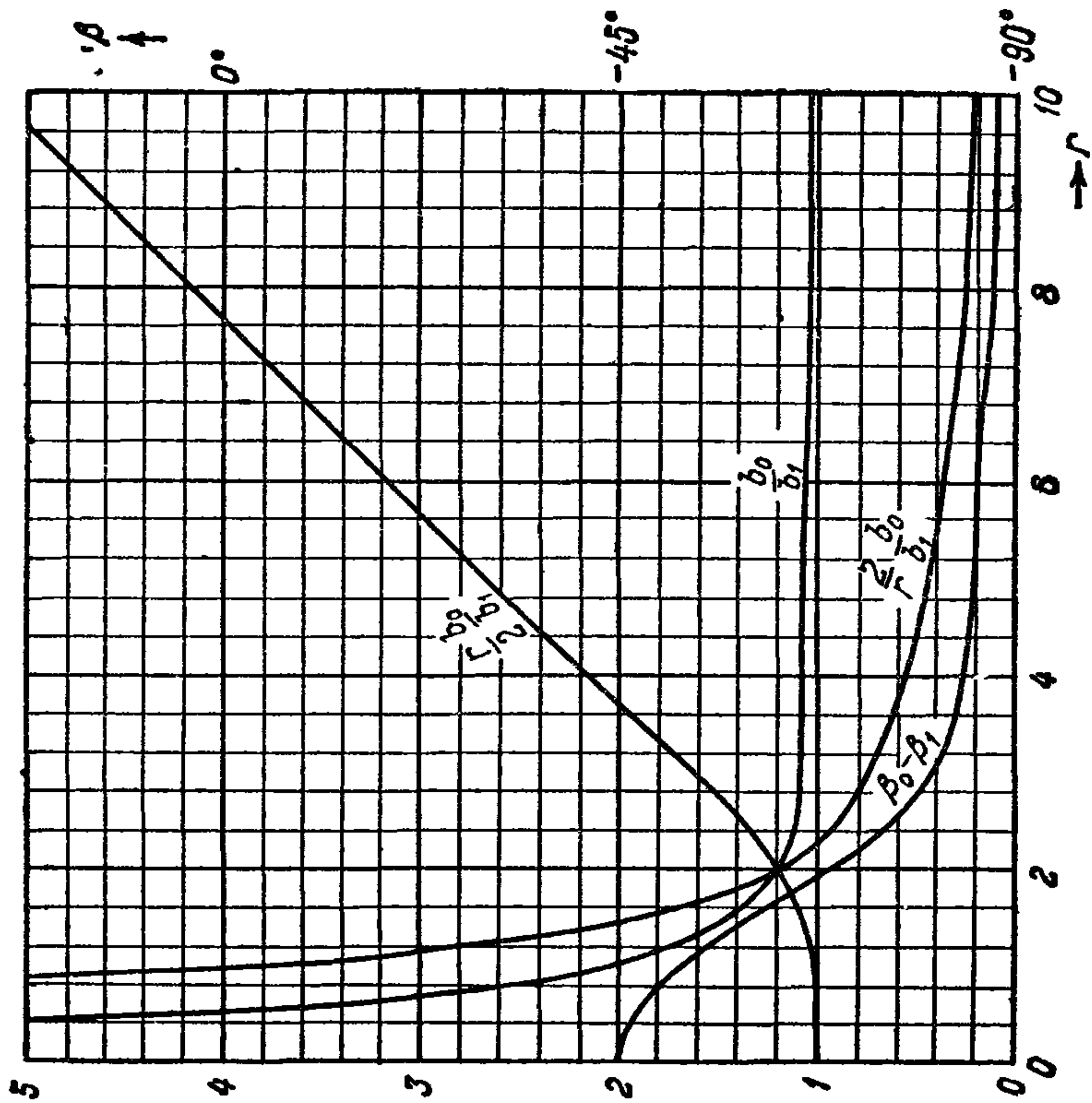


Рис. 165 Функция $\frac{J_0(r\sqrt{i})}{J_1(r\sqrt{i})} = \frac{b_0}{b_1} e^{(\beta_0 - \beta_1)i}$.

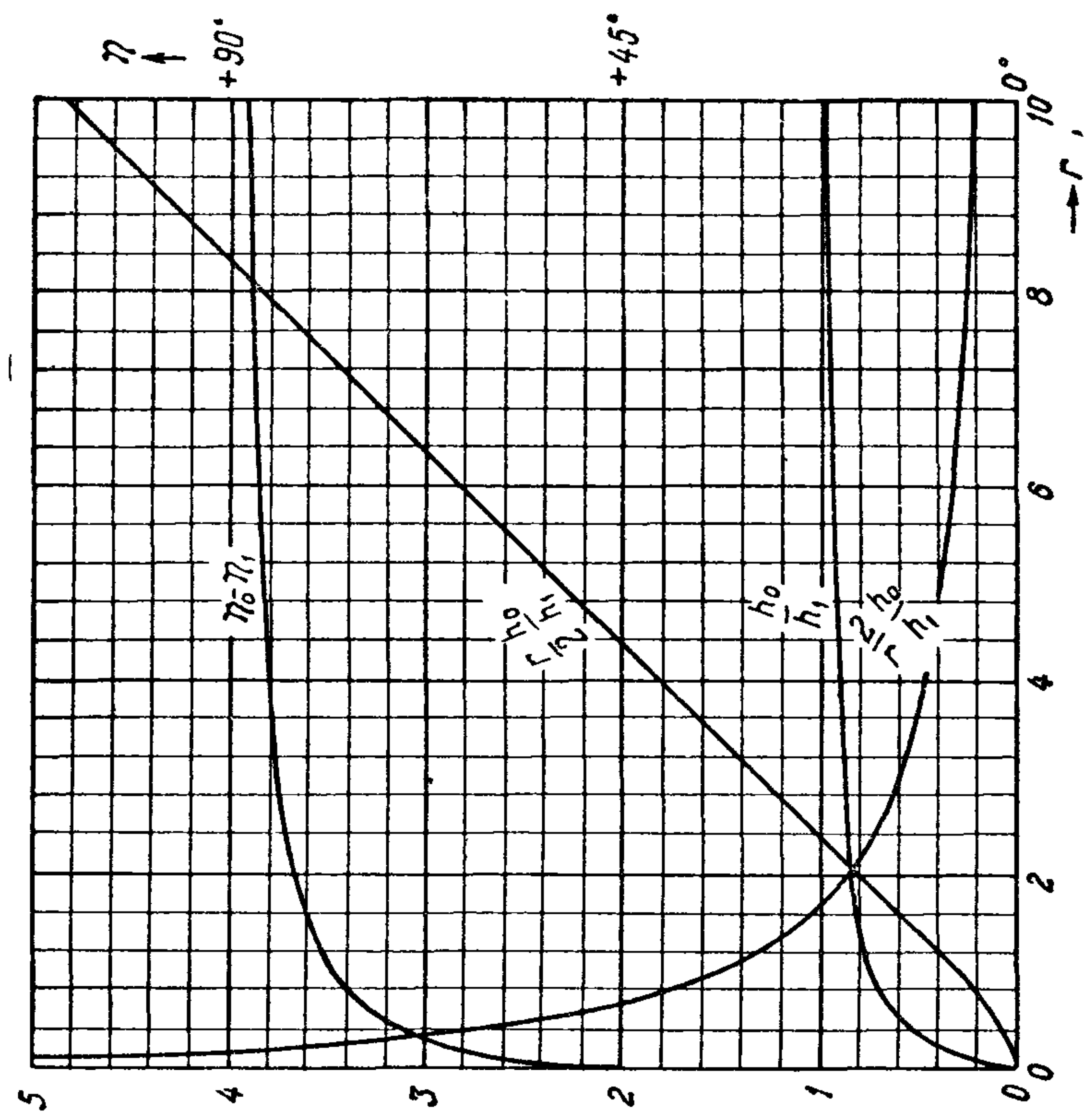


Рис. 166. Функция $\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{i})}{H_1^{(1)}(r\sqrt{i})} = \frac{h_0}{h_1} e^{(\eta_0 - \eta_1)i}$.

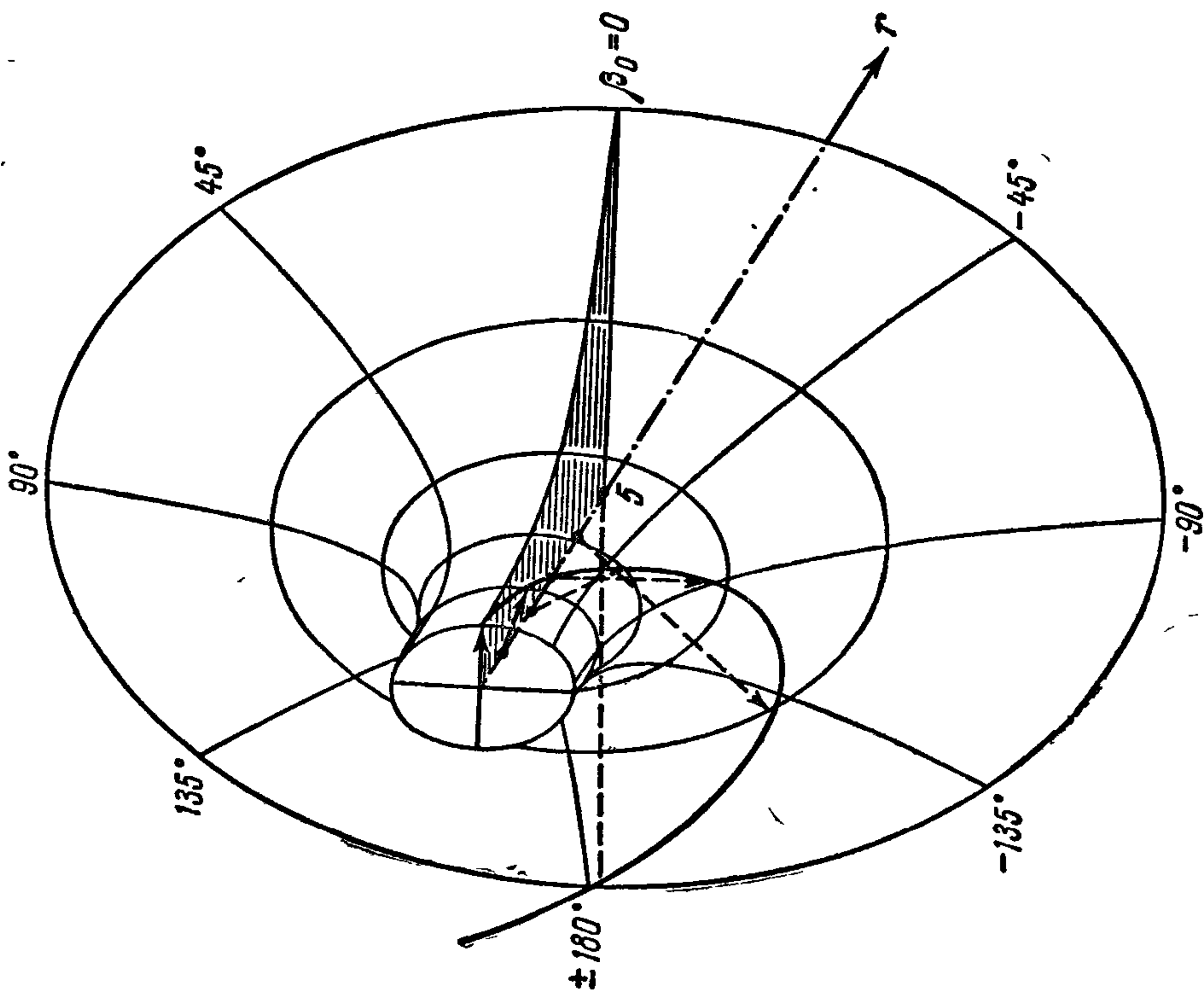


Рис. 167. Векторы $J_0(r \sqrt{i}) = b_0 e^{i/2}$ выходят перпендикулярно из оси r .
Пример: плотность переменного электрического тока в круглом проводе на различных расстояниях от оси провода.

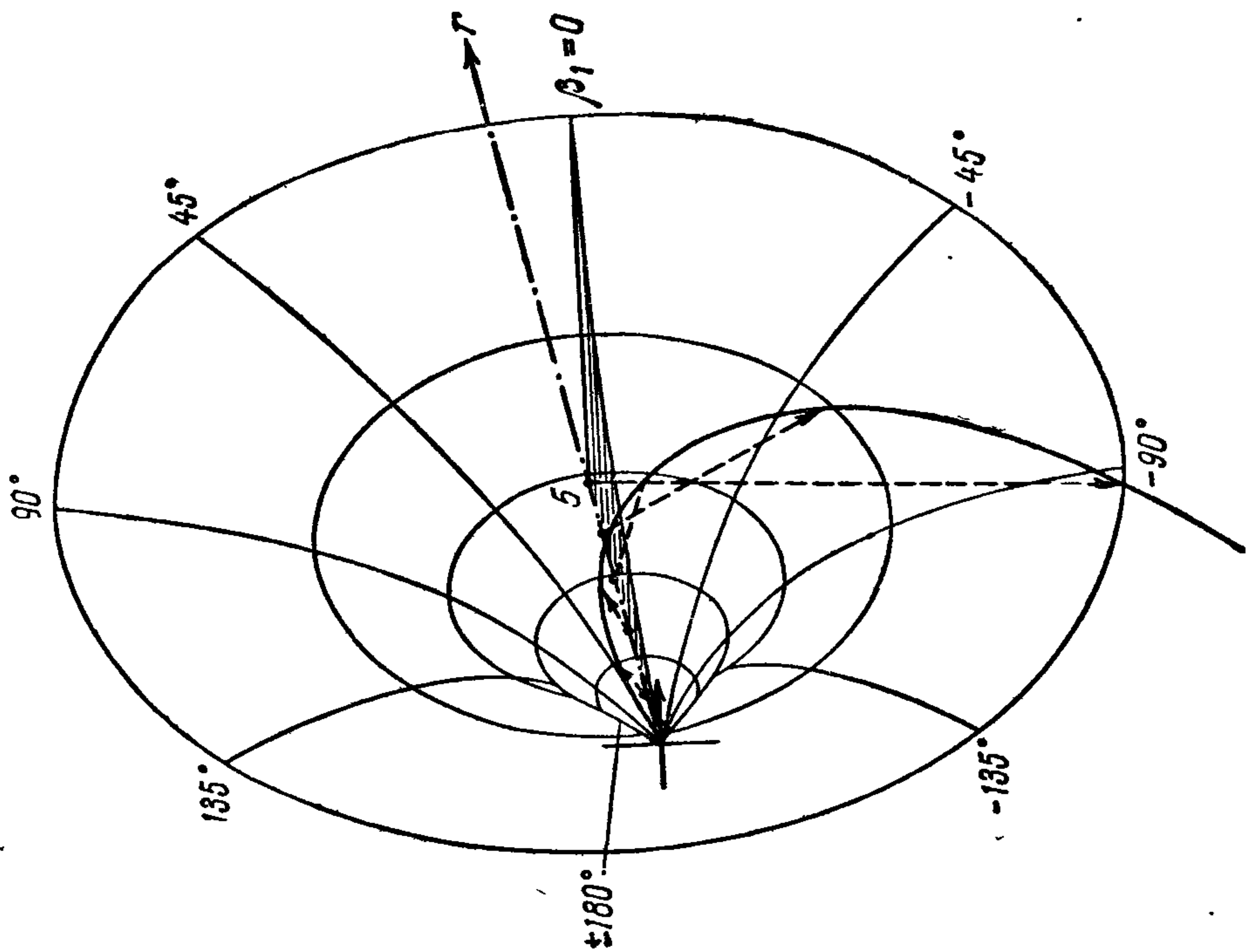


Рис. 168. Векторы $J_1(r \sqrt{i}) = b_1 e^{i/2}$ выходят перпендикулярно из оси r .
Пример: напряжение переменного магнитного поля в круглом проводе на различных расстояниях от оси провода.

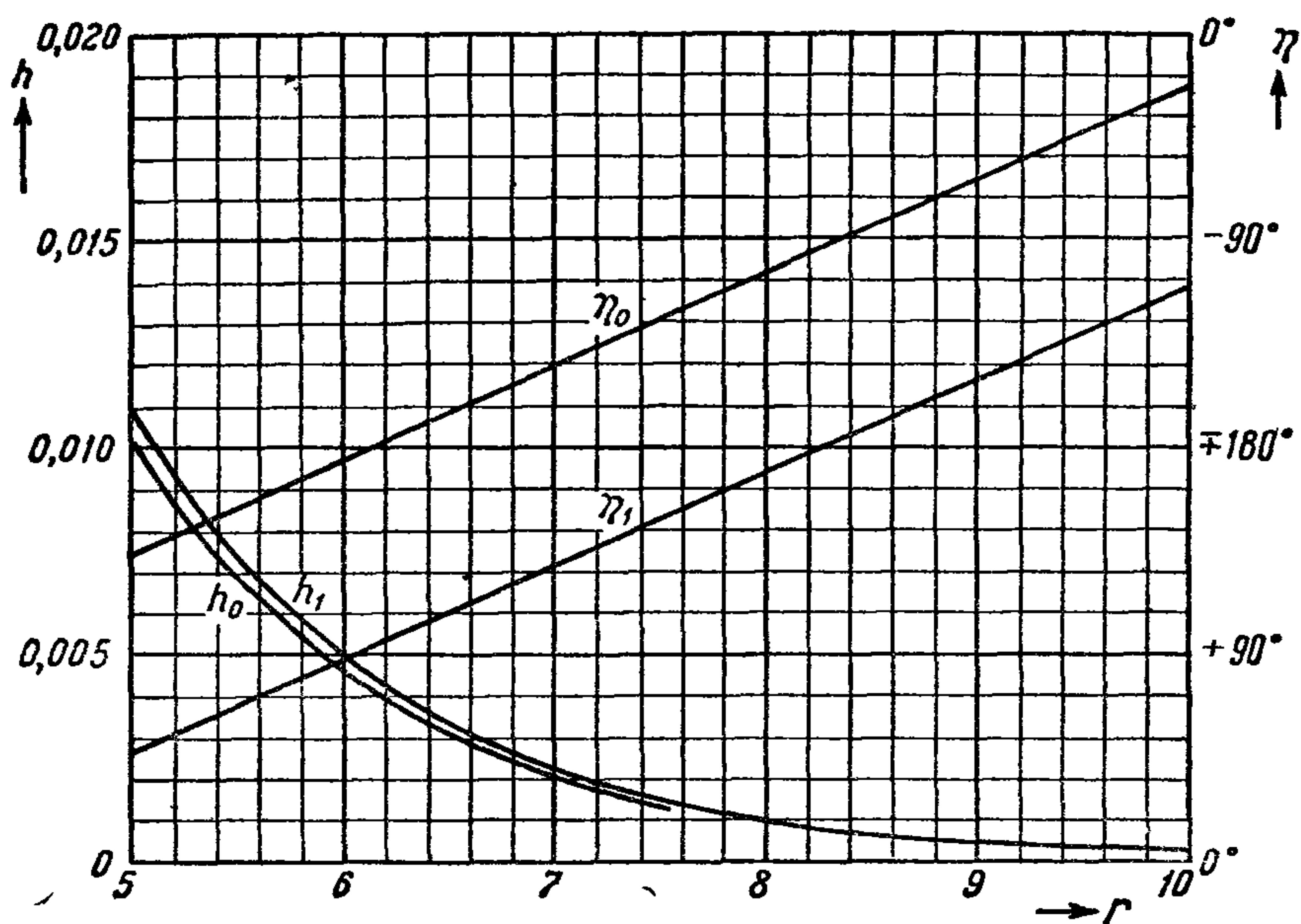
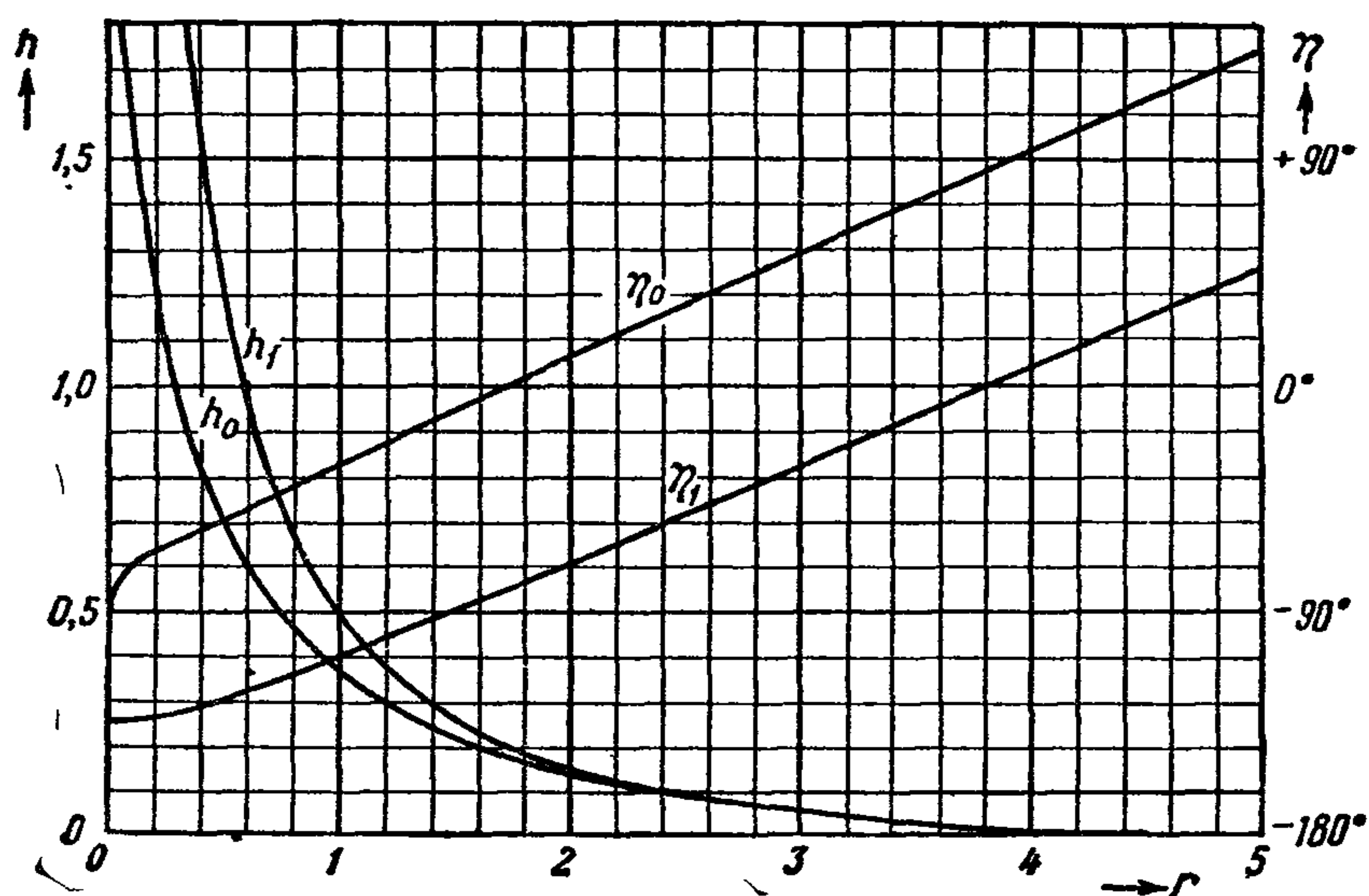


Рис. 169 и 170. Модуль h_n и аргумент η_n функций $H_n^{(1)}(r\sqrt{i})$, $n=0, 1$, как функции r .

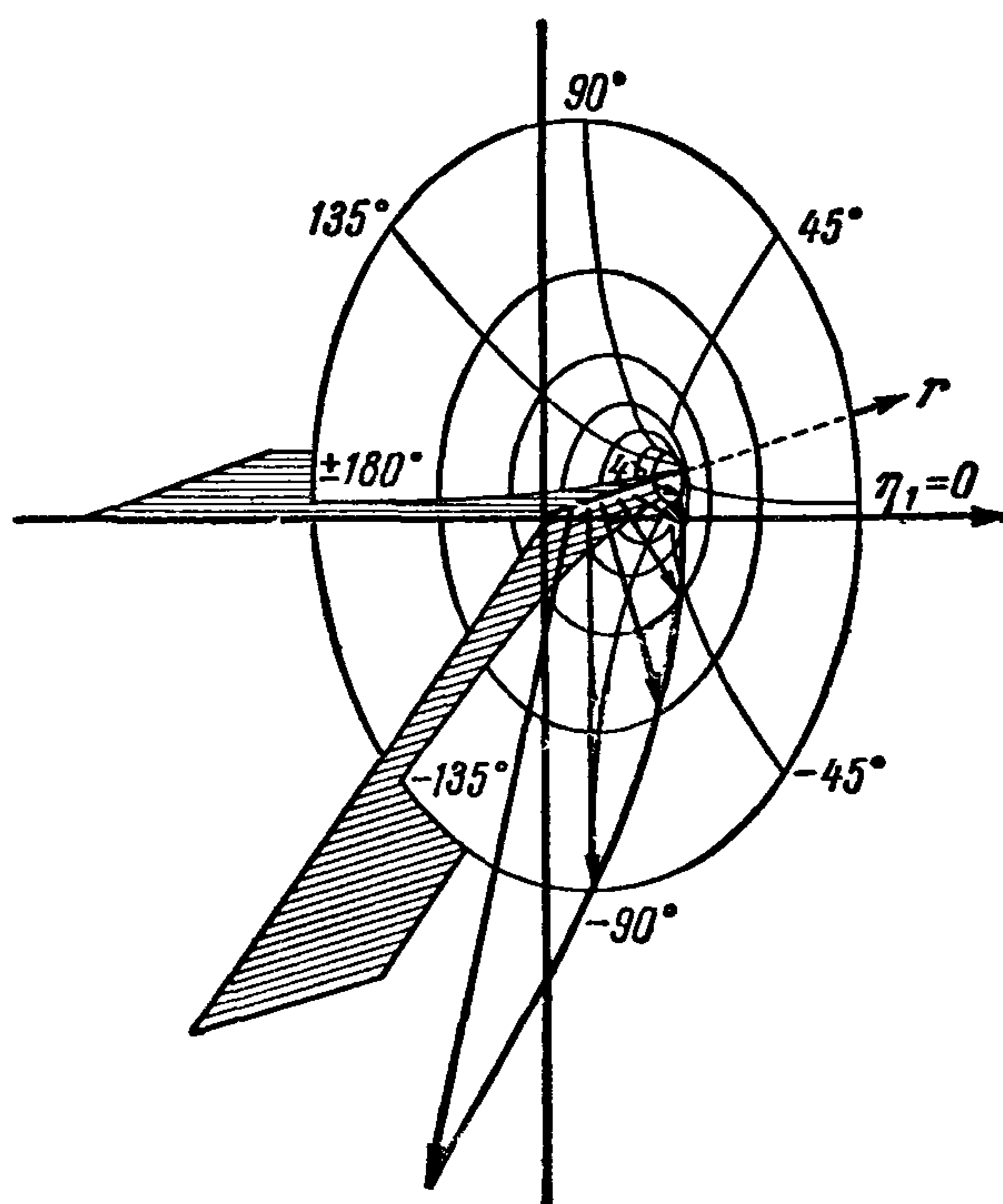
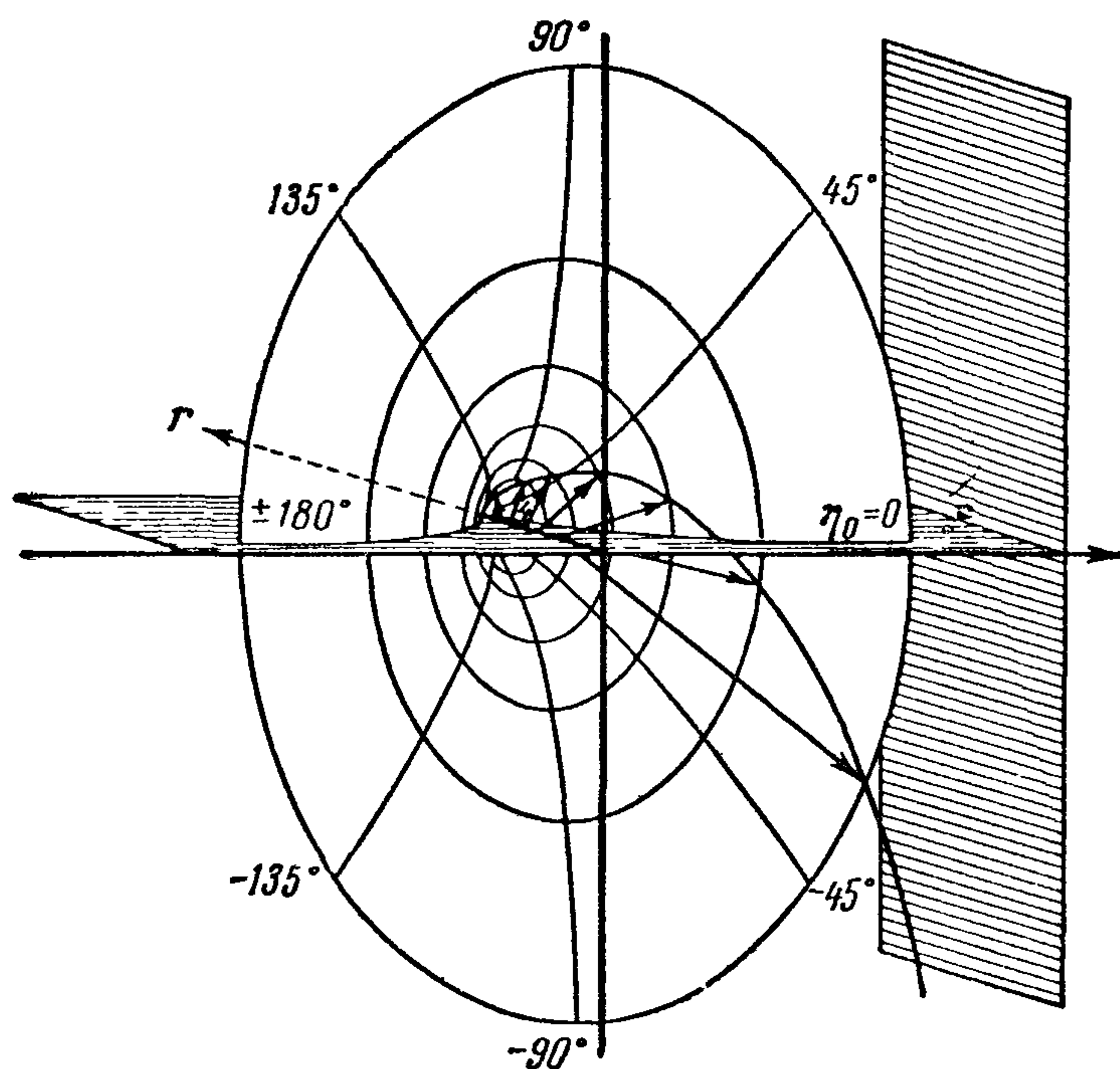


Рис. 171 и 172. Векторы $H_n^{(1)}(r\sqrt{i}) = h_n e^{\eta_n l}$, $n=0, 1$, выходят перпендикулярно из оси r .

Таблица 58. Функции ber (x) и bei (x)

$$\text{ber } x \equiv \text{Re } J_0(x \sqrt{i}), \text{bei } x \equiv -\text{Im } J_0(x \sqrt{i})$$

x	ber x	bei x	x	ber x	bei x	x	ber x	bei x
0.00	+ 1.	+ 0.	1.00	+ 0.	+ 0.	2.00	+ 0.	+ 0.
02	0000	00000 + 20	02	9844 — 6 5	2496 + 50	02	7517 — 50	9723 + 92
04	0000	00010 20	04	9831 7	2596 51 5	04	7417 51 5	9907 92 5
06	0000	00040 20	06	9817 7	2699 52	06	7314 53	*0092 91
08	0000	00090 20	08	9803 7 5	2803 53	08	7208 54 5	0278 94
0 10	0000	00160 20	08	9788 8 5	2909 54	08	7099 56	0466 94
12	0000	00250 + 20	1 10	9771 — 8 5	3017 + 55	2 10	6987 — 58 5	0654 + 94 5
14	0000	00360 20	12	9754 9	3127 56	12	6871 59	0843 95
16	0000	00490 20	14	9736 9 5	3239 57	14	6753 61	1033 96
18	0000	00640 20	16	9717 10	3353 58	16	6631 62 5	1225 96
0 20	0000	00810 20	18	9697 10 5	3469 59	18	6506 64 5	1417 96 5
22	0000	01000 + 20	1.20	9676 — 11	3587 + 60	2 20	6377 — 66	1610 + 96 5
24	*9999	01210 20	22	9654 11 5	3707 60 5	22	6245 68	1803 97 5
26	9999	01440 20	24	9631 12	3828 62	24	6109 69 5	1998 97 5
28	9999	01690 20	26	9607 13	3952 62 5	26	5970 71 5	2193 98
0 30	9999	01960 20	28	9581 13 5	4077 63 5	28	5827 73 5	2389 98
32	9998	02250 + 20	1.30	9554 — 14	4204 + 64 5	2 30	5680 — 75	2585 + 98 5
34	9998	02560 20	32	9526 14 5	4333 65 5	32	5530 77	2782 99
36	9997	02890 20	34	9497 15 5	4464 66 5	34	5376 79	2980 99
38	9997	03240 20	36	9466 16	4597 67	36	5218 81	3178 99
0.40	9996	03610 20	38	9434 16 5	4731 68	38	5056 83	3376 99 5
42	9995	04000 + 20	1.40	9401 — 17 5	4867 + 69	2.40	4890 — 84 5	3575 + 99 5
44	9994	04410 20	42	9366 18 5	5005 70	42	4721 87	3774 99 5
46	9993	04840 20	44	9329 19	5145 71	44	4547 89	3973 100
48	9992	05290 20	46	9291 19 5	5287 71 5	46	4369 91 5	4173 99 5
0 50	9990 — 0 5	05759 20	48	9252 20 5	5430 73	48	4186 93	4372 100
52	9989 1	0625 + 24 5	1.50	9211 — 21 5	5576 + 73 5	2.50	4000 — 95 5	4572 + 99 5
54	9987 1	0676 25 5	52	9168 22 5	5723 74	52	3809 97 5	4771 100
56	9985 1 5	0729 26 5	54	9123 23	5871 75 5	54	3614 100	4971 100
58	9982 1	0784 27 5	56	9077 24	6022 76	56	3414 102	5171 99 5
0 60	9980 — 1 5	0841 28 5	58	9029 25	6174 76 5	58	3210 104 5	5370 99 5
62	9977 1 5	0900 + 30 5	1 60	8979 — 26	6327 + 78	2.60	3001 — 106 5	5569 + 99
64	9974 2	0961 31 5	62	8927 27	6483 78 5	62	2788 109	5767 99 5
66	9970 1 5	1024 32 5	64	8873 28	6640 79	64	2570 111 5	5966 99
68	9967 2 5	1089 33 5	66	8817 28 5	6798 80 5	66	2347 114	6164 98 5
0 70	9962 — 2	1156 34	68	8760 30	6959 80 5	68	2119 116	6361 98
72	9958 2 5	1224 + 35 5	1 70	8700 — 31	7120 + 82	2.70	1887 — 118 5	6557 + 98
74	9953 2 5	1295 36 5	72	8638 32 5	7284 82 5	72	1650 121	6753 98
76	9948 3	1368 37 5	74	8573 33	7449 83	74	1408 123 5	6949 97
78	9942 3	1443 38 5	76	8507 34 5	7615 84	76	1161 126 5	7143 96 5
0.80	9936 — 3 5	1520 39 5	78	8438 35 5	7783 85	78	0908 128 5	7336 96 5
82	9929 3 5	1599 + 40 5	1 80	8367 — 36 5	7953 + 85 5	2.80	0651 — 131	7529 + 95 5
84	9922 3 5	1680 41	82	8294 38	8124 86	82	0389 134	7720 95
86	9915 4 5	1762 42 5	84	8218 39	8296 87	84	0121 136 5	7910 94
88	9906 4	1847 43 5	86	8140 40 5	8470 87 5	86	*0152 139	8098 94
0.90	9898 — 5	1934 44 5	88	8059 42	8645 88	88	0430 142	8286 93
92	9888 5	2023 + 45	1.90	7975 — 43	8821 + 89	2.90	0714 — 144 5	8472 + 92
94	9878 5 5	2113 46 5	92	7889 44 5	8999 89 5	92	1003 147	8656 91 5
96	9867 5 5	2206 47 5	94	7800 45 5	9178 90	94	1297 150	8839 90 5
98	9856 6	2301 48	96	7709 47	9358 91	96	1597 153	9020 89 5
1.00	9844 + 0.	2397 49 5	98	7615 49	9540 91 5	98	1903 155 5	9199 88 5
		2496 + 0.	2.00	7517 + 0.	9723 + 0.	3.00	2214 — 0.	9376 + 1.

Продолжение табл. 58

x	ber x	bei x	x	ber x	bei x	x	ber x	bei x
3.00	-0.2214 - 158.5	+ 1, 9376 + 87.5	4.00	-2.563 - 31.5	+ 2.2927 - 51.5	5.00	-6.230 - 38.5	+ 0.116 - 44
02	0.2531 161	9551 86.5	02	2.626 32	2.2824 56.5	02	6.307 38	+ 0.028 45
04	0.2853 164	9724 85	04	2.690 32	2.2711 62	04	6.383 38	- 0.062 46.5
06	0.3181 167	9894 84.5	06	2.754 32.5	2.2587 66.5	06	6.459 38	0.155 47.5
08	0.3515 170	*0063 82.5	08	2.819 32.5	2.2454 72.5	08	6.535 38	0.250 48.5
3.10	-0.3855 - 173	0228 + 82	4.10	-2.884 - 33	+ 2.2309 - 77.5	5.10	-6.611 - 37.5	- 0.347 - 49.5
12	0.4201 176	0392 80	12	2.950 33.5	2.2154 83	12	6.686 37	0.446 50.5
14	0.4553 178.5	0552 79	14	3.017 33.5	2.1988 88.5	14	6.760 37	0.547 52
16	0.4910 182	0710 77	16	3.084 33.5	2.1811 94.5	16	6.834 37	0.651 53
18	0.5274 185	0864 76	18	3.151 34	2.1622 100	18	6.908 36	0.757 54.5
3.20	-0.5644 - 188	1016 + 74	4.20	-3.219 - 34.5	+ 2.142 - 10.5	5.20	-6.980 - 36.5	- 0.866 - 55.5
22	0.6020 190.5	1164 72.5	22	3.288 34.5	2.121 11.5	22	7.053 35.5	0.977 56.5
24	0.6401 194	1309 71	24	3.357 35	2.098 11.5	24	7.124 35.5	1.090 58
26	0.6789 197.5	1451 69	26	3.427 35	2.075 12.5	26	7.195 35	1.206 59
28	0.7184 200	1589 67	28	3.497 35.5	2.050 13	28	7.265 34.5	1.324 60
3.30	-0.7584 - 203.5	1723 + 65.5	4.30	-3.568 - 35.5	+ 2.024 - 14	5.30	-7.334 - 34.5	- 1.444 - 61.5
32	0.7991 206.5	1854 63	32	3.639 36	1.996 14.5	32	7.403 33.5	1.567 63
34	0.8404 209.5	1980 61.5	34	3.711 36	1.967 15	34	7.470 33.5	1.693 64
36	0.8823 212.5	2103 59	36	3.783 36	1.937 15.5	36	7.537 33	1.821 65
38	0.9248 216	2221 56.5	38	3.855 36.5	1.906 16.5	38	7.603 32	1.951 67
3.40	-0.968 - 22	2334 + 55	4.40	-3.928 - 37	+ 1.873 - 17.5	5.40	-7.667 - 32	- 2.085 - 67.5
42	1.012 22	2444 52	42	4.002 36.5	1.838 18	42	7.731 31	2.220 69
44	1.056 22.5	2548 50	44	4.075 37.5	1.802 18.5	44	7.793 31	2.358 70.5
46	1.101 23	2648 47.5	46	4.150 37	1.765 19.5	46	7.855 30	2.499 72
48	1.147 23.5	2743 44.5	48	4.224 37.5	1.726 20	48	7.915 29.5	2.643 73
3.50	-1.194 - 23.5	2832 + 42.5	4.50	-4.299 - 37.5	+ 1.686 - 21	5.50	-7.974 - 28.5	- 2.789 - 74.5
52	1.241 23.5	2917 39.5	52	4.374 38	1.644 21.5	52	8.031 28	2.938 75.5
54	1.288 24.5	2996 36.5	54	4.450 38	1.601 22.5	54	8.087 27.5	3.089 77
56	1.337 24.5	3069 34	56	4.526 38	1.556 23.5	56	8.142 26.5	3.243 78.5
58	1.386 24.5	3137 31	58	4.602 38	1.509 24	58	8.195 26	3.400 80
3.60	-1.435 - 25.5	3199 + 27.5	4.60	-4.678 - 38.5	+ 1.461 - 25	5.60	-8.247 - 25	- 3.560 - 81
62	1.486 25.5	3254 25	62	4.755 38.5	1.411 25.5	62	8.297 24	3.722 82.5
64	1.537 25.5	3304 21.5	64	4.832 38.5	1.360 27	64	8.345 23.5	3.887 84
66	1.588 26	3347 18	66	4.909 38.5	1.306 27.5	66	8.392 22	4.055 85
68	1.640 26.5	3383 15	68	4.986 39	1.251 28	68	8.436 21.5	4.225 87
3.70	-1.693 - 27	3413 + 11.5	4.70	-5.064 - 39	+ 1.195 - 29.5	5.70	-8.479 - 20.5	- 4.399 - 88
72	1.747 27	3436 8	72	5.142 38.5	1.136 30	72	8.520 20	4.575 89
74	1.801 27.5	3452 4	74	5.219 39	1.076 31	74	8.560 18.5	4.753 91
76	1.856 27.5	3460 + 0.5	76	5.297 39	1.014 32	76	8.597 17.5	4.935 92.5
78	1.911 28	3461 - 3.5	78	5.375 39	0.950 33	78	8.632 16	5.120 93.5
3.80	-1.967 - 28.5	3454 - 7	4.80	-5.453 - 39	+ 0.884 - 34	5.80	-8.664 - 15.5	- 5.307 - 95
82	2.024 29	3440 11.5	82	5.531 39	0.816 35	82	8.695 14	5.497 96.5
84	2.082 29	3417 15	84	5.609 39	0.746 36	84	8.723 13	5.690 98
86	2.140 29	3387 19.5	86	5.687 39	0.674 36.5	86	8.749 12	5.886 99.5
88	2.198 30	3348 24	88	5.765 39	0.601 38	88	8.773 10.5	6.084 100.5
3.90	-2.258 - 30	3300 - 28	4.90	-5.843 - 39	+ 0.525 - 39	5.90	-8.794 - 9	- 6.285 - 102.5
92	2.318 30	3244 32.5	92	5.921 38.5	0.447 39.5	92	8.812 8	6.490 103.5
94	2.378 30.5	3179 37.5	94	5.998 39	0.368 41	94	8.828 6.5	6.697 105
96	2.439 31	3104 42	96	6.076 38.5	0.286 42	96	8.841 5	6.907 106
98	2.501 31	3020 46.5	98	6.153 38.5	0.202 43	98	8.851 3.5	7.119 108
4.00	-2.563	2927 + 2,	5.00	-6.230	+ 0.116	6.00	-8.858	-7.335

Т а б л и ц а 59. Функции $\text{ber}'(x)$ и $\text{bei}'(x)$

$$\text{ber}'x = \frac{d}{dx} \text{Re} J_0(x\sqrt{i}) = -\text{Re} \sqrt{i} J_1(x\sqrt{i}), \text{bei}'x = -\frac{d}{dx} \text{Im} J_0(x\sqrt{i}) = \text{Im} \sqrt{i} J_1(x\sqrt{i})$$

x	ber'x	bei'x	x	ber'x	bei'x	x	ber'x	bei'x
0.00	- 0,0	+ 0,	1.00	- 0,	+ 0,	2.00	- 0,	+ 0,
02	0000	0000 + 50	02	0624 - 19 5	4974 + 48 5	02	4931 - 73	9170 + 29
04	0000	0100 50	04	0663 19 5	5071 48 5	04	5077 74,5	9228 28
06	0001 - 0,5	0200 50	06	0702 21	5168 48,5	06	5226 76	9284 27
08	0001 1	0300 50	08	0744 21	5265 48,5	08	5378 77,5	9338 26,5
0.10	0003 1,5	0400 50	1.10	0786 22,5	5362 48	1.10	5533 79	9391 25,5
12	0006 - 2,5	0500 + 50	12	0831 - 23	5458 + 48	12	5691 - 80	9442 + 24 5
14	0011 3	0600 50	14	0877 24	5554 48	14	5851 81,5	9491 23 5
16	0017 4,5	0700 50	16	0925 24,5	5650 47 5	16	6014 83	9538 22
18	0026 5	0800 50	18	0974 25,5	5745 47 5	18	6180 84	9582 21 5
0.20	0036 7	0900 50	2.00	1025 26,5	5840 47,5	2.00	6348 86	9625 20,5
22	0050 - 8 5	1000 + 50	22	1078 - 27,5	5935 + 47 5	22	6520 - 87	9666 + 19 5
24	0067 9,5	1100 50	24	1133 28	6030 47	24	6694 89	9705 18
26	0086 12	1200 50	26	1189 29,5	6124 46,5	26	6872 90	9741 17
28	0110 13 5	1300 50	28	1248 30	6217 47	28	7052 91	9775 16
0.30	0137 16	1400 50	3.00	1308 31	6311 46	3.00	7234 93	9807 14 5
32	0169 - 18	1500 + 50	32	1370 - 32	6403 + 46,5	32	7420 - 94 5	9836 + 13,5
34	0205 20 5	1600 50	34	1434 33	6496 46	34	7609 95 5	9863 12
36	0246 23	1700 50	36	1500 33,5	6588 45 5	36	7800 97 5	9887 11
38	0292 25 5	1800 50	38	1567 35	6679 45,5	38	7995 98 5	9909 9,5
0.40	0343 28 5	1900 50	4.00	1637 36	6770 45	4.00	8192 100	9928 8
42	0400 - 31 5	2000 + 50	42	1709 - 37	6860 + 45	42	8392 - 101,5	9944 + 7
44	0463 34,5	2100 50	44	1783 38	6950 44 5	44	8595 103	9958 5
46	0532 38	2200 49,5	46	1859 39	7039 44	46	8801 104,5	9968 4
48	0608 41,5	2299 50	48	1937 40,5	7127 44	48	9010 105 5	9976 3 5
0.50	0691 45	2399 50	5.00	2018 41	7215 44	5.00	9221 107 5	9981 + 1
52	0781 - 49	2499 + 50	52	2100 - 42 5	7303 + 43	52	9436 - 108 5	9983 - 1
54	0879 52 5	2599 50	54	2185 43,5	7389 43	54	9653 110	9981 2
56	0984 57	2699 50	56	2272 44,5	7475 42 5	56	9873 112	9977 4
58	1098 60 5	2799 49,5	58	2361 45,5	7560 42	58	*0097 113	9969 6
0.60	1219 65 5	2898 50	6.00	2452 46 5	7644 41 5	6.00	0323 114	9957 7
62	1350 - 69 5	2998 + 50	62	2545 - 48	7727 + 41,5	62	0551 - 116	9943 - 9,5
64	1489 74 5	3098 49,5	64	2641 49,5	7810 41	64	0783 117	9924 10,5
66	1638 79,5	3197 50	66	2740 50	7892 40	66	1017 119	9903 13
68	1797 84	3297 49,5	68	2840 51,5	7972 40	68	1255 120	9877 14,5
0.70	1965 89	3396 50	7.00	2943 52,5	8052 39 5	7.00	1495 121,5	9848 16,5
72	2143 - 94,5	3496 + 49 5	72	3048 - 54	8131 + 39	72	1738 - 122,5	9815 - 18,5
74	2332 100	3595 49 5	74	3156 55	8209 38,5	74	1983 124	9778 20,5
76	2532 105,5	3694 49 5	76	3266 56 5	8286 37 5	76	2231 125,5	9737 22 5
78	2743 111	3793 49,5	78	3379 57 5	8361 37,5	78	2482 127	9692 24,5
0.80	2965 117	3892 49,5	8.00	3494 59	8436 36,5	8.00	2736 128,5	9643 26,5
82	3199 - 123	3991 + 49,5	82	3612 - 60	8509 + 36	82	2993 - 129 5	9590 - 29
84	3445 129	4090 49,5	84	3732 61 5	8581 35,5	84	3252 130 5	9532 31
86	3703 135	4189 49,5	86	3855 62 5	8652 35	86	3513 132,5	9470 33 5
88	3973 142	4288 49	88	3980 64	8722 34	88	3778 133,5	9403 35,5
0.90	4257 148,5	4386 49,5	9.00	4108 65	*8790 33 5	9.00	4045 134,5	9332 37,5
92	4554 - 155	4485 + 49	92	4238 - 67	8857 + 33	92	4314 - 136	9257 - 40,5
94	4864 162	4583 49	94	4372 67 5	8923 32	94	4586 137 5	9176 42,5
96	5188 169	4681 49	96	4507 69,5	8987 31,5	96	4861 138	9091 45,5
98	5526 176	4779 48,5	98	4646 70,5	9050 30,5	98	5137 140	9000 47,5
1.00	5878 183,5	4876 49	2.00	4787 72	9111 29,5	3.00	5417 140,5	8905 50
	6245	4974		4931	9170		5698	8805
	- 0,0	+ 0,		- 0,	+ 0,		- 1,	+ 0,

Продолжение табл. 59

x	$ber'x$	$bei'x$	x	$ber'x$	$bei'x$	x	$ber'x$	$bei'x$
3,00	— 1,570 — 14	+ 0, 8805 — 53	4,00	— 3, 135 — 15	— 0,491 — 24,5	5,00	— 3,845 + 7	— 4,354 — 54
02	1,598 14,5	8699 55,5	02	165 14,5	0,540 25,5	02	3,831 7,5	4,462 54,5
04	1,627 14,5	8588 58	04	194 15	0,591 25,5	04	3,816 8,5	4,571 55
06	1,656 14,5	8472 61	06	224 14,5	0,642 26,5	06	3,799 9,5	4,681 55,5
08	1,685 14,5	8350 63,5	08	253 14,5	0,695 26,5	08	3,780 10,5	4,792 56,5
3,10	— 1,714 — 15	8223 — 66,5	4,10	282 — 14	— 0,748 — 27,5	5,10	— 3,759 + 11,5	— 4,905 — 56,5
12	1,744 14,5	8090 69,5	12	310 14	0,803 27,5	12	3,736 12	5,018 57,5
14	1,773 15	7951 72	14	338 14	0,858 28,5	14	3,712 13	5,133 58
16	1,803 15	7807 75,5	16	366 13,5	0,915 29	16	3,686 14,5	5,249 58,5
18	1,833 15,5	7656 78,5	18	393 13,5	0,973 29,5	18	3,657 15	5,366 59
3,20	— 1,864 — 15	7499 — 81,5	4,20	420 — 13	— 1,032 — 30	5,20	— 3,627 + 16	— 5,484 — 59,5
22	1,891 15,5	7336 84,5	22	446 13	1,092 30,5	22	3,595 17,5	5,603 60
24	1,925 15,5	7167 87,5	24	472 12,5	1,153 31	24	3,560 18	5,723 60,5
26	1,956 15,5	6992 91	26	497 12,5	1,215 32	26	3,524 19,5	5,844 61
28	1,987 15,5	6810 94,5	28	522 12,5	1,279 32	28	3,485 20	5,966 61,5
3,30	— 2,018 — 15,5	6621 — 97,5	4,30	547 — 11,5	— 1,343 — 33	5,30	— 3,445 + 21,5	— 6,089 — 62
32	2,049 15,5	6426 101	32	570 11,5	1,409 33,5	32	3,402 23	6,213 63
34	2,080 16	6224 104	34	593 11,5	1,476 34	34	3,356 23,5	6,339 63
36	2,112 16	6016 108	36	616 11	1,544 34,5	36	3,309 25	6,465 63,5
38	2,144 15,5	5800 111,5	38	638 10,5	1,613 35	38	3,259 26,5	6,592 64
3,40	— 2,175 — 16	5577 — 115	4,40	659 — 10	— 1,683 — 36	5,40	— 3,206 + 27	— 6,720 — 64,5
42	2,207 16	5347 118,5	42	679 10	1,755 36	42	3,152 29	6,849 65
44	2,239 16,5	5110 122,5	44	699 9,5	1,827 37	44	3,094 30	6,979 65
46	2,272 16	4865 126	46	718 9	1,901 37,5	46	3,034 31	7,109 66
48	2,304 16	4613 130	48	736 9	1,976 38,5	48	2,972 32,5	7,241 66
3,50	— 2,336 — 16	4353 — 133,5	4,50	754 — 8	— 2,053 — 38,5	5,50	— 2,907 + 34	— 7,373 — 66,5
52	2,368 16,5	4086 138	52	770 8	2,130 39,5	52	2,839 35	7,506 67
54	2,401 16	3810 141,5	54	786 7,5	2,209 40	54	2,769 36,5	7,640 67
56	2,433 16,5	3527 145,5	56	801 7	2,289 40,5	56	2,696 38	7,774 67,5
58	2,466 16	3236 149,5	58	815 6,5	2,370 41	58	2,620 39,5	7,909 68
3,60	— 2,498 — 16,5	2937 — 154	4,60	828 — 6	— 2,452 — 42	5,60	— 2,541 + 41	— 8,045 — 68,5
62	2,531 16	2629 158	62	840 5,5	2,536 42	62	2,459 42	8,182 68,5
64	2,563 16,5	2313 162	64	851 5	2,620 43	64	2,375 44	8,319 69
66	2,596 16	1989 166,5	66	861 4,5	2,706 43,5	66	2,287 45,5	8,457 69
68	2,628 16,5	1656 170,5	68	870 4	2,793 44,5	68	2,196 47	8,595 69,5
3,70	— 2,661 — 16	1315 — 175	4,70	878 — 3,5	— 2,882 — 44,5	5,70	— 2,102 + 48,5	— 8,734 — 69,5
72	2,693 16,5	0965 179,5	72	885 3	2,971 45,5	72	2,005 50	8,873 69,5
74	2,726 16	0606 184	74	891 2	3,062 46	74	1,905 51,5	9,012 70
76	2,758 16	0238 188,5	76	895 2	3,154 47	76	1,802 53,5	9,152 70,5
78	2,790 16	*0139 193	78	899 — 1	3,248 47	78	1,695 54,5	9,293 70
3,80	— 2,822 — 16	0525 — 198	4,80	901 0	— 3,342 — 48	5,80	— 1,586 + 57	— 9,433 — 70,5
82	2,854 16	0921 202	82	901 0	3,438 48,5	82	1,472 58	9,574 70,5
84	2,886 16	1325 207	84	901 + 1	3,535 49	84	1,356 60,5	9,715 71
86	2,918 15,5	1739 212	86	899 1,5	3,633 49,5	86	1,235 61,5	9,857 70,5
88	2,949 16	2163 217	88	896 2,5	3,732 50,5	88	1,112 64	9,998 70,5
3,90	— 2,981 — 15,5	2597 — 221,5	4,90	891 + 3	— 3,833 — 51	5,90	— 0,984 + 65	— 10,139 — 71
92	3,012 15,5	3040 226,5	92	885 4	3,935 51,5	92	0,854 67,5	10,281 70,5
94	3,043 15,5	3493 231	94	877 4,5	4,038 52	94	0,719 69	10,422 71
96	3,074 15	3955 236,5	96	868 5	4,142 53	96	0,581 71	10,564 70,5
98	3,104 15,5	4428 241,5	98	858 6,5	4,248 53	98	0,439 73	10,705 70,5
4,00	— 3,135	4911 — 0,	5,00	845 — 3,	— 4,354	6,00	— 0,293	— 10,846

Т а б л и ц а 60. Функции $\text{ker } (x)$ и $\text{hei } (x)$

$\text{ker } x = \frac{2}{\pi} \text{kei } x = -\text{Re } H_0^{(1)}(x \sqrt{i}), \text{hei } x = -\frac{2}{\pi} \text{ker } x = \text{Im } H_0^{(1)}(x \sqrt{i})$

x	$\text{ker } x$	$\text{hei } x$	x	$\text{ker } x$	$\text{hei } x$	x	$\text{ker } x$	$\text{hei } x$
	- 0,			- 0,	- 0,		- 0,	+ 0,0
0 00	5000 + 1 5	- ∞	1,00	3151 + 22 5	1825 + 43 5	2 00	1289 + 14	2652 + 66 5
02	4997 4	2,564	02	3106 22	1738 42	02	1261 14	2785 63
04	4989 6	2,123	04	3062 22 5	1654 40 5	04	1233 13 5	2911 60
06	4977 7	1,865	06	3017 22	1573 39	06	1206 13	3031 57
08	4963 8,5	1,683	08	2973 22	1495 38	08	1180 13 5	3145 54 5
0 10	4946 + 10	- 1 541 + 58 1	1 10	2929 + 21 5	1419 + 37	2,10	1153 + 13	3254 + 51
12	4926 11	1,425 48,5	12	2886 22	1345 35 5	12	1127 12 5	3356 48 5
14	4904 12	1,328 42	14	2842 21 5	1274 34	14	1102 12 5	3453 46
16	4880 13	1,244 37,5	16	2799 21 5	1206 33	16	1077 12 5	3545 43 5
18	4854 14	1,169 33	18	2756 21 5	1140 32	18	1052 12	3632 40
0 20	4826 + 14,5	- 1,103 + 29 5	1 20	2713 + 21	1076 + 31	2,20	10277 + 120	3714 + 38 5
22	4797 15	1,044 27 5	22	2671 21,5	1014 30	22	10037 118 5	3791 36
24	4767 16	0,989 24,5	24	2628 20,5	0954 29	24	09800 116 5	3863 34
26	4735 17	0,940 23	26	2587 21	0896 28	26	09567 114 5	3931 31 5
28	4701 17	0,894 21 5	28	2545 20 5	0840 27	28	09338 113	3994 29 5
0,30	4667 + 17 5	- 0,851 + 19 5	1,30	2504 + 20,5	0786 + 26	2,30	09112 + 111	4053 + 27 5
32	4632 18 5	0 812 18 5	32	2463 20,5	0734 25 5	32	08890 109	4108 25 5
34	4595 18 5	0,775 17,5	34	2422 20	0683 24	34	08672 108	4159 23 5
36	4558 19	0,740 16,5	36	2382 20	0635 24	36	08456 105 5	4206 22
38	4520 19,5	0,707 15 5	38	2342 20	0587 22 5	38	08245 104	4250 19 5
0,40	4481 + 20	- 0,6765 + 145,5	1 40	2302 + 19 5	0542 + 22	2,40	08037 + 102 5	4289 + 18
42	4441 20,5	0,6474 138,5	42	2263 19,5	0498 21	42	07832 100 5	4325 16 5
44	4400 20,5	0,6197 131	44	2224 19	0456 20 5	44	07631 99	4358 14 5
46	4359 20,5	0,5935 124 5	46	2186 19	0415 20	46	07433 97,5	4387 13
48	4318 21,5	0,5686 118 5	48	2148 19	0375 19	48	07238 95 5	4413 11 5
0,50	4275 + 21	- 0,5449 + 113	1,50	2110 + 19	0337 + 18,5	2 50	07047 + 94	4436 + 10 5
52	4233 21,5	0,5223 108 5	52	2072 18 5	0300 17 5	52	06857 92	4457 8 5
54	4190 22	0,5006 103	54	2035 18 5	0265 17,5	54	06675 91	4474 7
56	4146 22	0,4800 99	56	1998 18	0230 16	56	06493 89	4488 6
58	4102 22	0,4602 94,5	58	1962 18	0198 16	58	06315 87 5	4500 4 5
0,60	4058 + 22	- 0,4413 + 91	1 60	1926 + 17 5	0166 + 15,5	2,60	06140 + 84	4509 + 3
62	4014 22,5	0,4231 87	62	1891 18	0135 14 5	62	05968 84,5	4515 2 5
64	3969 22,5	0,4057 84	64	1855 17	0106 14 5	64	05799 83	4520 + 0 5
66	3924 22,5	0,3889 80,5	66	1821 17 5	0077 13,5	66	05633 81	4521 0
68	3879 22,5	0,3728 77	68	1786 17	0050 13 5	68	05471 80	4521 - 1 5
0 70	3834 + 23	- 0,3574 + 74,5	1 70	1752 + 16 5	0023 + 12 5	2,70	05311 + 78 5	4518 - 2
72	3788 22 5	0,3425 71 5	72	1719 17	*0002 12	72	05154 77	4514 1,5
74	3743 23	0,3282 69	74	1685 16,5	0026 12	74	05000 75 5	4507 4 5
76	3697 23	0,3144 66 5	76	1652 16	0050 11	76	04849 74	4498 5
78	3651 22 5	0,3011 64	78	1620 16	0072 11	78	04701 72 5	4488 6,5
0 80	3606 + 23	- 0,2883 + 61 5	1,80	1588 + 16	0094 + 10	2,80	04556 + 71	4475 - 7
82	3560 23	0,2760 59 5	82	1556 15 5	0114 10	82	04414 70	4461 8
84	3514 22,5	0,2641 57 5	84	1525 15 5	0134 9,5	84	04274 68	4445 8 5
86	3469 23	0,2526 55,5	86	1494 15,5	0153 9	86	04138 67	4428 9 5
88	3423 23	0,2415 53 5	88	1463 15	0171 9	88	04004 66	4409 10
0 90	3377 + 22,5	- 0,2308 + 51 5	1 90	1433 + 14 5	01888 + 83 5	2,90	03872 + 64	4389 - 11
92	3332 22,5	0,2205 50	92	1404 15	02055 80	92	03744 63,5	4367 11 5
94	3287 23	0,2105 48,5	94	1374 14 5	02215 76 5	94	03617 61,5	4344 12
96	3241 22,5	0,2008 46,5	96	1345 14	02368 72,5	96	03494 60,5	4320 13
98	3196 22,5	0,1915 45	98	1317 14	02513 69 5	98	03373 59	4294 13 5
1 00	3151 - 0,	- 0,1825	2,00	1289 - 0,	02652 + 0,	3,00	03255 - 0,	4267 + 0,0

Продолжение табл. 60

x	her x	hei x	x	her x	hei x	x	her x	hei x
	- 0,0	+ 0,0		+ 0,00	+ 0,0		+ 0,00	+ 0,00
3,00	3255 + 58	4267 - 14	4,00	1400 + 149,5	2303 - 20	5,00	7122 - 6	7329 - 108,5
02	3139 57	4239 14,5	02	1699 144	2263 19,5	02	7110 7	7112 107
04	3025 55,5	4210 15	04	1987 139,5	2224 20	04	7096 9	6898 104,5
06	2914 54,5	4180 15,5	06	2266 134	2184 19,5	06	7078 10	6689 103,5
08	2805 53	4149 15,5	08	2534 129	2145 19,5	08	7058 11	6482 101
3,10	2699 + 52	4118 - 16,5	4,10	2792 + 124,5	2106 - 19	5,10	7036 - 12,5	6280 - 99,5
12	2595 - 51	4085 17	12	3041 119,5	2068 19,5	12	7011 13,5	6081 97,5
14	2493 49,5	4051 17	14	3280 115	2029 18,5	14	6984 15	5886 96
16	2394 48,5	4017 17,5	16	3510 110,5	1992 19	16	6954 15,5	5694 94
18	2297 47,5	3982 18	18	3731 106	1954 18,5	18	6923 17	5506 92
3,20	2202 + 46,5	3946 - 18	4,20	3943 + 101,5	1917 - 18,5	5,20	6889 - 18	5322 - 91
22	2109 45,5	3910 18,5	22	4146 97,5	1880 18,5	22	6853 18,5	5140 88,5
24	2018 44,5	3873 19	24	4341 93,5	1843 18	24	6816 20	4963 87,5
26	1929 43	3835 19	26	4528 89,5	1807 18	26	6776 20,5	4788 85,5
28	1843 42,5	3797 19,5	28	4707 85	1771 17,5	28	6735 21,5	4617 83,5
3,30	1758 + 41	3758 - 19,5	4,30	4877 + 81,5	1736 - 18	5,30	6692 - 22	4450 - 82,5
32	1676 40,5	3719 20	32	5040 78	1700 17	32	6648 23	4285 80,5
34	1595 39	3679 20	34	5196 74	1666 17,5	34	6602 24	4124 79
36	1517 38,5	3639 20	36	5344 70,5	1631 17	36	6554 24,5	3966 77
38	1440 37,5	3599 20,5	38	5485 67	1597 17	38	6505 25	3812 76
3,40	1365 + 36,5	3558 - 20	4,40	5619 + 63,5	1563 - 16,5	5,40	6455 - 26	3660 - 74
42	1292 35,5	3518 21	42	5746 60	1530 16,5	42	6403 26	3512 73
44	1221 34,5	3476 20,5	44	5866 57	1497 16	44	6351 27	3366 71
46	1152 33,5	3435 21	46	5980 53,5	1465 16,5	46	6297 27,5	3224 69,5
48	1085 33	3393 21	48	6087 51	1432 15,5	48	6242 28	3085 68
3,50	1019 + 32	3351 - 21	4,50	6189 + 47,5	1401 - 16	5,50	6186 - 28,5	2949 - 66,5
52	0955 31,5	3309 21	52	6284 44,5	1369 15,5	52	6129 29	2816 65,5
54	0892 30	3267 21,5	54	6373 42	1338 15	54	6071 29,5	2685 63,5
56	0832 30	3224 21	56	6457 39	1308 15,5	56	6012 30	2558 62
58	0772 28,5	3182 21	58	6535 36	1277 15	58	5952 30	2434 61
3,60	0715 + 28	3140 - 21,5	4,60	6607 + 34	1247 - 14,5	5,60	5892 - 30,5	2312 - 59,5
62	0659 27	3097 21,5	62	6675 31	1218 14,5	62	5831 31	2193 58
64	0605 26,5	3054 21	64	6737 28,5	1189 14,5	64	5769 31	2077 57
66	0552 26	3012 21,5	66	6794 26	1160 14	66	5707 31,5	1963 55
68	0500 24,5	2969 21	68	6846 24	1132 14	68	5644 32	1853 54
3,70	0451 + 24,5	2927 - 21,5	4,70	6894 + 21,5	11042 - 137,5	5,70	5580 - 31,5	1745 - 53
72	0402 23,5	2884 21	72	6937 19	10767 135,5	72	5517 32,5	1639 51,5
74	0355 23	2842 21,5	74	6975 17	10496 133,5	74	5452 32,5	1536 50
76	0309 22	2799 21	76	7009 15	10229 131,5	76	5387 32,5	1436 49
78	0265 21,5	2757 21	78	7039 13	09966 129,5	78	5322 32,5	1338 48
3,80	0222 + 21	2715 - 21	4,80	7065 + 11	09707 - 127,5	5,80	5257 - 33	1242 - 46,5
82	0180 20	2673 21	82	7087 9	09452 125,5	82	5191 32,5	1149 45
84	0140 19,5	2631 21	84	7105 7	09201 124	84	5126 33,5	1059 44
86	0101 19	2589 20,5	86	7119 5	08953 121,5	86	5059 33	0971 43
88	0063 18,5	2548 20,5	88	7129 3,5	08710 120	88	4993 33	0885 42
3,90	0026 + 17,5	2507 - 21	4,90	7136 + 2	08470 - 118	5,90	4927 - 33,5	0801 - 40,5
92	*0009 17,5	2465 20	92	7140 0	08234 116	92	4860 33	0720 40
94	0044 16,5	2425 20,5	94	7140 - 1,5	08002 114	94	4794 33,5	0640 38,5
96	0077 16	2384 20,5	96	7137 - 3	07774 112,5	96	4727 33	0563 37,5
98	0109 15,5	2343 20	98	7131 4,5	07549 110	98	4661 33,5	0488 36
4,00	0140	2303	5,00	7122	07329	6,00	4594	0416
	+ 0,0	+ 0,0		+ 0,00	+ 0,0		+ 0,00	+ 0,00

Т а б л и ц а 61. Функции her (x) и hei' (x)

$her'x = -\frac{d}{dx} Re H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = Re \sqrt{i} H_1^{(1)}(x\sqrt{i}), hei'x = \frac{d}{dx} Im H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = -Im \sqrt{i} H_1^{(1)}(x\sqrt{i})$

x	her'x	hei'x	x	her'x	hei'x	x	her'x	hei'x
0,00	+ 0.	∞	1,00	+ 0.	+ 0.	2,00	+ 0.	+ 0,0
02	0000		02	2243 — 4	4422 — 74,5	02	13993 — 96	6786 — 160
04	0288	+ 31,8	04	2235 5	4273 71,5	04	13801 96	6466 156
06	0488	15,9	06	2225 5	4130 69	06	13609 96	6154 151
08	0655	10,6	08	2215 5	3992 66,5	08	13417 95	5852 147
08	0800	7,94	08	2205 6	3859 64,5	08	13227 95	5558 142,5
0,10	0929 + 58,5	+ 6,34	1,10	2193 — 5,5	3730 — 62	2,10	13037 — 94	5273 — 138,5
12	1046 53	5,28	12	2182 6,5	3606 60	12	12849 94	4996 134,5
14	1152 48	4,51	14	2169 6,5	3486 58	14	12661 93 5	4727 130
16	1248 44,5	3,94	16	2156 6,5	3370 56	16	12474 93	4467 126 5
18	1337 41	3,49	18	2143 7	3258 54,5	18	12288 92,5	4214 122,5
0,20	1419 + 38	+ 3,134	1,20	2129 — 7	3149 — 52,5	2,20	12103 — 92	3969 — 119
22	1495 35	2,840	22	2115 7	3044 51	22	11919 91	3731 115 5
24	1565 32,5	2,594	24	2101 7,5	2942 49	24	11737 91	3500 112
26	1630 30	2,385	26	2086 8	2844 47,5	26	11555 90	3276 108 5
28	1690 28	2,206	28	2070 8	2749 46,5	28	11375 89,5	3059 105
0,30	1746 + 26	+ 2,050 — 68,5	1,30	2054 — 8	2656 — 44,5	2,30	11196 — 89	2849 — 102
32	1798 24	1,913 61	32	2038 8	2567 43,5	32	11018 88	2645 99
34	1846 22,5	1,791 54	34	2022 8,5	2480 42	34	10842 88	2447 95,5
36	1891 20,5	1,683 49	36	2005 8,5	2396 41	36	10666 86,5	2256 92,5
38	1932 19	1,585 44	38	1988 8,5	2314 39,5	38	10493 86,5	2071 89,5
0,40	1970 + 18	+ 1,497 — 40	1,40	1971 — 8,5	2235 — 38,5	2,40	10320 — 85,5	1892 — 87
42	2006 16	1,417 36,5	42	1954 9	2158 37	42	10149 85	1718 84
44	2038 15	1,344 33,5	44	1936 9	2084 36,5	44	09979 84	1550 81,5
46	2068 14	1,277 30,5	46	1918 9	2011 35	46	09811 83,5	1387 78,5
48	2096 12,5	1,216 28,5	48	1900 9	1941 34	48	09644 82,5	1230 76
0,50	2121 + 11,5	+ 1,159 — 26,5	1,50	1882 — 9,5	1873 — 33	2,50	09479 — 82	1078 — 73,5
52	2144 10,5	1,106 25	52	1863 9	1807 32,5	52	09315 81	0931 71
54	2165 9,5	1,056 23	54	1845 9,5	1742 31	54	09153 80,5	0789 69
56	2184 8,5	1,010 21	56	1826 9 5	1680 30,5	56	08992 79,5	0651 66
58	2201 7,5	0,968 20,5	58	1807 9,5	1619 29,5	58	08833 79	0519 64
0,60	2216 + 7	+ 0,927 — 19	1,60	1788 — 9,5	1560 — 28,5	2,60	08675 — 78	0391 — 62
62	2230 6	0,889 17,5	62	1769 9,5	1503 27,5	62	08519 77,5	0267 59,5
64	2242 5	0,854 17	64	1750 9 5	1448 27	64	08364 76	0148 57,5
66	2252 4,5	0,820 16	66	1731 10	1394 26,5	66	08212 76	0033 55,5
68	2261 3,5	0,788 15	68	1711 9,5	1341 25,5	68	08060 75	*0078 53,5
0,70	2268 + 3	+ 0,7582 — 143	1,70	1692 — 9,5	1290 — 24,5	2,70	07910 — 74	0185 — 51,5
72	2274 2,5	0,7296 135,5	72	1673 10	1241 24	72	07762 73	0288 49,5
74	2279 1,5	0,7025 129,5	74	1653 10	1193 23,5	74	07616 72,5	0387 47,5
76	2282 1,5	0,6766 123	76	1633 9,5	1146 22,5	76	07471 72	0482 46
78	2285 + 0,5	0,6520 117	78	1614 10	1101 22,5	78	07327 70,5	0574 44
0,80	2286 0	+ 0,6286 — 112,5	1,80	15943 — 97,5	1056 — 21	2,80	07186 — 70	0662 — 42,5
82	2286 — 0,5	0,6061 107	82	15748 98	1014 21	82	07046 69,5	0747 40,5
84	2285 1	0,5847 102,5	84	15552 98	0972 20,5	84	06907 68	0828 39
86	2283 1,5	0,5642 98	86	15356 98	0931 19,5	86	06771 67,5	0906 37,5
88	2280 2	0,5446 94	88	15160 97,5	0892 19	88	06636 67	0981 36
0,90	2276 — 2,5	+ 0,5258 — 90,5	1,90	14965 — 97,5	0854 — 18,5	2,90	06502 — 66	1053 — 34
92	2271 3	0,5077 87	92	14770 97,5	0817 18	92	06370 65	1121 33
94	2265 3	0,4903 83	94	14575 97	0781 17,5	94	06240 64	1187 31,5
96	2259 4	0,4737 80,5	96	14381 97	0746 17	96	06112 63,5	1250 30
98	2251 4	0,4576 77	98	14187 97	0712 16,5	98	05985 62,5	1310 28,5
1,00	2243 + 0.	+ 0,4422	2,00	13993 + 0.	0679 + 0.	3,00	05860 + 0.	1367 — 0,0

Продолжение табл. 61

x	her'x	hei'x	x	her'x	hei'x	x	her'x	hei'x
	+ 0,0	— 0,0		+ 0,0	— 0,0		— 0,00	— 0,0
3,00	5860 — 62	1367 — 27,5	4,00	1522 — 26,5	20040 + 65,5	5,00	0522 — 71	10946 + 93
02	5736 61	1422 26	02	1469 26	19909 67,5	02	0664 68,5	10760 92
04	5614 60	1474 25	04	1417 25,5	19774 70	04	0801 66,5	10576 92
06	5494 59,5	1524 23,5	06	1366 25	19634 72	06	0934 63,5	10392 91
08	5375 58,5	1571 22	08	1316 24,5	19490 74	08	1061 62	10210 90
3,10	5258 — 57,5	1615 — 21,5	4,10	1267 — 23,5	19342 + 76	5,10	1185 — 59	10030 + 90
12	5143 57	1658 20	12	1220 23,5	19190 78	12	1303 57,5	09850 89
14	5029 56,5	1698 19	14	1173 23	19034 79,5	14	1418 55	09672 88
16	4916 55	1736 18	16	1127 22,5	18875 81,5	16	1528 53	09496 88
18	4806 54,5	1772 17	18	1082 21,5	18712 83	18	1634 50,5	09320 86,5
3,20	4697 — 54	18055 — 158,5!	4,20	1039 — 21,5	18546 + 84	5,20	1735 — 49	09147 + 86,5
22	4589 53	18372 149!	22	0996 21	18378 86	22	1833 47	08974 85
24	4483 52	18670 139,5!	24	0954 20,5	18206 87	24	1927 45	08804 84,5
26	4379 51,5	18949 130,5!	26	0913 20	18032 88	26	2017 43	08635 84
28	4276 50,5	19210 121!	28	0873 19,5	17856 89,5	28	2103 41,5	08467 83
3,30	4175 — 50	19452 — 112,5!	4,30	0834 — 19	17677 + 90,5	5,30	2186 — 39,5	08301 + 82
32	4075 49	19677 104,5!	32	0796 18,5	17496 91	32	2265 37,5	08137 81,5
34	3977 48,5	19886 95,5!	34	0759 18,5	17314 92,5	34	2340 36	07974 80,5
36	3880 47,5	20077 88	36	0722 17,5	17129 93	36	2412 34,5	07813 79,5
38	3785 46,5	20253 80,5	38	0687 17,5	16943 94	38	2481 32,5	07654 79
3,40	3692 — 46,5	20414 — 73	4,40	06521 — 169	16755 + 94,5	5,40	2546 — 31	07496 + 78
42	3599 45	20560 65,5	42	06183 165	16566 95,5	42	2608 30	07340 77
44	3509 44,5	20691 58,5	44	05853 161	16375 95,5	44	2668 28	07186 76,5
46	3420 44	20808 51,5	46	05531 156,5	16184 96,5	46	2724 26,5	07033 75,5
48	3332 43	20911 45	48	05218 153	15991 97	48	2777 25	06882 74,5
3,50	3246 — 42,5	21001 — 39	4,50	04912 — 149	15797 + 97	5,50	2827 — 23,5	06733 + 73,5
52	3161 42	21079 32,5	52	04614 145,5	15603 97,5	52	2874 22,5	06586 73
54	3077 41	21144 26,5	54	04323 141,5	15408 98	54	2919 20,5	06440 72
56	2995 40	21197 20,5	56	04040 137,5	15212 98	56	2960 20	06296 71
58	2915 40	21238 15,5	58	03765 134,5	15016 98	58	3000 18	06154 70
3,60	2835 — 38,5	21269 — 9,5	4,60	03496 — 130,5	14820 + 98,5	5,60	3036 — 17	06014 + 69
62	2758 38,5	21288 — 4,5	62	03235 127	14623 98,5	62	3070 16	05876 68,5
64	2681 37,5	21297 + 0,5	64	02981 123,5	14426 98,5	64	3102 14,5	05739 67,5
66	2606 37	21296 5,5	66	02734 120	14229 98,5	66	3131 14	05604 66,5
68	2532 36	21285 10	68	02494 117	14032 98	68	3159 12	05471 65,5
3,70	2460 — 36	21265 + 14,5	4,70	02260 — 113,5	13836 + 98,5	5,70	3183 — 11,5	05340 + 64,5
72	2388 34,5	21236 19	72	02033 110,5	13639 98	72	3206 10,5	05211 64
74	2319 34,5	21198 23,5	74	01812 107,5	13443 98	74	3227 9	05083 63
76	2250 33,5	21151 27,5	76	01597 104	13247 98	76	3245 8	04957 62
78	2183 33	21096 31	78	01389 101	13051 97,5	78	3261 7,5	04833 61
3,80	2117 — 32,5	21034 + 35	4,80	01187 — 98	12856 + 97,5	5,80	3276 — 6,5	04711 + 60,5
82	2052 32	20964 38,5	82	00991 95	12661 97	82	3289 5	04590 59
84	1988 31	20887 42,5	84	00801 92,5	12467 96,5	84	3299 4,5	04472 58,5
86	1926 30,5	20802 45,5	86	00616 89	12274 96	86	3308 4	04355 58
88	1865 30	20711 48,5	88	00438 87	12082 96	88	3316 2,5	04239 56,5
3,90	1805 — 29,5	20614 + 51,5	4,90	00264 — 83,5	11890 + 95,5	5,90	3321 — 2	04126 + 56
92	1746 29	20511 55	92	00097 81,5	11699 95	92	3325 — 1,5	04014 54,5
94	1688 28	20401 57,5	94	*00066 78,5	11509 94,5	94	3328 0	03905 54,5
96	1632 28	20286 60	96	00223 76	11320 94	96	3328 0	03796 53
98	1576 27	20166 63	98	00375 73,5	11132 93	98	3328 + 1	03690 52,5
4,00	1522	20040	5,00	00522	10946	6,00	3326	03585
	+ 0,0	— 0,0		— 0,0	— 0,0		— 0,00	— 0,0

Таблица 62. Функции $\text{ber}(x)$, $\text{bei}(x)$, $\text{ber}'(x)$, $\text{bei}'(x)$, $\text{her}(x)$, $\text{hei}(x)$, $\text{her}'(x)$, $\text{hei}'(x)$ (продолжение)

x	$\text{ber } x$	$\text{bei } x$	$\text{ber}' x$	$\text{bei}' x$	$\text{her } x$	$\text{hei } x$	$\text{her}' x$	$\text{hei}' x$
6,0	— 8,858	— 7,335	— 0,293	— 10,846	+ 0, 4594 (— 2)	+ 0, 4157 (— 3)	— 0, 3326 (— 2)	— 0, 3585 (— 2)
1	8,849	8,454	+ 0,494	11,547	4263 (— 2)	0825 (— 3)	3295 (— 2)	3087 (— 2)
2	8,756	9,644	1,384	12,235	3936 (— 2)	*2031 (— 3)	3236 (— 2)	2631 (— 2)
3	8,569	10,901	2,380	12,901	3616 (— 2)	4451 (— 3)	3152 (— 2)	2215 (— 2)
4	8,276	12,223	3,490	13,536	3306 (— 2)	6473 (— 3)	3048 (— 2)	1837 (— 2)
6,5	— 7,867	— 13,607	+ 4,717	— 14,129	3007 (— 2)	8137 (— 3)	2928 (— 2)	1495 (— 2)
6	7,329	15,047	6,067	14,670	2721 (— 2)	9476 (— 3)	2796 (— 2)	1189 (— 2)
7	6,649	16,538	7,544	15,146	2448 (— 2)	10525 (— 2)	2655 (— 2)	9145 (— 3)
8	5,816	18,074	9,151	15,543	2190 (— 2)	11315 (— 2)	2508 (— 2)	6710 (— 3)
9	4,815	19,644	10,891	15,847	19470 (— 2)	11876 (— 2)	2356 (— 2)	4561 (— 3)
7,0	— 3,633	— 21,239	+ 12,765	— 16,041	17191 (— 2)	12236 (— 2)	2202 (— 2)	2677 (— 3)
1	2,257	22,848	14,774	16,109	15066 (— 2)	12420 (— 2)	2049 (— 2)	1039 (— 3)
2	— 0,674	24,456	16,918	16,033	13093 (— 2)	12451 (— 2)	18968 (— 2)	*0372 (— 3)
3	+ 1,131	26,049	19,194	15,792	11271 (— 2)	12352 (— 2)	17475 (— 2)	1575 (— 3)
4	3,169	27,609	21,600	15,367	9597 (— 3)	12143 (— 2)	16022 (— 2)	2589 (— 3)
7,5	+ 5,455	— 29,116	+ 24,130	— 14,736	8065 (— 3)	11840 (— 2)	14616 (— 2)	3430 (— 3)
6	7,999	30,55	26,777	13,875	6672 (— 3)	11462 (— 2)	13266 (— 2)	4116 (— 3)
7	10,814	31,88	29,532	12,763	5410 (— 3)	11022 (— 2)	11976 (— 2)	4661 (— 3)
8	13,909	33,09	32,38	11,373	4274 (— 3)	10534 (— 2)	10752 (— 2)	5081 (— 3)
9	17,293	34,15	35,31	9,681	3257 (— 3)	10009 (— 2)	9595 (— 3)	5390 (— 3)
8,0	+ 20,974	— 35,02	+ 38,31	— 7,660	2353 (— 3)	9459 (— 3)	8507 (— 3)	5600 (— 3)
1	24,957	35,67	41,35	5,285	1554 (— 3)	8892 (— 3)	7490 (— 3)	5725 (— 3)
2	29,245	36,06	44,42	— 2,530	8524 (— 4)	8317 (— 3)	6544 (— 3)	5773 (— 3)
3	33,840	36,16	47,47	+ 0,634	2425 (— 4)	7740 (— 3)	5667 (— 3)	5758 (— 3)
4	38,738	35,92	50,49	4,232	*2832 (— 4)	7167 (— 3)	4859 (— 3)	5686 (— 3)
8,5	+ 43,94	— 35,30	+ 53,44	+ 8,290	7315 (— 4)	6604 (— 3)	4117 (— 3)	5568 (— 3)
6	49,42	34,25	56,28	12,832	11088 (— 3)	6055 (— 3)	3440 (— 3)	5411 (— 3)
7	55,19	32,71	58,97	17,883	14216 (— 3)	5523 (— 3)	2825 (— 3)	5223 (— 3)
8	61,21	30,65	61,45	23,465	16759 (— 3)	5011 (— 3)	2270 (— 3)	5009 (— 3)
9	67,47	28,00	63,68	29,598	18775 (— 3)	4522 (— 3)	1771 (— 3)	4776 (— 3)
9,0	+ 73,94	— 24,71	+ 65,60	+ 36,30	20318 (— 3)	4056 (— 3)	1325 (— 3)	4528 (— 3)
1	80,58	20,72	67,14	43,58	21441 (— 3)	3616 (— 3)	9288 (— 4)	4270 (— 3)
2	87,35	15,98	68,25	51,46	22191 (— 3)	3202 (— 3)	5799 (— 4)	4006 (— 3)
3	94,21	10,41	68,83	59,94	22615 (— 3)	2815 (— 3)	2747 (— 4)	3740 (— 3)
4	101,10	— 3,97	68,82	69,01	22754 (— 3)	2454 (— 3)	0099 (— 4)	3475 (— 3)
9,5	+ 107,95	+ 3,41	+ 68,13	+ 78,68	22647 (— 3)	2120 (— 3)	*2175 (— 4)	3212 (— 3)
6	114,70	11,79	66,67	88,94	22331 (— 3)	1812 (— 3)	4105 (— 4)	2955 (— 3)
7	121,26	21,22	64,35	99,76	21837 (— 3)	1529 (— 3)	5722 (— 4)	2704 (— 3)
8	127,54	31,76	61,07	111,12	21196 (— 3)	1271 (— 3)	7054 (— 4)	2463 (— 3)
9	133,43	43,46	56,72	122,99	20434 (— 3)	1036 (— 3)	8129 (— 4)	2231 (— 3)
10,0	+ 138,84	+ 56,37	+ 51,20	+ 135,31	19578 (— 3)	0824 (— 3)	8971 (— 4)	2009 (— 3)
					— 0, — 0,	— 0, — 0,	+ 0, + 0,	+ 0, + 0,

Таблица 63. Функции $J_n(r \sqrt{i}) = b_n e^{i\beta_n}$ и $H_n^{(1)}(r \sqrt{i}) = h_n e^{i\eta_n}$ ($n=0, 1$)

$$\left[b_n = M_n, \beta_0 = -\theta_0, \beta_1 = 180^\circ - \theta_1; h_n = \frac{2}{\pi} N_n, \eta_0 = -\phi_0 - 90^\circ, \eta_1 = -\phi_1 + 90^\circ \right]$$

r	b_0	β_0	b_1	β_1	h_0	η_0	h_1	η_1
0,0	1,0000	0°	0,0000	+ 45°	∞	— 90°	∞	— 135°
1	1,0000	— 0°,14	0,0500	44°,93	1,6184	72°,21	6,342	134°,16
2	1,0000	0°,57	0,1000	44°,71	1,2043	66°,37	3,137	132°,41
3	1,0001	1°,29	0,1500	44°,36	0,9708	61°,27	2,057	130°,13
4	1,0004	2°,29	0,2000	43°,85	0,8114	56°,48	1,510	127°,50
0,5	1,0010	— 3°,58	0,2500	+ 43°,21	0,6926	— 51°,88	1,1778	— 124°,62
6	1,0020	5°,15	0,3001	42°,42	0,5995	47°,40	0,9534	121°,56
7	1,0037	7°,01	0,3502	41°,49	0,5241	42°,99	0,7914	118°,34
8	1,0064	9°,14	0,4004	40°,42	0,4617	38°,65	0,6688	115°,02
9	1,0102	11°,55	0,4508	39°,20	0,4091	34°,35	0,5729	111°,60
1,0	1,0153	— 14°,23	0,5013	+ 37°,84	0,3642	— 30°,08	0,4958	— 108°,10
1	1,0227	17°,16	0,5521	36°,34	0,3255	25°,84	0,4327	104°,54
2	1,0320	20°,34	0,6032	34°,71	0,2918	21°,63	0,3801	100°,93
3	1,0438	23°,75	0,6548	32°,93	0,2624	17°,43	0,3358	97°,28
4	1,0586	27°,37	0,7070	31°,01	0,2365	13°,24	0,2980	93°,59
1,5	1,0767	— 31°,19	0,7598	+ 28°,96	0,2136	— 9°,08	0,2655	— 89°,86
6	1,0984	35°,17	0,8136	26°,77	0,1933	4°,92	0,2373	86°,11
7	1,1242	39°,30	0,8684	24°,45	0,1752	— 0°,77	0,2128	82°,33
8	1,1544	43°,54	0,9244	22°,00	0,1591	+ 3°,37	0,1913	78°,53
9	1,1892	47°,88	0,9819	19°,43	0,1446	7°,51	0,1723	74°,71
2,0	1,2290	— 52°,29	1,0412	+ 16°,73	0,13155	+ 11°,63	0,1555	— 70°,87
1	1,2741	56°,74	1,1024	13°,92	0,11984	15°,75	0,14063	67°,02
2	1,3246	61°,22	1,1659	11°,00	0,10927	19°,87	0,12737	63°,15
3	1,3808	65°,71	1,2321	7°,97	0,09973	23°,98	0,11553	59°,18
4	1,443	70°,19	1,3012	4°,84	0,09110	28°,09	0,10492	55°,39
2,5	1,511	— 74°,65	1,3736	+ 1°,61	0,08327	+ 32°,19	0,09540	— 51°,49
6	1,586	79°,09	1,4498	— 1°,70	0,07618	36°,29	0,08684	47°,58
7	1,666	83°,50	1,530	5°,10	0,06973	40°,39	0,07913	43°,66
8	1,754	87°,87	1,615	8°,57	0,06387	44°,49	0,07216	39°,74
9	1,849	92°,21	1,705	12°,11	0,05853	48°,58	0,06587	35°,80
3,0	1,950	— 96°,52	1,800	— 15°,71	0,05367	+ 52°,67	0,06017	— 31°,87
1	2,059	100°,79	1,901	19°,37	0,04923	56°,76	0,05501	27°,92
2	2,176	105°,03	2,009	23°,08	0,04519	60°,84	0,05032	23°,97
3	2,301	109°,25	2,124	26°,83	0,04149	64°,93	0,04606	20°,02
4	2,434	113°,43	2,246	30°,62	0,03811	69°,01	0,04218	16°,06
3,5	2,576	— 117°,60	2,376	— 34°,44	0,03503	+ 73°,09	0,03866	— 12°,09
6	2,728	121°,73	2,515	38°,30	0,03220	77°,17	0,03544	8°,13
7	2,889	125°,87	2,664	42°,17	0,02961	81°,25	0,03251	4°,16
8	3,061	129°,99	2,823	46°,07	0,02724	85°,33	0,02984	— 0°,18
9	3,244	134°,10	2,992	49°,98	0,02507	89°,40	0,02740	+ 3°,80
4,0	3,439	— 138°,19	3,173	— 53°,90	0,02307	+ 93°,48	0,02517	+ 7°,78
1	3,646	142°,28	3,366	57°,84	0,02125	97°,55	0,02312	11°,76
2	3,867	146°,36	3,572	61°,79	0,01957	101°,62	0,02126	15°,75
3	4,102	150°,44	3,792	65°,74	0,01803	105°,70	0,01955	19°,74
4	4,352	154°,51	4,027	69°,71	0,01661	109°,77	0,01798	23°,73
4,5	4,618	— 158°,59	4,278	— 73°,67	0,01531	+ 113°,84	0,01654	+ 27°,73
6	4,901	162°,66	4,546	77°,64	0,014116	117°,91	0,01523	31°,72
7	5,203	166°,73	4,832	81°,61	0,013017	121°,98	0,01402	35°,72
8	5,524	170°,80	5,137	85°,59	0,012006	126°,05	0,012911	39°,72
9	5,866	174°,86	5,462	89°,57	0,011076	130°,11	0,011893	43°,73
5,0	6,231	— 178°,93	5,809	— 93°,55	0,010219	+ 134°,18	0,010958	+ 47°,73

Продолжение табл. 63

r	b_0	β_0	b_1	β_1	h_0	η_0	h_1	η_1
					0,01		0,01	
5,0	6,231	— 178° 93	5,809	— 93° 55	0219	+ 134° 18	0958	+ 47° 73
1	6,620	183° 00	6,179	97° 53	* 9431	138° 25	0099	51° 74
2	7,034	187° 07	6,574	101° 52	8705	142° 31	* 9310	55° 74
3	7,475	191° 14	6,996	105° 50	8036	146° 38	8584	59° 75
4	7,946	195° 21	7,446	109° 49	7420	150° 45	7917	63° 76
5,5	8,447	— 199° 28	7,925	— 113° 48	6853	+ 154° 51	7302	+ 67° 77
6	8,982	203° 35	8,437	117° 47	6329	158° 58	6737	71° 79
7	9,552	207° 42	8,983	121° 46	5847	162° 64	6217	75° 80
8	10,160	211° 49	9,566	125° 46	5402	166° 70	5738	79° 82
9	10,809	215° 56	10,187	129° 45	4991	170° 77	5297	83° 83
6,0	11,501	— 219° 62	10,850	— 133° 45	4613	+ 174° 83	4890	+ 87° 85
1	12,239	223° 69	11,558	137° 45	4264	178° 89	4516	91° 87
2	13,026	227° 76	12,313	141° 45	3941	182° 95	4170	95° 89
3	13,865	231° 83	13,119	145° 45	3644	187° 02	3852	99° 91
4	14,761	235° 90	13,978	149° 46	3369	191° 08	3559	103° 93
6,5	15,72	— 239° 96	14,896	— 153° 46	3116	+ 195° 14	3288	+ 107° 95
6	16,74	244° 03	15,88	157° 47	2881	199° 20	3039	111° 97
7	17,83	248° 10	16,92	161° 48	2665	203° 26	2808	115° 00
8	18,99	252° 16	18,04	165° 49	2465	207° 32	2596	120° 02
9	20,23	256° 23	19,23	169° 50	2281	211° 38	2400	124° 04
7,0	21,55	— 260° 29	20,50	— 173° 51	2110	+ 215° 44	2219	+ 128° 07
1	22,96	264° 36	21,86	177° 52	1952	219° 50	2051	132° 10
2	24,47	268° 42	23,31	181° 54	1807	223° 56	1897	136° 12
3	26,07	272° 49	24,86	185° 55	1672	227° 62	1755	140° 15
4	27,79	276° 55	26,51	189° 57	1548	231° 68	1623	144° 18
7,5	29,62	— 280° 61	28,27	— 193° 59	1433	+ 235° 74	1501	+ 148° 21
6	31,58	284° 67	30,16	197° 61	13262	239° 80	13890	152° 24
7	33,67	288° 74	32,17	201° 63	12278	243° 86	12851	156° 27
8	35,90	292° 80	34,32	205° 65	11368	247° 92	11892	160° 30
9	38,28	296° 86	36,62	209° 67	10526	251° 97	11005	164° 33
8,0	40,82	— 300° 92	39,07	— 213° 69	09747	+ 256° 03	10185	+ 168° 36
1	43,53	304° 98	41,69	217° 72	09027	260° 09	09427	172° 39
2	46,43	309° 04	44,49	221° 74	08360	264° 15	08727	176° 42
3	49,52	313° 10	47,48	225° 77	07743	268° 21	08079	180° 45
4	52,83	317° 16	50,67	229° 79	07173	272° 26	07479	184° 49
8,5	56,36	— 321° 22	54,08	— 233° 82	06644	+ 276° 32	06925	+ 188° 52
6	60,13	325° 28	57,73	237° 84	06155	280° 38	06412	192° 55
7	64,15	329° 34	61,62	241° 87	05703	284° 44	05938	196° 59
8	68,46	333° 40	65,78	245° 90	05284	288° 49	05499	200° 62
9	73,05	337° 46	70,22	249° 93	04896	292° 55	05093	204° 66
9,0	77,96	— 341° 52	74,97	— 253° 96	04537	+ 296° 61	04718	+ 208° 69
1	83,20	345° 58	80,04	257° 99	04204	300° 66	04370	212° 73
2	88,80	349° 64	85,47	262° 02	03896	304° 72	04048	216° 76
3	94,78	353° 69	91,27	266° 05	03611	308° 78	03750	220° 80
4	101,17	357° 75	97,46	270° 08	03347	312° 83	03475	224° 84
9,5	108,00	— 361° 81	104,08	— 274° 11	03102	+ 316° 89	03219	+ 228° 87
6	115,30	365° 87	111,16	278° 14	02876	320° 95	02983	232° 91
7	123,10	369° 93	118,72	282° 18	02666	325° 00	02764	236° 95
8	131,43	373° 98	126,80	286° 21	02471	329° 06	02562	240° 98
9	140,33	378° 04	135,44	290° 24	02291	333° 11	02374	245° 02
10,0	149,85	— 382° 10	144,67	— 294° 28	02124	+ 337° 17	02200	+ 249° 06
					0,00		0,00	

Таблица 64. Функции $\frac{J_0(r\sqrt{i})}{J_1(r\sqrt{i})}$ и $\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{i})}{H_1^{(1)}(r\sqrt{i})}$

$$J_0(r\sqrt{i}) : J_1(r\sqrt{i}) = \frac{b_0}{b_1} e^{i(\beta_0 - \beta_1)}, \quad H_0^{(1)}(r\sqrt{i}) : H_1^{(1)}(r\sqrt{i}) = \frac{h_0}{h_1} e^{i(\eta_0 - \eta_1)}$$

$$\left[\frac{b_0}{b_1} = \frac{M_0}{M_1}, \quad \beta_0 - \beta_1 = -180^\circ + (\Theta_1 - \Theta_0); \quad \frac{h_0}{h_1} = \frac{N_0}{N_1}, \quad \eta_0 - \eta_1 = -180^\circ + (\Phi_1 - \Phi_0) \right]$$

	$\beta_0 - \beta_1^\circ$	b_0/b_1	$\frac{r}{2} \frac{b_0}{b_1}$	$\frac{2}{r} \frac{b_0}{b_1}$	$\eta_0 - \eta_1$	h_0/h_1	$\frac{r}{2} \frac{h_0}{h_1}$	$\frac{2}{r} \frac{h_0}{h_1}$
			1.			0.		
0,0	-45°00	∞	0000	∞	+45°00	0000	0,0000	∞
1	45°07	20,000	0000	400,00	61°95	2645	0,0132	5,290
2	45°29	10,001	0001	100,01	66°03	3839	0,0384	3,839
3	45°64	6,667	0001	44,45	68°86	4726	0,0709	3,151
4	46°15	5,002	0003	25,01	71°02	5372	0,1074	2,686
0,5	-46°79	4,002	0008	16,01	+72°74	5880	0,1470	2,352
6	47°57	3,339	0017	11,13	74°16	6288	0,1886	2,096
7	48°50	2,866	0032	8,188	75°35	6622	0,2318	1,892
8	49°56	2,513	0054	6,284	76°37	6903	0,2761	1,726
9	50°75	2,241	0084	4,980	77°25	7140	0,3213	1,587
1,0	-52°07	2,026	0128	4,051	+78°02	7346	0,3673	1,469
1	53°51	1,852	0188	3,368	78°70	7523	0,4138	1,368
2	55°05	1,711	0265	2,854	79°31	7677	0,4606	1,2795
3	56°68	1,594	0361	2,452	79°85	7814	0,5079	1,2022
4	58°38	1,497	0481	2,139	80°34	7936	0,5555	1,1337
1,5	-60°14	1,417	0627	1,889	+80°79	8045	0,6034	1,0727
6	61°94	1,350	0800	1,688	81°19	8145	0,6516	1,0181
7	63°75	1,295	1004	1,523	81°56	8234	0,6999	0,9687
8	65°55	1,249	1239	1,387	81°90	8316	0,7484	0,9240
9	67°31	1,211	1506	1,275	82°21	8391	0,7971	0,8833
2,0	-69°02	1,1804	1805	1,1804	+82°50	8459	0,8459	0,8459
1	70°67	1,1557	2135	1,1007	82°77	8522	0,8948	0,8116
2	72°22	1,1361	2497	1,0328	83°02	8579	0,9437	0,7799
3	73°68	1,1207	2888	0,9745	83°26	8632	0,9927	0,7506
4	75°03	1,1089	331	0,9241	83°47	8683	1,0419	0,7235
2,5	-76°26	1,1001	375	0,8801	+83°68	8728	1,0911	0,6983
6	77°39	1,0936	422	0,8413	83°87	8772	1,1404	0,6748
7	78°40	1,0892	470	0,8068	84°05	8812	1,1896	0,6527
8	79°30	1,0863	521	0,7759	84°22	8851	1,2391	0,6322
9	80°10	1,0844	572	0,7479	84°38	8886	1,2885	0,6128
3,0	-80°80	1,0835	625	0,7223	+84°53	8920	1,338	0,5947
1	81°42	1,0832	679	0,6988	84°68	8949	1,387	0,5774
2	81°95	1,0832	733	0,6769	84°81	8980	1,437	0,5612
3	82°41	1,0835	787	0,6567	84°94	9008	1,486	0,5459
4	82°81	1,0839	842	0,6375	85°07	9035	1,536	0,5315
3,5	-83°15	1,0842	897	0,6195	+85°19	9061	1,586	0,5178
6	83°45	1,0845	952	0,6026	85°30	9086	1,636	0,5048
7	83°70	1,0846	* 006	0,5862	85°40	9108	1,685	0,4923
8	83°92	1,0846	060	0,5707	85°51	9128	1,734	0,4804
9	84°12	1,0843	114	0,5560	85°60	9147	1,784	0,4691
4,0	-84°29	1,0838	168	0,5419	+85°70	9166	1,833	0,4583
1	84°44	1,0832	221	0,5284	85°79	9184	1,883	0,4480
2	84°57	1,0826	273	0,5155	85°87	9204	1,933	0,4383
3	84°69	1,0816	326	0,5031	85°96	9223	1,983	0,4290
4	84°81	1,0805	378	0,4912	86°03	9240	2,033	0,4200
4,5	-84°91	1,0794	429	0,4798	+86°11	9256	2,083	0,4114
6	85°02	1,0781	480	0,4688	86°18	9270	2,132	0,4030
7	85°11	1,0768	530	0,4582	86°25	9285	2,182	0,3951
8	85°20	1,0755	581	0,4481	86°32	9300	2,232	0,3875
9	85°29	1,0740	631	0,4384	86°39	9313	2,282	0,3801
5,0	-85°38	1,0723	682	0,4291	+86°45	9326	2,332	0,3730
			2.			0.		

Продолжение табл. 64

r	$\beta_0 - \beta_1$	b_0/b_1	$\frac{r}{2} \frac{b_0}{b_1}$	$\frac{2}{r} \frac{b_0}{b_1}$	$\eta_0 - \eta_1$	h_0/h_1	$\frac{r}{2} \frac{h_0}{h_1}$	$\frac{2}{r} \frac{h_0}{h_1}$
		1,0		0,		0,9		0,
5,0	— 85°,38	727	2,682	4291	+ 86°,45	326	2,332	3730
1	85°,47	713	2,732	4201	86°,51	339	2,381	3662
2	85°,55	699	2,782	4115	86°,57	350	2,431	3596
3	85°,64	685	2,832	4032	86°,63	362	2,481	3533
4	85°,72	672	2,881	3952	86°,68	372	2,530	3471
5,5	— 85°,80	659	2,931	3876	+ 86°,74	383	2,580	3412
6	85°,88	646	2,981	3802	86°,79	393	2,630	3355
7	85°,95	633	3,030	3731	86°,84	405	2,680	3300
8	86°,03	621	3,080	3663	86°,89	414	2,730	3246
9	86°,10	611	3,130	3597	86°,93	423	2,780	3194
6,0	— 86°,17	600	3,180	3533	+ 86°,98	433	2,830	3144
1	86°,24	589	3,230	3472	87°,02	443	2,880	3096
2	86°,31	578	3,279	3412	87°,07	451	2,930	3049
3	86°,38	568	3,329	3355	87°,11	460	2,980	3003
4	86°,44	559	3,379	3300	87°,15	466	3,029	2958
6,5	— 86°,50	551	3,429	3246	+ 87°,19	474	3,079	2915
6	86°,56	542	3,479	3194	87°,23	480	3,128	2873
7	86°,62	534	3,529	3144	87°,27	487	3,178	2832
8	86°,68	526	3,579	3096	87°,30	495	3,228	2793
9	86°,73	520	3,629	3050	87°,34	503	3,278	2754
7,0	— 86°,78	513	3,680	3004	+ 87°,37	510	3,328	2717
1	86°,83	505	3,729	2959	87°,41	517	3,379	2681
2	86°,88	497	3,779	2916	87°,44	524	3,429	2646
3	86°,93	490	3,829	2874	87°,47	531	3,479	2611
4	86°,98	483	3,879	2833	87°,50	537	3,529	2578
7,5	— 87°,02	477	3,929	2794	+ 87°,53	542	3,578	2545
6	87°,07	471	3,979	2756	87°,56	548	3,628	2513
7	87°,11	465	4,029	2718	87°,59	553	3,678	2481
8	87°,15	459	4,079	2682	87°,62	559	3,728	2451
9	87°,19	453	4,129	2646	87°,65	565	3,778	2422
8,0	— 87°,23	447	4,179	2612	+ 87°,67	570	3,828	2393
1	87°,26	441	4,229	2578	87°,70	576	3,878	2364
2	87°,30	436	4,279	2545	87°,73	580	3,928	2336
3	87°,34	430	4,329	2513	87°,75	584	3,977	2309
4	87°,37	426	4,379	2482	87°,78	589	4,027	2283
8,5	— 87°,40	421	4,429	2452	+ 87°,80	594	4,077	2257
6	87°,44	416	4,479	2422	87°,82	599	4,128	2232
7	87°,47	411	4,529	2393	87°,85	604	4,178	2208
8	87°,50	407	4,579	2365	87°,87	609	4,228	2184
9	87°,53	403	4,629	2338	87°,89	614	4,278	2160
9,0	— 87°,56	398	4,679	2311	+ 87°,91	617	4,328	2137
1	87°,59	394	4,729	2284	87°,93	620	4,377	2114
2	87°,62	389	4,779	2258	87°,96	624	4,427	2092
3	87°,65	385	4,829	2233	87°,98	629	4,477	2071
4	87°,67	381	4,879	2209	88°,00	632	4,527	2049
9,5	— 87°,70	378	4,930	2185	+ 88°,02	637	4,578	2029
6	87°,72	374	4,980	2161	88°,04	641	4,628	2009
7	87°,75	370	5,029	2138	88°,05	644	4,677	1989
8	87°,77	365	5,079	2115	88°,07	647	4,727	1969
9	87°,80	361	5,129	2093	88°,09	651	4,777	1950
10,0	— 87°,82	358	5,179	2072	+ 88°,11	655	4,827	1934
		1,0		0,		0,9		0,

С. ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

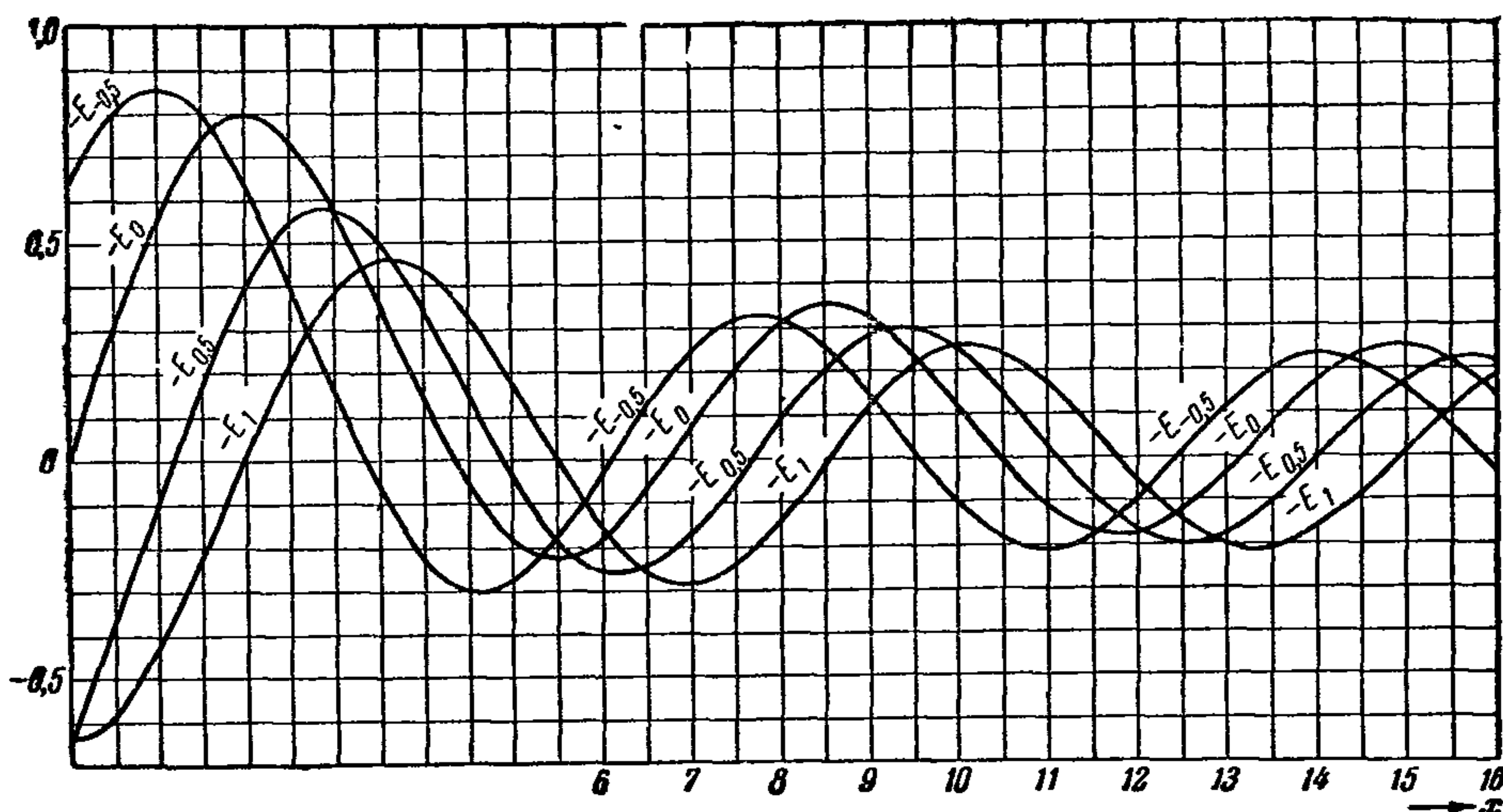
1. Функции Ангера и Вебера

1.1. Функции Ангера $J_\nu(z)$ и функции Вебера $e_\nu(z)$ получаются в связи с интегральным представлением Бесселя для $J_\nu(z)$. Именно,

$$J_\nu(z) \pm i E_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm i(\nu t - z \sin t)} dt,$$

т. е. $J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu t - z \sin t) dt, \quad E_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\nu t - z \sin t) dt.$

В некоторых случаях $-E_\nu(z)$ обозначают через $\Omega_\nu(z)$ и называют функцией Ломмеля — Вебера (рис. 173, таблица 65).

Рис. 173. Функции Вебера $E_\nu(x)$.

Эти функции являются решениями следующих неоднородных дифференциальных уравнений Бесселя:

$$\begin{aligned} J_\nu(z): \\ E_\nu(z): \end{aligned} \quad z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (z - \nu) \sin \nu \pi, \\ -\frac{1}{\pi} [(z + \nu) + (z - \nu) \cos \nu \pi]. \end{cases}$$

Для целого порядка n имеем $J_n(z) = J_n(z)$. Если ν не целое, то функции $J_\nu(z)$ и $E_\nu(z)$ связаны соотношениями

$$\sin \nu \pi \cdot J_\nu(z) = \cos \nu \pi \cdot E_\nu(z) - E_{-\nu}(z), \quad \sin \nu \pi \cdot E_\nu(z) = J_{-\nu}(z) - \cos \nu \pi \cdot J_\nu(z).$$

Функция Вебера $E_\nu(z)$ разлагается в степенной ряд

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} E_\nu(z) = \frac{1}{\nu} \sin^2 \frac{\nu \pi}{2} \left[1 - \frac{z^2}{2^2 - \nu^2} + \frac{z^4}{(2^2 - \nu^2)(4^2 - \nu^2)} - \dots \right] - \\ - \cos^2 \frac{\nu \pi}{2} \left[\frac{z}{1^2 - \nu^2} - \frac{z^3}{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Ее асимптотика при $|z| \gg 1$, $|z| \gg |\nu|$ описывается формулой

$$\begin{aligned} E_\nu(z) + N_\nu(z) \approx -\frac{1 + \cos \nu \pi}{\pi z} \left[1 - \frac{1^2 - \nu^2}{z^2} + \frac{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)}{z^4} - \dots \right] - \\ - \frac{1 - \cos \nu \pi}{\pi z} \left[\frac{\nu}{z} - \frac{\nu(2^2 - \nu^2)}{z^3} + \frac{\nu(2^2 - \nu^2)(4^2 - \nu^2)}{z^5} - \dots \right]. \end{aligned}$$

1.2. Неполными функциями Ангера и Вебера называются функции

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^z \cos(vt - r \sin t) dt, \quad -v = \frac{1}{\pi} \int_0^z \sin(vt - r \sin t) dt.$$

Если верхний предел $z = \pi$, то они превращаются соответственно в функции Ангера и Вебера $J_\nu(r)$ и $E_\nu(r)$. Для $r = v$ см. таблицы 66 и 67.

2. Функции Струве

Функции Струве $H_\nu(z)$ получаются в связи с интегральным представлением Пуассона для функций Бесселя при $\operatorname{Re} \nu > -1/2$. Именно,

$$H_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos t) \sin^{2\nu} t dt.$$

Они являются решениями следующего неоднородного дифференциального уравнения Бесселя:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = \frac{4 (z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(1/2) \Gamma(\nu + 1/2)}.$$

Функции Струве целого порядка n связаны с функциями Вебера; в частности, имеем (рис. 174, таблица 65): $H_0(z) = -E_0(z)$, $H_1(z) = -E_1(z) + 2/\pi$.

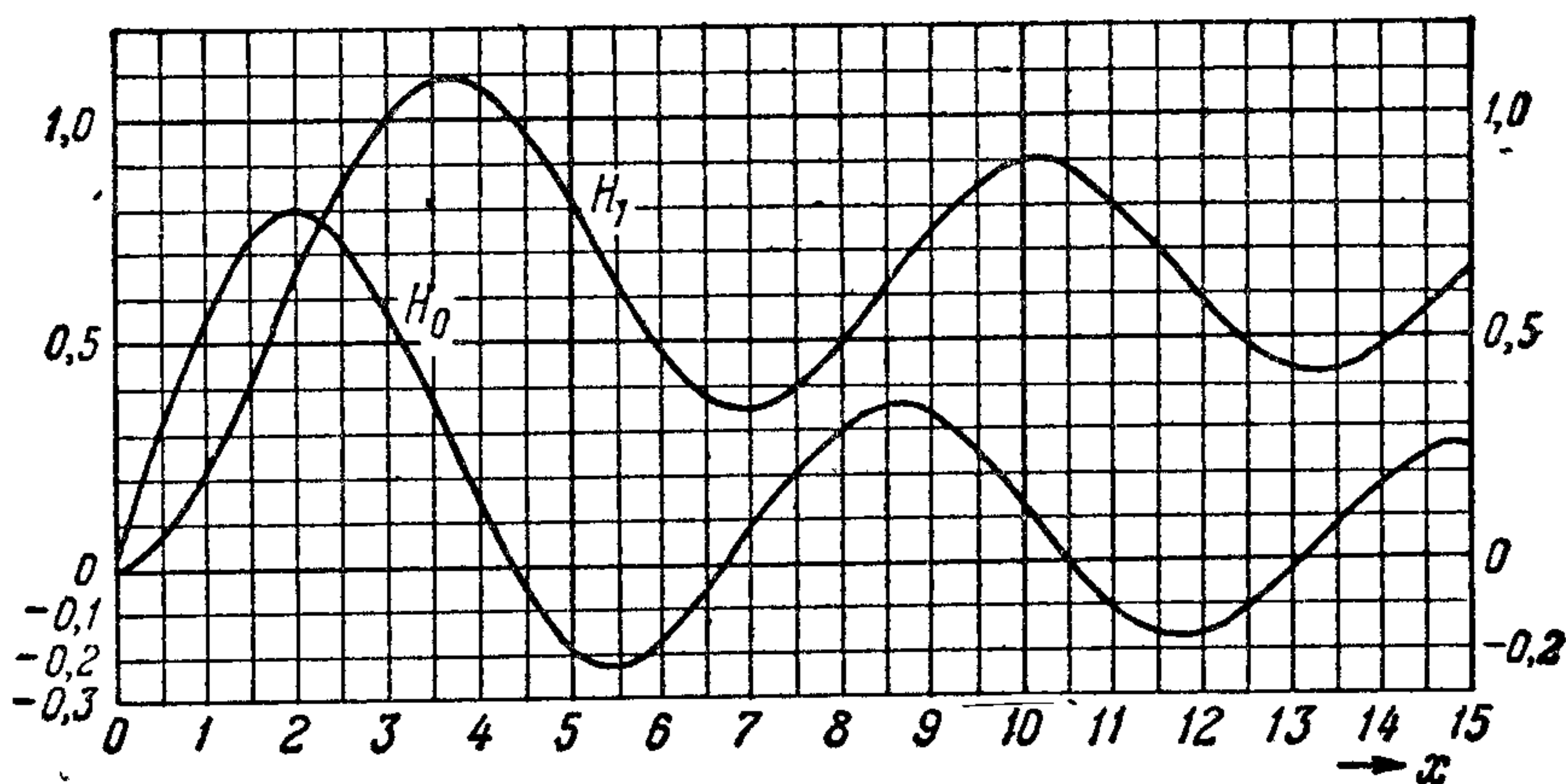


Рис. 174. Функции Струве $H_\nu(x)$.

Функции Струве порядка $n + 1/2$ (n — целое число) являются элементарными функциями, например

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} H_{1/2}(z) = \frac{1 - \cos z}{\sqrt{z}}.$$

Разложение функции $H_\nu(z)$ в степенной ряд таково:

$$H_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + 3/2)} \left[1 - \frac{z^2}{3(2\nu+3)} + \frac{z^4}{3 \cdot 5(2\nu+3)(2\nu+5)} - \dots \right].$$

Ее асимптотика при $|z| \gg 1$, $|z| \gg |\nu|$ дается формулой

$$H_\nu(z) - N_\nu(z) \approx \frac{(z/2)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \left[1 + \frac{1 \cdot (2\nu-1)}{z^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2\nu-1)(2\nu-3)}{z^4} + \dots \right].$$

Т а б л и ц а 65. Функции Вебера $E_0(x)$, $E_1(x)$ и функции Струве $H_0(x)$, $H_1(x)$

x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
0,00	+ 0,0000	- 0,6366	+ 0,0000	1,00	+ 0,5687	- 0,4382	+ 0,1985
02	+ 63 5 0127	+ 0 5 6365	+ 0 5 0001	02	+ 43 5773	+ 37,5 4307	+ 37 2059
04	63 5 0255	1 6363	- 1 0003	04	43 5859	38 4231	58 2135
06	63 5 0382	2 6359	2 5 0008	06	42 5943	38 4155	38 2211
08	63 5 0509	3 6353	3 0014	08	41 6025	39 4077	39 2289
0,10	+ 63,5 0636	+ 4 5 6345	+ 5 0021	1,10	+ 39,5 6106	+ 40 3999	+ 39,5 2368
12	63 0763	5 5 6336	5,5 0031	12	39 6185	40 3919	40,5 2447
14	63 5 0889	6 5 6325	6 0042	14	38 6263	41 3839	40,5 2528
16	63 1016	7 6312	7,5 0054	16	37 6339	41 3757	41 2609
18	63 1142	8 6298	8 0069	18	36 6413	41,5 3675	41,5 2691
0 20	+ 62,5 1268	+ 9 6282	+ 8,5 0085	1,20	+ 36 6485	+ 42 3592	+ 42 2774
22	62,5 1393	10 6264	10 0102	22	34,5 6557	42,5 3508	42,5 2858
24	62,5 1518	10,5 6244	10,5 0122	24	33,5 6626	42,5 3423	42,5 2943
26	62 1643	11 6223	11,5 0143	26	33 6693	43 3338	43 3028
28	62 1767	12 5 6201	12 0166	28	32,5 6759	43,5 3252	43,5 3114
0,30	+ 61,5 1891	+ 13 6176	+ 13 0190	1,30	+ 31 6824	+ 44 3165	+ 44 3201
32	61,5 2014	13,5 6150	13,5 0216	32	30,5 6886	44 3077	44 3289
34	61 2137	14,5 6123	15 0243	34	29 6947	44,5 2989	44,5 3377
36	61 2259	15,5 6094	15 0273	36	29 7005	44,5 2900	44,5 3466
38	60 2381	16,5 6063	16,5 0303	38	27,5 7063	45 2811	45 3555
0,40	+ 60,5 2501	+ 17 6030	+ 17 0336	1,40	+ 26,5 7118	+ 45,5 2721	+ 45,5 3645
42	59,5 2622	17,5 5996	18 0370	42	26 7171	45,5 2630	45,5 3736
44	59,5 2741	19 5961	18,5 0406	44	25 7223	45,5 2539	45,5 3827
46	59 2860	19 5923	19 0443	46	24 7273	46 2448	46 3918
48	59 2978	20,5 5885	20,5 0481	48	23 7321	46,5 2356	46,5 4010
0,50	+ 58 3096	+ 20,5 5844	+ 21 0522	1,50	+ 22,5 7367	+ 46,5 2263	+ 46,5 4103
52	58 3212	22 5803	21,5 0564	52	21 7412	46,5 2170	46,5 4196
54	57 3328	22 5759	22,5 0607	54	20,5 7454	46,5 2077	46,5 4289
56	57 3442	23,5 5715	23 0652	56	19 7495	47 1984	47 4382
58	56,5 3556	24 5668	24 0698	58	18,5 7533	47 1890	47 4476
0,60	+ 56 3669	+ 24,5 5620	+ 24 5 0746	1,60	+ 17,5 7570	+ 47,5 1796	+ 47,5 4570
62	55,5 3781	25,5 5571	25,5 0795	62	16,5 7605	47 1701	47 4665
64	55 3892	26 5520	26 0846	64	15,5 7638	47,5 1607	47,5 4759
66	54,5 4002	26,5 5468	26 5 0898	66	15 7669	47,5 1512	47,5 4854
68	53 5 4111	27,5 5415	27,5 0951	68	13,5 7699	47,5 1417	47,5 4949
0,70	+ 53,5 4218	+ 28 5360	+ 28,5 1006	1,70	+ 13 7726	+ 47,5 1322	+ 48 5044
72	53 4325	29 5304	28,5 1063	72	11,5 7752	48 1227	47,5 5140
74	52 4431	29,5 5246	29,5 1120	74	11 7775	47,5 1131	47,5 5235
76	51,5 4535	30 5187	30,5 1179	76	10 7797	47,5 1036	48 5330
78	51 4638	31 5127	30,5 1240	78	9 7817	48 0941	47,5 5426
0,80	+ 50 5 4740	+ 31,5 5065	+ 31,5 1301	1,80	+ 7,5 7835	+ 47,5 0845	+ 47,5 5521
82	49,5 4841	32 5002	32 1364	82	7,5 7850	47,5 0750	48 5616
84	49 4940	33 4938	33 1428	84	6 7865	48 0655	47,5 5712
86	48,5 5038	33 4872	33 1494	86	5 7877	47,5 0559	47,5 5807
88	47,5 5135	34 4806	34 1560	88	4 7887	47 0464	47,5 5902
0 90	+ 47 5230	+ 34,5 4738	+ 34,5 1628	1,90	+ 3,5 7895	+ 47,5 0370	+ 47 5997
92	46,5 5324	35 4669	35 1697	92	2 7902	47,5 0275	47,5 6091
94	45,5 5417	35,5 4599	36 1767	94	1,5 7906	47 0180	47 6186
96	45 5508	36,5 4528	36 1839	96	+ 0,5 7909	47 0086	47 6280
98	44,5 5598	36,5 4455	37 1911	98	- 0,5 7910	46,5 * 0008	47 6374
1,00	+ 0,5687	- 0,4382	+ 0,1985	2,00	+ 0,7909	+ 0,0101	+ 0,6468

Продолжение табл. 66

x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
2.00	+ 0. 7909 — 1 5	+ 0. 0101 + 47	+ 0. 6468 + 46,5	3.00	+ 0. 5743 — 38,5	+ 0. 3835 + 23	+ 1. 0201 + 23
02	7906 — 2 5	0195 46,5	6561 46,5	02	5666 39	3881 22,5	0247 22,5
04	7901 — 3,5	0288 46	6654 46,5	04	5588 39,5	3926 21,5	0292 21,5
06	7894 — 4	0380 46	6747 46	06	5509 40	3969 21	0335 21
08	7886 — 5 5	0472 46	6839 45,5	08	5429 40,5	4011 20,5	0377 20,5
2.10	7875 — 6	0564 + 45 5	6930 + 46	3.10	5348 — 40,5	4052 + 19,5	0418 + 19,5
12	7863 — 7	0655 45,5	7022 45	12	5267 41	4091 18,5	0457 18,5
14	7849 — 8	0746 45	7112 45,5	14	5185 41,5	4128 18	0494 18
16	7833 — 8 5	0836 45	7203 44,5	16	5102 42	4164 17,5	0530 17,5
18	7816 — 10	0926 44,5	7292 44 5	18	5018 42	4199 16,5	0565 16,5
2.20	7796 — 10 5	1015 + 44 5	7381 + 44,5	3.20	4934 — 42,5	4232 + 16	0598 + 16
22	7775 — 11,5	1104 44	7470 44	22	4849 43	4264 15	0630 15
24	7752 — 12,5	1192 43,5	7558 43,5	24	4763 43	4294 14,5	0660 14,5
26	7727 — 13	1279 43	7645 43,5	26	4677 43	4323 13,5	0689 13,5
28	7701 — 14	1365 43	7732 42,5	28	4591 44	4350 13	0716 13
2.30	7673 — 15	1451 + 42,5	7817 + 43	3.30	4503 — 44	4376 + 12	0742 + 12
32	7643 — 16	1536 42,5	7903 42	32	4415 44	4400 11,5	0766 11,5
34	7611 — 16 5	1621 41 5	7987 42	34	4327 44	4423 10,5	0789 10,5
36	7578 — 17 5	1704 41,5	8071 41	36	4239 44,5	4444 9 5	0810 10
38	7543 — 18,5	1787 41	8153 41	38	4150 45	4463 9,5	0830 9
2.40	7506 — 19	1869 + 40,5	8235 + 40,5	3.40	4060 — 45	4482 + 8	0848 + 8
42	7468 — 20	1950 40	8316 40	42	3970 45	4498 7,5	0864 8
44	7428 — 20,5	2030 40	8396 40	44	3880 45	4513 7	0880 6,5
46	7387 — 21,5	2110 39	8476 39	46	3790 45 5	4527 6	0893 6
48	7344 — 22	2188 38 5	8554 39	48	3699 45,5	4539 5,5	0905 5,5
2 50	7300 — 23	2265 + 38,5	8632 + 38	3.50	3608 — 45,5	4550 + 4 5	0916 + 4,5
52	7254 — 24	2342 37,5	8708 37,5	52	3517 45 5	4559 3,5	0925 3,5
54	7206 — 24,5	2417 37,5	8783 37 5	54	3426 46	4566 3	0932 3
56	7157 — 25,5	2492 36 5	8858 36,5	56	3334 45 5	4572 2,5	0938 2,5
58	7106 — 26	2565 36	8931 36,5	58	3243 46	4577 1,5	0943 1,5
2 60	7054 — 26,5	2637 + 36	9004 + 35,5	3.60	3151 — 45,5	4580 + 0,5	0946 + 0,5
62	7001 — 27,5	2709 35	9075 35	62	3060 46	4581 0	0947 0
64	6946 — 28	2779 34 5	9145 34,5	64	2968 45,5	4581 — 1	0947 — 0,5
66	6890 — 29	2848 34	9214 34	66	2877 46	4579 1,5	0946 1,5
68	6832 — 29 5	2916 33,5	9282 33 5	68	2785 45,5	4576 2	0943 2,5
2.70	6773 — 30	2983 + 32,5	9349 + 33	3.70	2694 — 46	4572 — 3	0938 — 3
72	6713 — 31	3048 32 5	9415 32	72	2602 45,5	4566 4	0932 3,5
74	6651 — 31 5	3113 31 5	9479 31,5	74	2511 45,5	4558 4,5	0925 4,5
76	6598 — 32	3176 31	9542 31	76	2420 45,5	4549 5	0916 5,5
78	6521 — 32,5	3238 30,5	9604 30,5	78	2329 45,5	4539 6	0905 6
2.80	6459 — 33,5	3299 + 29,5	9665 + 30	3.80	2238 — 45	4527 — 6,5	0893 — 6,5
82	6392 — 34	3358 29,5	9725 29	82	2148 45	4514 7,5	0880 7,5
84	6324 — 34 5	3417 28	9783 28 5	84	2058 45	4499 8	0865 8
86	6255 — 35	3473 28	9840 27 5	86	1968 45	4483 8,5	0849 8,5
88	6185 — 35,5	3529 27	9895 27,5	88	1878 44,5	4466 9,5	0832 9,5
2.90	6114 — 36	3583 + 26,5	9950 + 26,5	3.90	1789 — 44	4447 — 10,5	0813 — 10,5
92	6042 — 36,5	3636 26	* 0003 25,5	92	1701 44,5	4426 11	0792 10,5
94	5969 — 37	3688 25	0054 25,5	94	1612 44	4404 11,5	0771 11,5
96	5895 — 38	3738 24,5	0105 24,5	96	1524 43,5	4381 12	0748 12,5
98	5819 — 38	3787 24	0154 23,5	98	1437 43,5	4357 13	0723 13
3.00	5743 + 0.	3835 + 0.	0201 + 1.	4.00	1350 + 0.	4331 + 0.	0697 + 1.

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
4,00	+ 0, 1350 — 43	+ 0, 4331 — 13,5	+ 1, 0697 — 13,5	5,00	— 0, 1852 — 17	+ 0, 1712 — 35	+ 0, 8078 — 34,5
02	1264 43	4304 14,5	0670 14	02	1886 16	1642 34,5	8009 35
04	1178 42,5	4275 14,5	0642 15	04	1918 15,5	1573 35	7939 35
06	1093 42,5	4246 15,5	0612 15,5	06	1949 14,5	1503 35	7869 35
08	1008 42	4215 16,5	0581 16,5	08	1978 14	1433 35,5	7799 35,5
4,10	0924 — 41,5	4182 — 16,5	0548 — 16,5	5,10	2006 — 13	1362 — 35	7728 — 35
12	0841 41,5	4149 17,5	0515 17,5	12	2032 13	1292 35,5	7658 35,5
14	0758 41	4114 18	0480 18	14	2058 11,5	1221 35,5	7587 35
16	0676 40,5	4078 19	0444 18,5	16	2081 11,5	1150 35	7517 35,5
18	0595 40	4040 19	0407 19,5	18	2104 10	1080 35,5	7446 35,5
4,20	0515 — 40	4002 — 20	0368 — 19,5	5,20	2124 — 10	1009 — 35,5	7375 — 35,5
22	0435 39,5	3962 20,5	0329 20,5	22	2144 9	0938 35,5	7304 35,5
24	0356 39	3921 20,5	0288 21	24	2162 8,5	0867 35,5	7233 35,5
26	0278 38,5	3880 22	0246 21,5	26	2179 7,5	0796 35,5	7162 35
28	0201 38	3836 22	0203 22,5	28	2194 7	0725 35	7092 35,5
4,30	0125 — 38	3792 — 22,5	0158 — 22,5	5,30	2208 — 6	0655 — 35,5	7021 — 35,5
32	0049 37	3747 23	0113 23	32	2220 5,5	0584 35	6950 35
34	* 0025 37	3701 24	0067 24	34	2231 5	0514 35,5	6880 35
36	0099 36	3653 24	0019 24	36	2241 4	0443 35	6810 35,5
38	0171 36	3605 25	* 9971 25	38	2249 3,5	0373 35	6739 34,5
4,40	0243 — 35	3555 — 25	9921 — 25	5,40	2256 — 2,5	0303 — 34,5	6670 — 35
42	0313 35	3505 26	9871 25,5	42	2261 2	0234 35	6600 35
44	0383 34,5	3453 26	9820 26,5	44	2265 1	0164 34,5	6530 34,5
46	0452 33,5	3401 26,5	9767 26,5	46	2267 — 1	0095 34,5	6461 34,5
48	0519 33	3348 27	9714 27	48	2269 + 0,5	0026 34	6392 34
4,50	0585 — 33	3294 — 28	9660 — 27,5	5,50	2268 + 0,5	* 0042 — 34,5	6324 — 34
52	0651 32	3238 27,5	9605 28	52	2267 1,5	0111 33,5	6256 34
54	0715 31,5	3183 28,5	9549 28,5	54	2264 2	0178 34	6188 34
56	0778 31	3126 29	9492 29	56	2260 3	0246 33,5	6120 33,5
58	0840 30,5	3068 29	9434 29	58	2254 3,5	0313 33	6053 33
4,60	0901 — 29,5	3010 — 29,5	9376 — 29,5	5,60	2247 + 4	0379 — 33	5987 — 33
62	0960 29,5	2951 30	9317 30	62	2239 4,5	0445 33	5921 33
64	1019 28,5	2891 30,5	9257 30,5	64	2230 5	0511 32,5	5855 32,5
66	1076 28	2830 30,5	9196 30,5	66	2219 6,5	0576 32,5	5790 32,5
68	1132 27,5	2769 31	9135 31	68	2206 6,5	0641 32	5725 32
4,70	1187 — 26,5	2707 — 31,5	9073 — 31,5	5,70	2193 + 7,5	0705 — 31,5	5661 — 31,5
72	1240 26	2644 31,5	9010 31,5	72	2178 8	0768 31,5	5598 31,5
74	1292 25,5	2581 32	8947 32	74	2162 8,5	0831 31	5535 31
76	1343 25	2517 32,5	8883 32	76	2145 9	0893 31	5473 31
78	1393 24,5	2452 32,5	8819 32,5	78	2127 10	0955 30,5	5411 30,5
4,80	1442 — 23,5	2387 — 32,5	8754 — 33	5,80	2107 + 10,5	1016 — 30	5350 — 30
82	1489 22,5	2322 33	8688 33	82	2086 11	1076 30	5290 29,5
84	1534 22,5	2256 33,5	8622 33,5	84	2064 11,5	1136 29	5231 29,5
86	1579 21,5	2189 33,5	8555 33,5	86	2041 12,5	1194 29	5172 29
88	1622 21	2122 33,5	8488 33,5	88	2016 13	1252 29	5114 29
4,90	1664 — 20	2055 — 34	8421 — 34	5,90	1990 + 13	1310 — 28	5056 — 28
92	1704 19,5	1987 34	8353 34	92	1964 14	1366 28	5000 28
94	1743 19	1919 34,5	8285 34,5	94	1936 14,5	1422 27,5	4944 27,5
96	1781 18	1850 34,5	8216 34,5	96	1907 15	1477 27	4889 27
98	1817 17,5	1781 34,5	8147 34,5	98	1877 15,5	1531 26,5	4835 26,5
5,00	1852 — 0,	1712 + 0,	8078 + 0,	6,00	1846 — 0,	1584 — 0,	4782 + 0,

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
6,00	-0,1846 + 16,5	-0,1584 - 26,5	+0,4782 - 26,5	7,00	+0,0634 + 29	-0,2903 + 1,5	+0,3463 + 1,5
02	1813 16,5	1637 25,5	4729 25,5	02	0692 29	2900 2,5	3466 2,5
04	1780 17	1688 25,5	4678 25,5	04	0750 29	2895 3	3471 3
06	1746 17,5	1739 25	4627 25	06	0808 28,5	2889 3	3477 3,5
08	1711 18,5	1709 24,5	4577 24	08	0865 29	2883 4	3484 4
6,10	1674 + 18,5	1838 - 23,5	4529 - 24	7,10	0923 + 28,5	2875 + 5	3492 + 4,5
12	1637 19	1885 23,5	4481 23,5	12	0980 29	2865 5	3501 5
14	1599 19,5	1932 23	4434 23	14	1038 28,5	2855 5,5	3511 6
16	1560 20	1978 22,5	4388 22,5	16	1095 28	2844 6,5	3523 6
18	1520 20,5	2023 22	4343 22	18	1151 28,5	2831 7	3535 7
6,20	1479 + 21	2067 - 21,5	4299 - 21,5	7,20	1208 + 28	2817 + 7,5	3549 + 7,5
22	1437 21,5	2110 21	4256 21	22	1264 28	2802 8	3564 8
24	1394 21,5	2152 20,5	4214 20,5	24	1320 27,5	2786 8,5	3580 8,5
26	1351 22	2193 20	4173 20	26	1375 28	2769 9	3597 9
28	1307 22,5	2233 19	4133 19	28	1431 27	2751 9,5	3615 9,5
6,30	1262 + 23	2271 - 19	4095 - 19	7,30	1485 + 27,5	2732 + 10	3634 + 10,5
32	1216 23,5	2309 18,5	4057 18,5	32	1540 27	2712 11	3655 10,5
34	1169 23,5	2346 17,5	4020 17,5	34	1594 27	2690 11	3676 11
36	1122 24	2381 17,5	3985 17,5	36	1648 26,5	2668 11,5	3698 12
38	1074 24,5	2416 16,5	3950 16,5	38	1701 26	2645 12,5	3722 12
6,40	1025 + 24,5	2449 - 16	3917 - 16	7,40	1753 + 26	2620 + 12,5	3746 + 13
42	0976 25	2481 15,5	3885 15,5	42	1805 26	2595 13,5	3772 13
44	0926 25	2512 15	3854 15	44	1857 25,5	2568 13,5	3798 13,5
46	0876 25,5	2542 14,5	3824 14,5	46	1908 25,5	2541 14,5	3825 14,5
48	0825 26	2571 14	3795 13,5	48	1959 25	2512 14,5	3854 14,5
6,50	0773 + 26	2599 - 13	3768 - 13,5	7,50	2009 + 24,5	2483 + 15	3883 + 15
52	0721 26,5	2625 12,5	3741 12,5	52	2058 24,5	2453 15,5	3913 16
54	0668 26,5	2650 12,5	3716 12	54	2107 24	2422 16,5	3945 16
56	0615 27	2675 11	3692 11,5	56	2155 23,5	2389 16,5	3977 16,5
58	0561 27	2697 11	3669 11	58	2202 23,5	2356 16,5	4010 17
6,60	0507 + 27,5	2719 - 10,5	3647 - 10,5	7,60	2249 + 23	2323 + 17,5	4044 + 17
62	0452 27,5	2740 9,5	3626 9,5	62	2295 23	2288 18	4078 18
64	0397 27,5	2759 9	3607 9	64	2341 22	2252 18	4114 18,5
66	0342 28	2777 8,5	3589 8,5	66	2385 22	2216 19	4151 18,5
68	0286 28	2794 8	3572 8	68	2429 21,5	2178 19	4188 19
6,70	0230 + 28	2810 - 7,5	3556 - 7,5	7,70	2472 + 21,5	2140 + 19,5	4226 + 19,5
72	0174 28,5	2825 6,5	3541 6,5	72	2515 20,5	2101 19,5	4265 19,5
74	0117 28,5	2838 6,5	3528 6	74	2556 20,5	2062 20,5	4304 20,5
76	0060 28,5	2851 5,5	3516 5,5	76	2597 20	2021 20,5	4345 20,5
78	0003 28,5	2862 4,5	3505 5	78	2637 20	1980 20,5	4386 21
6,80	*0054 + 29	2871 - 4,5	3495 - 4,5	7,80	2677 + 19	1939 + 21,5	4428 + 21
82	0112 29	2880 3,5	3486 3,5	82	2715 18,5	1896 21,5	4470 21,5
84	0170 28,5	2887 3	3479 3	84	2752 18,5	1853 22	4513 22
86	0227 29	2893 2,5	3473 2,5	86	2789 18	1809 22,5	4557 22,5
88	0285 29	2898 2	3468 2	88	2825 17,5	1764 22,5	4602 22,5
6,90	0343 + 29	2902 - 1,5	3464 - 1,5	7,90	2860 + 16,5	1719 + 22,5	4647 + 23
92	0401 29	2905 - 0,5	3461 - 0,5	92	2893 16,5	1674 23,5	4693 23
94	0459 29,5	2906 0	3460 0	94	2926 16,5	1627 23,5	4739 23,5
96	0518 29	2906 + 0,5	3460 + 0,5	96	2959 15,5	1580 23,5	4786 23,5
98	0576 29	2905 1	3461 1	98	2990 15	1533 24	4833 24
7,00	0634 + 0,	2903 - 0,	3463 + 0,	8,00	3020 + 0,	1485 - 0,	4881 + 0,

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
8,00	+ 0, 3020 + 14,5	- 0, 1485 + 24	+ 0, 4881 + 24,5	9,00	+ 0, 3199 - 11,5	+ 0, 1119 + 23,5	+ 0, 7485 + 24
02	3049 14	1437 24,5	4930 24,5	02	3176 12	1166 23,5	7533 23
04	3077 14	1388 25	4979 24,5	04	3152 12,5	1213 23	7579 23
06	3105 13	1338 25	5028 25	06	3127 12,5	1259 22,5	7625 22,5
08	3131 12,5	1288 25	5078 25	08	3102 13,5	1304 22,5	7670 22,5
8,10	3156 + 12	1238 + 25	5128 + 25,5	9,10	3075 - 13,5	1349 + 22	7715 + 22,5
12	3180 12	1188 26	5179 25,5	12	3048 14,5	1393 22	7760 21,5
14	3204 11	1136 25,5	5230 25,5	14	3019 14,5	1437 21,5	7803 21,5
16	3226 10,5	1085 26	5281 26	16	2990 15	1480 21	7846 21,5
18	3247 10	1033 26	5333 26	18	2960 15,5	1522 21	7889 20,5
8,20	3267 + 9,5	0981 + 26	5385 + 26	9,20	2929 - 15,5	1564 + 20,5	7930 + 20,5
22	3286 9	0929 26,5	5437 26,5	22	2898 16,5	1605 20	7971 20,5
24	3304 8,5	0876 26,5	5490 26,5	24	2865 16,5	1645 20	8012 19,5
26	3321 8	0823 26,5	5543 26,5	26	2832 17	1685 19,5	8051 19,5
28	3337 7,5	0770 26,5	5596 26,5	28	2798 17,5	1724 19	8090 19
8,30	3352 + 7	0717 + 27	5649 + 27	9,30	2763 - 18	1762 + 18,5	8128 + 19
32	3366 6,5	0663 26,5	5703 26,5	32	2727 18	1799 18,5	8166 18
34	3379 5,5	0610 27	5756 27	34	2691 18,5	1836 18	8202 18
36	3390 5,5	0556 27	5810 27	36	2654 19	1872 17,5	8238 17,5
38	3401 4,5	0502 27	5864 27	38	2616 19	1907 17	8273 17
8,40	3410 + 4,5	0448 + 27	5918 + 27	9,40	2578 - 20	1941 + 17	8307 + 17
42	3419 3,5	0394 27	5972 27,5	42	2538 19,5	1975 16	8341 16,5
44	3426 3	0340 27,5	6027 27	44	2499 20,5	2007 16	8374 15,5
46	3432 3	0285 27	6081 27	46	2458 20,5	2039 15,5	8405 15,5
48	3438 2	0231 27	6135 27,5	48	2417 21	2070 15	8436 15
8,50	3442 + 1,5	0177 + 27,5	6190 + 27	9,50	2375 - 21	2100 + 15	8466 + 15
52	3445 + 1	0122 27	6244 27	52	2333 21,5	2130 14	8496 14
54	3447 0	0068 27	6298 27	54	2290 21,5	2158 13,5	8524 14
56	3447 0	0014 27	6352 27	56	2247 22	2185 13,5	8552 13
58	3447 - 0,5	0040 27	6406 27	58	2203 22,5	2212 13	8578 13
8,60	3446 - 1,5	0094 + 27	6460 + 27	9,60	2158 - 22,5	2238 + 12	8604 + 12,5
62	3443 1,5	0148 26,5	6514 27	62	2113 22,5	2262 12	8629 12
64	3440 2,5	0201 27	6568 26,5	64	2068 23	2286 11,5	8653 11
66	3435 2,5	0255 26,5	6621 26,5	66	2022 23,5	2309 11	8675 11
68	3430 3,5	0308 26,5	6674 27	68	1975 23	2331 10,5	8697 11
8,70	3423 - 4	0361 + 26,5	6728 + 26	9,70	1929 - 24	2352 + 10	8719 + 10
72	3415 4,5	0414 26,5	6780 26,5	72	1881 23,5	2372 10	8739 9,5
74	3406 4,5	0467 26	6833 26	74	1834 24	2392 9	8758 9
76	3397 5,5	0519 26	6885 26	76	1786 24,5	2410 8,5	8776 8,5
78	3386 6	0571 26	6937 26	78	1737 24	2427 8	8793 8,5
8,80	3374 - 6,5	0623 + 25,5	6989 + 26	9,80	1689 - 24,5	2443 + 8	8810 + 7,5
82	3361 7	0674 26	7041 25,5	82	1640 25	2459 7	8825 7
84	3347 7,5	0726 25	7092 25	84	1590 24,5	2473 6,5	8839 7
86	3332 8	0776 25,5	7142 25,5	86	1541 25	2486 6,5	8853 6
88	3316 8,5	0827 24,5	7193 25	88	1491 25	2499 5,5	8865 5,5
8,90	3299 - 9	0876 + 25	7243 + 24,5	9,90	1441 - 25,5	2510 + 5,5	8876 + 5,5
92	3281 9,5	0926 24,5	7292 24,5	92	1390 25	2521 4,5	8887 4,5
94	3262 10	0975 24,5	7341 24,5	94	1340 25,5	2530 4	8896 4,5
96	3242 10,5	1024 24	7390 24	96	1289 25,5	2538 4	8905 3,5
98	3221 11	1072 23,5	7438 23,5	98	1238 25,5	2546 3	8912 3
9,00	3199 + 0,	1119 + 0,	7485 + 0,	10,00	1187 + 0,	2552 + 0,	8918 + 0,

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$		$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,		- 0,	+ 0,	+ 0,
10.00	1187 — 25,5	2552 + 3	8918 + 3	11.00	1114 — 17	1688 — 18,5	8055 — 19
02	1136 25,5	2558 2	8924 2	02	1148 16	1651 19	8017 18,5
04	1085 25,5	2562 1,5	8928 2	04	1180 16	1613 19	7980 19,5
06	1034 25,5	2565 1,5	8932 1	06	1212 15,5	1575 19,5	7941 19,5
08	0983 26	2568 0,5	8934 0,5	08	1243 15,5	1536 19,5	7902 19,5
10.10	0931 — 25,5	2569 + 0,5	8935 + 0,5	11.10	1274 — 14,5	1497 — 20	7863 — 20
12	0880 26	2570 — 0,5	8936 — 0,5	12	1303 14,5	1457 20	7823 20
14	0828 25,5	2569 0,5	8935 0,5	14	1332 14	1417 20,5	7783 20,5
16	0777 25,5	2568 1,5	8934 1,5	16	1360 13,5	1376 20,5	7742 20,5
18	0726 26	2565 2	8931 1,5	18	1387 13	1335 21	7701 21
10.20	0674 — 25,5	2561 — 2	8928 — 2,5	11.20	1413 — 13	1293 — 21	7659 — 21
22	0623 25,5	2557 3	8923 2,5	22	1439 12	1251 21,5	7617 21,5
24	0572 25,5	2551 3	8918 3,5	24	1463 12	1208 21,5	7574 21,5
26	0521 25,5	2545 3,5	8911 3,5	26	1487 11,5	1165 21,5	7531 21,5
28	0470 25	2538 4,5	8904 4,5	28	1510 11	1122 22	7488 22
10.30	0420 — 25,5	2529 — 4,5	8895 — 4,5	11.30	1532 — 10,5	1078 — 22	7444 — 22
32	0369 25	2520 5	8886 5	32	1553 10	1034 22	7400 22
34	0319 25	2510 6	8876 6	34	1573 10	0990 22,5	7356 22
36	0269 25	2498 6	8864 6	36	1593 9	0945 22	7312 22,5
38	0219 25	2486 6,5	8852 6,5	38	1611 9	0901 23	7267 22,5
10.40	0169 — 24,5	2473 — 7	8839 — 7	11.40	1629 — 8	0855 — 22,5	7222 — 23
42	0120 24,5	2459 7,5	8825 7,5	42	1645 8	0810 23	7176 22,5
44	0071 24,5	2444 8	8810 8	44	1661 7,5	0764 22,5	7131 23
46	0022 24	2428 8,5	8794 8,5	46	1676 7	0719 23	7085 23
48	* 0026 24	2411 9	8777 8,5	48	1690 6,5	0673 23	7039 23
10.50	0074 — 24	2393 — 9	8760 — 9,5	11.50	1703 — 6	0627 — 23,5	6993 — 23,5
52	0122 23,5	2375 10	8741 10	52	1715 5,5	0580 23	6946 23
54	0169 23,5	2355 10	8721 10	54	1726 5	0534 23,5	6900 23
56	0216 23	2335 10,5	8701 10,5	56	1736 4,5	0487 23	6854 23,5
58	0262 23,5	2314 11	8680 11	58	1745 4,5	0441 23,5	6807 23,5
10.60	0309 — 22,5	2292 — 11,5	8658 — 11,5	11.60	1754 — 3,5	0394 — 23,5	6760 — 23,5
62	0354 22,5	2269 12	8635 12	62	1761 3,5	0347 23,5	6713 23
64	0399 22,5	2245 12,5	8611 12	64	1768 2,5	0300 23	6667 23,5
66	0444 22	2220 12,5	8587 13	66	1773 2,5	0254 23,5	6620 23,5
68	0488 22	2195 13	8561 13	68	1778 1,5	0207 23,5	6573 23,5
10.70	0532 — 21,5	2169 — 13,5	8535 — 13,5	11.70	1781 — 1,5	0160 — 23,5	6526 — 23,5
72	0575 21	2142 14	8508 14	72	1784 1	0113 23	6479 23
74	0617 21	2114 14,5	8480 14	74	1786 — 0,5	0067 23,5	6433 23,5
76	0659 21	2085 14,5	8452 15	76	1787 0	0020 23,5	6386 23
78	0701 20,5	2056 15	8422 15	78	1787 + 0,5	* 0027 23	6340 23,5
10.80	0742 — 20	2026 — 15,5	8392 — 15	11.80	1786 + 1	0073 — 23	6293 — 23
82	0782 19,5	1995 15,5	8362 16	82	1784 1,5	0119 23,5	6247 23
84	0821 19,5	1964 16	8330 16	84	1781 2	0166 23	6201 23
86	0860 19,5	1932 16,5	8298 16,5	86	1777 2	0212 22,5	6155 23
88	0899 18,5	1899 16,5	8265 16,5	88	1773 3	0257 23	6109 23
10.90	0936 — 18,5	1866 — 17,5	8232 — 17	11.90	1767 + 3,5	0303 — 22,5	6063 — 22,5
92	0973 18,5	1831 17	8198 17,5	92	1760 3,5	0348 23	6018 22,5
94	1010 17,5	1797 18	8163 18	94	1753 4	0394 22,5	5973 22,5
96	1045 17,5	1761 18	8127 18	96	1745 5	0439 22	5928 22,5
98	1080 17	1725 18,5	8091 18	98	1735 5	0483 22,5	5883 22
11.00	1114 — 0,	1688 + 0,	8055 + 0,	12.00	1725 — 0,	0528 — 0,	5839 + 0,

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
12,00	-0, 1725 + 5,5	-0, 0528 - 22	+0, 5839 - 22,5	13,00	-0, 0295 + 20,5	-0, 2064 - 6	+0, 4302 - 6
02	1714 6	0572 21,5	5794 21,5	02	0254 21	2076 5,5	4290 5,5
04	1702 6	0615 22	5751 22	04	0212 21	2087 5	4279 5
06	1690 7	0659 21,5	5707 21,5	06	0170 21	2097 5	4269 5
08	1676 7	0702 21,5	5664 21,5	08	0128 21	2107 4,5	4259 4
12,10	1662 + 8	0745 - 21	5621 - 21	13,10	0086 + 21	2116 - 3,5	4251 - 4
12	1646 8	0787 21	5579 21	12	0044 21,5	2123 3,5	4243 3,5
14	1630 8,5	0829 20,5	5537 20,5	14	0001 21,5	2130 3	4236 3
16	1613 9	0870 21	5496 20,5	16	* 0042 21	2136 2,5	4230 2,5
18	1595 9	0912 20	5455 20,5	18	0084 21,5	2141 2,5	4225 2,5
12,20	1577 + 10	0952 - 20	5414 - 20	13,20	0127 + 21,5	2146 - 1,5	4220 - 1,5
22	1557 10	0992 20	5374 20	22	0170 21,5	2149 1,5	4217 1,5
24	1537 10,5	1032 19,5	5334 19,5	24	0213 21,5	2152 0,5	4214 0,5
26	1516 11	1071 19,5	5295 19,5	26	0256 21,5	2153 - 0,5	4213 - 0,5
28	1494 11	1110 19	5256 19	28	0299 21,5	2154 0	4212 0
12,30	1472 + 12	1148 - 19	5218 - 19	13,30	0342 + 22	2154 + 0,5	4212 + 0,5
32	1448 12	1186 18,5	5180 18,5	32	0386 21,5	2153 1	4213 1
34	1424 12,5	1223 18	5143 18	34	0429 21,5	2151 1	4215 1,5
36	1399 12,5	1259 18	5107 18	36	0472 21,5	2149 2	4218 1,5
38	1374 13	1295 18	5071 18	38	0515 21	2145 2	4221 2,5
12,40	1348 + 13,5	1331 - 17,5	5035 - 17	13,40	0557 + 21,5	2141 + 3	4226 + 2,5
42	1321 14	1366 17	5001 17,5	42	0600 21,5	2135 3	4231 3
44	1293 14	1400 16,5	4966 16,5	44	0643 21	2129 3,5	4237 3,5
46	1265 14,5	1433 16,5	4933 16,5	46	0685 21,5	2122 4	4244 4
48	1236 15	1466 16	4900 16	48	0728 21	2114 4	4252 4
12,50	1206 + 15	1498 - 16	4868 - 16	13,50	0770 + 21	2106 + 5	4260 + 5
52	1176 15,5	1530 15,5	4836 15,5	52	0812 21	2096 5	4270 5
54	1145 16	1561 15	4805 15	54	0854 20,5	2086 5,5	4280 5,5
56	1113 16	1591 15	4775 14,5	56	0895 21	2075 6	4291 6
58	1081 16,5	1621 14	4746 14,5	58	0937 20,5	2063 6,5	4303 6,5
12,60	1048 + 16,5	1649 - 14	4717 - 14	13,60	0978 + 20,5	2050 + 7	4316 + 7
62	1015 17	1677 14	4689 14	62	1019 20	2036 7	4330 7
64	0981 17	1705 13	4661 13	64	1059 20,5	2022 7,5	4344 7,5
66	0947 17,5	1731 13	4635 13	66	1100 20	2007 8	4359 8
68	0912 17,5	1757 12,5	4609 12,5	68	1140 19,5	1991 8,5	4375 8,5
12,70	0877 + 18	1782 - 12,5	4584 - 12,5	13,70	1179 + 20	1974 + 9	4392 + 9
72	0841 18,5	1807 11,5	4559 11,5	72	1219 19	1956 9	4410 9
74	0804 18	1830 11,5	4536 11,5	74	1257 19,5	1938 9,5	4428 9,5
76	0768 19	1853 11	4513 11	76	1296 19	1919 10	4447 10
78	0730 18,5	1875 11	4491 10,5	78	1334 19	1899 10	4467 10,5
12,80	0693 + 19,5	1897 - 10	4470 - 10,5	13,80	1372 + 18,5	1879 + 11	4488 + 10,5
82	0654 19	1917 10	4449 9,5	82	1409 18,5	1857 11	4509 11
84	0616 19,5	1937 9	4430 9,5	84	1446 18,5	1835 11	4531 11,5
86	0577 19,5	1955 9	4411 9	86	1483 18	1813 12	4554 11,5
88	0538 20	1973 9	4393 8,5	88	1519 17,5	1789 12	4577 12
12,90	0498 + 20	1991 - 8	4376 - 8,5	13,90	1554 + 17,5	1765 + 12,5	4601 + 12,5
92	0458 20	2007 7,5	4359 7,5	92	1589 17,5	1740 12,5	4626 12,5
94	0418 20,5	2022 7,5	4344 7,5	94	1624 17	1715 13	4651 13,5
96	0377 20,5	2037 7	4329 7	96	1658 16,5	1689 13,5	4678 13
98	0336 20,5	2051 6,5	4315 6,5	98	1691 16,5	1662 14	4704 14
13,00	0295 -0,	2064 -0,	4302 +0,	14,00	1724 +0,	1634 -0,	4732 +0,

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
14,00	+ 0, 1724 + 16,5	- 0, 1634 + 14	+ 0, 4732 + 14	15,00	+ 0, 2477 - 2,5	+ 0, 0239 + 20	+ 0, 6605 + 20,5
02	1757 16	1606 14	4760 14	02	2472 3	0279 20,5	6646 20
04	1789 15,5	1578 15	4788 15	04	2466 3,5	0320 20	6686 20
06	1820 15,5	1548 14,5	4818 15	06	2459 3,5	0360 20	6726 20,5
08	1851 15	1519 15,5	4848 15	08	2452 4,5	0400 20	6767 20
14,10	1881 + 14,5	1488 + 15,5	4878 + 15,5	15,10	2443 - 4,5	0440 + 20	6807 + 19,5
12	1910 14,5	1457 15,5	4909 15,5	12	2434 5	0480 20	6846 20
14	1939 14	1426 16	4940 16,5	14	2424 5,5	0520 19,5	6886 19,5
16	1967 14	1394 16,5	4973 16	16	2413 5,5	0559 19,5	6925 19,5
18	1995 13,5	1361 16,5	5005 16,5	18	2402 6,5	0598 19,5	6964 19,5
14,20	2022 + 13	1328 + 17	5038 + 17	15,20	2389 - 6,5	0637 + 19	7003 + 19
22	2048 12,5	1294 17	5072 17	22	2376 7	0675 19	7041 19
24	2073 12,5	1260 17	5106 17	24	2362 7	0713 19	7079 19
26	2098 12	1226 17,5	5140 17,5	26	2348 8	0751 18,5	7117 19
28	2122 12	1191 18	5175 18	28	2332 8	0788 18,5	7155 18,5
14,30	2146 + 11,5	1155 + 17,5	5211 + 18	15,30	2316 - 8,5	0825 + 18,5	7192 + 18
32	2169 11	1120 18,5	5247 18	32	2299 8,5	0862 18,5	7228 18,5
34	2191 10,5	1083 18	5283 18	34	2282 9,5	0899 17,5	7265 18
36	2212 10,5	1047 18,5	5319 18,5	36	2263 9,5	0934 18	7301 17,5
38	2233 9,5	1010 19	5356 19	38	2244 9,5	0970 17,5	7336 17,5
14,40	2252 + 9,5	0972 + 18,5	5394 + 19	15,40	2225 - 10,5	1005 + 17,5	7371 + 17,5
42	2271 9,5	0935 19	5432 19	42	2204 10,5	1040 17	7406 17
44	2290 8,5	0897 19,5	5470 19	44	2183 11	1074 17	7440 17
46	2307 8,5	0858 19	5508 19,5	46	2161 11	1108 16,5	7474 16,5
48	2324 8	0820 19,5	5547 19,5	48	2139 11,5	1141 16,5	7507 16,5
14,50	2340 + 7,5	0781 + 20	5586 + 19,5	15,50	2116 - 12	1174 + 16	7540 + 16,5
52	2355 7,5	0741 19,5	5625 19,5	52	2092 12,5	1206 16	7573 15,5
54	2370 6,5	0702 20	5664 20	54	2067 12,5	1238 15,5	7604 16
56	2383 6,5	0662 20	5704 20	56	2042 13	1269 15,5	7636 15
58	2396 6	0622 20	5744 20	58	2016 13	1300 15	7666 15,5
14,60	2408 + 5,5	0582 + 20	5784 + 20	15,60	1990 - 13,5	1330 + 15	7697 + 14,5
62	2419 5,5	0542 20,5	5824 20,5	62	1963 13,5	1360 14,5	7726 14,5
64	2430 5	0501 20	5865 20,5	64	1936 14	1389 14,5	7755 14,5
66	2440 4	0461 20,5	5906 20	66	1908 14,5	1418 14	7784 14
68	2448 4	0420 20,5	5946 20,5	68	1879 14,5	1446 13,5	7812 13,5
14,70	2456 + 3,5	0379 + 20,5	5987 + 20,5	15,70	1850 - 15	1473 + 13,5	7839 + 13,5
72	2463 3,5	0338 20,5	6028 21	72	1820 15	1500 13	7866 13
74	2470 2,5	0297 21	6070 20,5	74	1790 15,5	1526 12,5	7892 12,5
76	2475 2,5	0255 20,5	6111 20,5	76	1759 15,5	1551 12,5	7917 12,5
78	2480 2	0214 20,5	6152 20,5	78	1728 16	1576 12	7942 12
14,80	2484 + 1,5	0173 + 20,5	6193 + 21	15,80	1696 - 16	1600 + 12	7966 + 12
82	2487 1	0132 21	6235 20,5	82	1664 16,5	1624 11,5	7990 11,5
84	2489 + 1	0090 20,5	6276 20,5	84	1631 16,5	1647 11	8013 11
86	2491 0	0049 20,5	6317 21	86	1598 17	1669 10,5	8035 10,5
88	2491 0	0008 21	6359 20,5	88	1564 17	1690 10,5	8056 10,5
14,90	2491 - 0,5	* 0034 + 20,5	6400 + 20,5	15,90	1530 - 17	1711 + 10	8077 + 10
92	2490 1	0075 20,5	6441 20,5	92	1496 17,5	1731 9,5	8097 10
94	2488 1,5	0116 20,5	6482 20,5	94	1461 17,5	1750 9,5	8117 9
96	2485 1,5	0157 20,5	6523 20,5	96	1426 18	1769 9	8135 9
98	2482 2,5	0198 20,5	6564 20,5	98	1390 18	1787 8,5	8153 9
15,00	2477 + 0,	0239 + 0,	6605 + 0,	16,00	1354 + 0,	1804 + 0,	8171 + 0,

Т а б л и ц ы 66 и 67. Неполные функции Ангера и Вебера

$$u = \frac{1}{2} \int_0^x \cos \frac{q}{2} \left(\frac{\pi}{2} t - \sin \frac{\pi}{2} t \right) dt$$

x	q = 0,1	q = 0,2	q = 0,3	q = 0,4	q = 0,5
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	05000	05000	05000	05000	05000
2	10000	10000	10000	10000	10000
3	15000	15000	15000	15000	15000
4	20000	20000	20000	20000	20000
0,5	25000	25000	25000	25000	24999
6	3000	3000	29999	29998	29998
7	3500	3500	3500	3500	3499
8	4000	4000	3999	3999	3998
9	4500	4499	4499	4498	4496
1,0	5000	4999	4997	4995	4992
1	5499	5498	5495	5491	5486
2	5999	5996	5991	5984	5975
3	6498	6493	6485	6473	6458
4	6997	6989	6976	6957	6933
1,5	7496	7483	7463	7434	7397
6	7994	7975	7945	7902	7848
7	8491	8465	8421	8360	8282
8	8988	8951	8890	8805	8697
9	9483	9433	9350	9235	9090
2,0	9978	9911	9801	9649	9457
	0,	0,	0,	0,	0,

$$-v = \frac{1}{2} \int_0^x \sin \frac{q}{2} \left(\frac{\pi}{2} t - \sin \frac{\pi}{2} t \right) dt$$

x	q = 0,1	q = 0,2	q = 0,3	q = 0,4	q = 0,5
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	000000	000001	000001	000002	000002
2	000006	000013	000019	000026	000032
3	000032	000065	000097	000130	000162
4	000102	000204	000306	000408	000510
0,5	000247	000494	000742	000989	001236
6	000508	001016	001524	002032	002540
7	000931	001862	002793	003724	004655
8	001569	003138	004706	006275	007842
9	002478	004956	007434	009909	012383
1,0	003719	007437	011153	014865	018572
1	005353	010702	016046	021380	026703
2	007440	014872	022292	029691	03706
3	010040	020066	03006	04002	04992
4	013210	026393	03952	05257	06552
1,5	017001	03395	05081	06752	08404
6	021460	04284	06404	08500	10562
7	026625	05311	07932	10511	13035
8	032528	06483	09669	12790	15823
9	039190	07804	11621	15337	18920
2,0	046624	09274	13785	18147	22313
	0,	0,	0,	0,	0,

x	q = 0,6	q = 0,7	q = 0,8	q = 0,9	q = 1,0
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	05000	05000	05000	05000	05000
2	10000	10000	10000	10000	10000
3	15000	15000	15000	15000	15000
4	20000	20000	20000	19999	19999
0,5	24999	24999	24998	24998	24997
6	29996	29995	29994	29992	29990
7	3499	3499	3498	3498	3497
8	3998	3997	3996	3994	3993
9	4495	4493	4490	4488	4485
1,0	4989	4985	4980	4975	4969
1	5479	5472	5463	5454	5443
2	5964	5951	5936	5919	5900
3	6439	6418	6393	6365	6333
4	6903	6869	6829	6785	6736
1,5	7352	7300	7240	7173	7098
6	7782	7705	7617	7519	7412
7	8189	8080	7955	7818	7667
8	8568	8417	8248	8060	7855
9	8915	8714	8488	8239	7971
2,0	9228	8965	8672	8352	8011
	0,	0,	0,	0,	0,

x	q = 0,6	q = 0,7	q = 0,8	q = 0,9	q = 1,0
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	000002	000003	000003	000004	000004
2	000039	000045	000052	000058	000064
3	000195	000227	000260	000292	000325
4	000612	000714	000816	000918	001020
0,5	001483	001730	001977	002225	002472
6	003048	003555	004063	004571	005078
7	005585	006515	007445	008375	009304
8	009409	010975	012540	014103	015666
9	014855	017324	019789	022251	024709
1,0	022272	025966	029650	03332	03699
1	03201	03730	04257	04781	05303
2	04440	05170	05896	06616	07330
3	05976	06951	07916	08871	09814
4	07833	09098	10346	11572	12776
1,5	10031	11631	13197	14727	16214
6	12583	14555	16471	18324	20106
7	15491	17868	20152	22333	24401
8	18749	21550	24207	26704	29026
9	22341	25572	28588	3137	3388
2,0	26242	29894	3323	3623	3886
	0,	0,	0,	0,	0,

XIV. ФУНКЦИИ МАТЬЕ (ФУНКЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА)

1. Определения и обозначения

1.1. *Функциями Матье (функциями эллиптического цилиндра)* в общем случае называются решения дифференциального уравнения Матье

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha - 4q \cos 2z) w = 0.$$

В узком смысле под (периодическими) функциями Матье $\varphi_m(z, q)$ понимают периодические решения этого уравнения с периодом 2π .

Не для каждой пары значений α, q уравнение Матье имеет периодическое решение периода 2π . Однако для каждого действительного значения параметра q

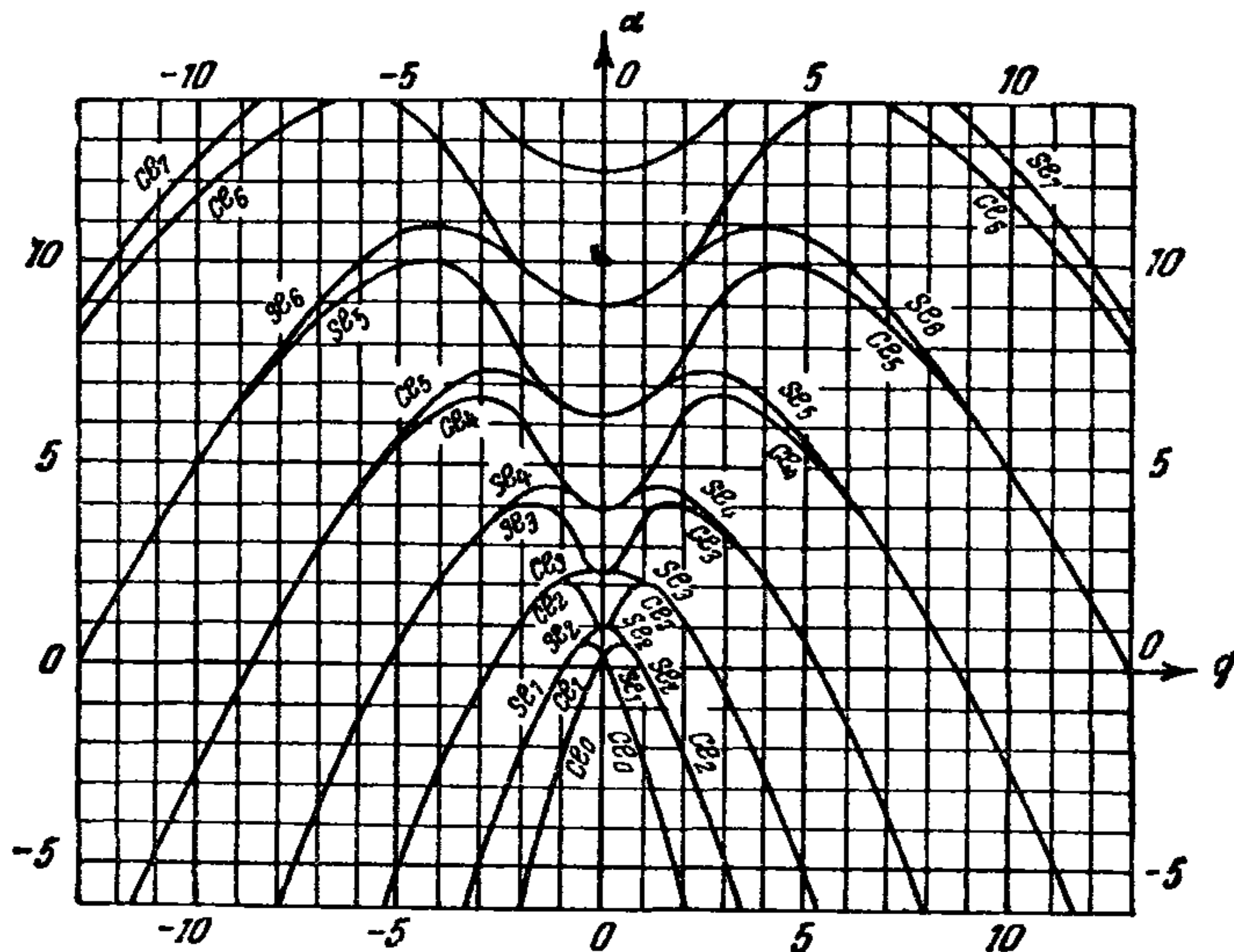


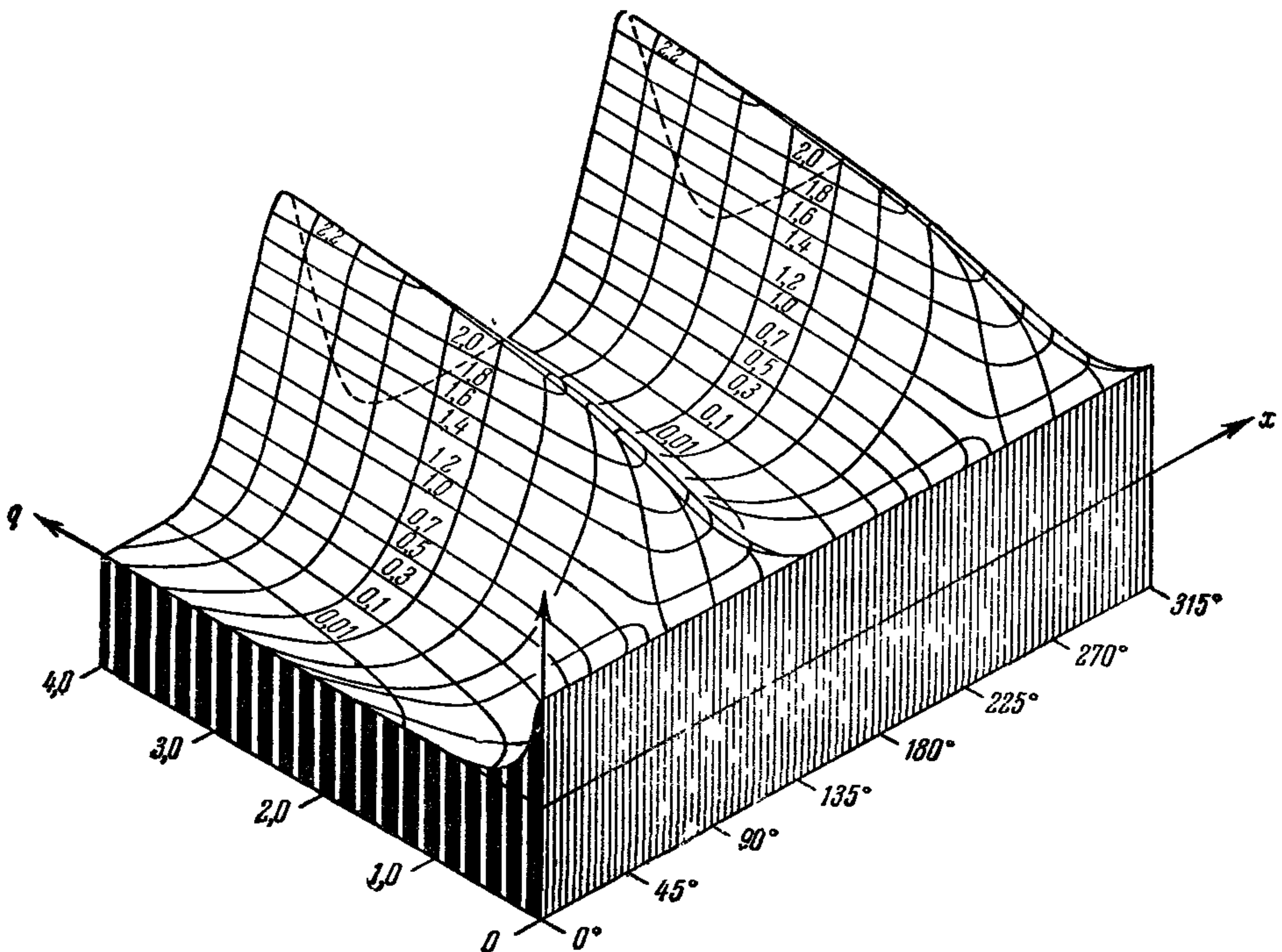
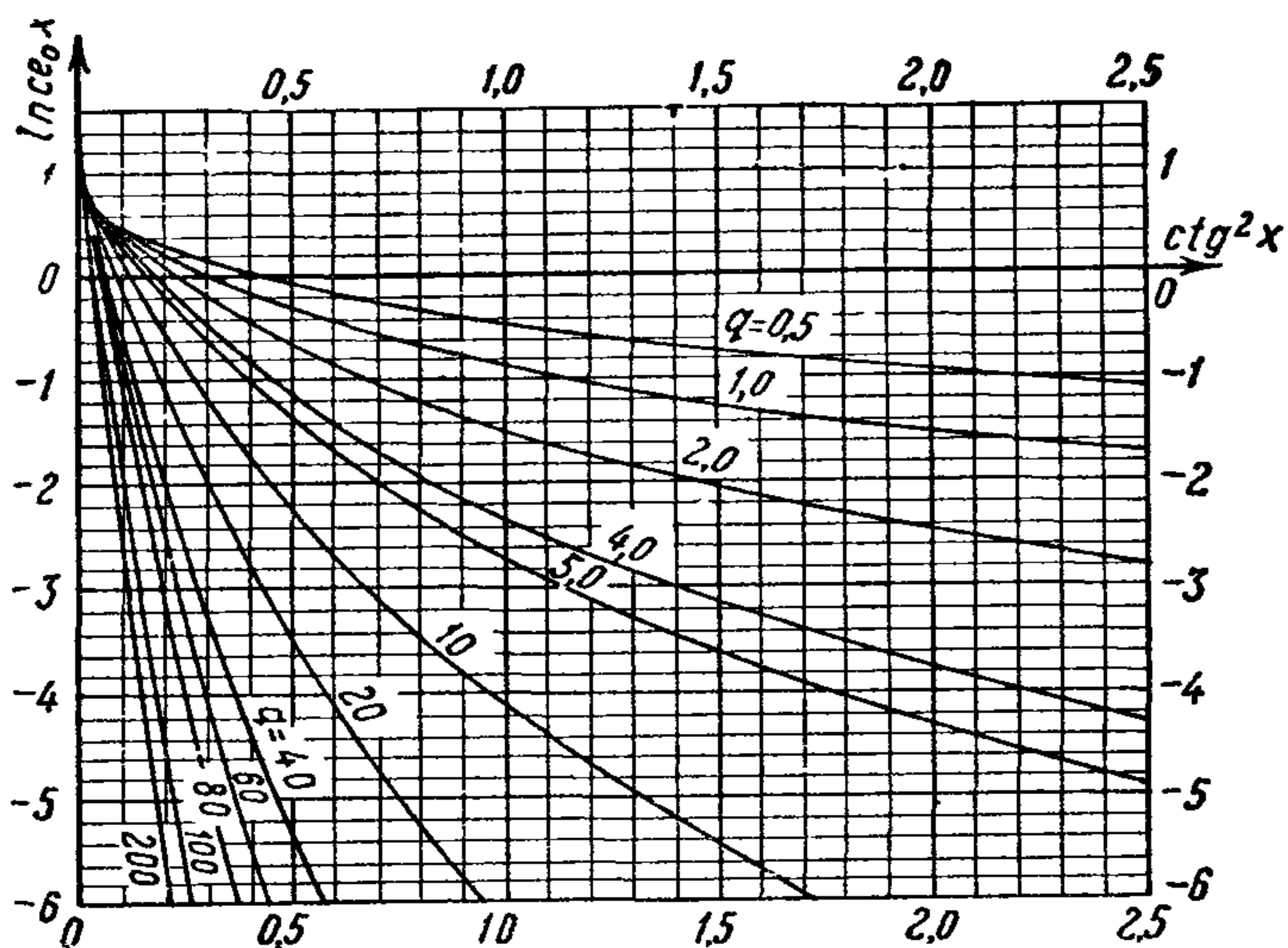
Рис 175 Собственные значения параметра α как функции q

существует бесконечная последовательность «собственных значений» параметра α (рис 175), для которых такое решение есть, и оно определяется при $q \neq 0$ с точностью до постоянного множителя. Эти функции $\varphi_m(z, q)$ все являются целыми функциями от z и действительны для действительных значений аргумента $z = x$.

1.2. Функции Матье в зависимости от приводимых ниже свойств разделяются на четыре класса, причем для этих функций и соответствующих собственных значений параметра α обычно употребляют обозначения

$$\begin{array}{ccccccc} ce_{2n}(z, q), & se_{2n+1}(z, q), & ce_{2n+1}(z, q), & se_{2n+2}(z, q), & n=0, 1, 2, \dots \\ \alpha_{2n}, & \beta_{2n+1}, & \alpha_{2n+1}, & \beta_{2n+2}, \end{array}$$

Если эти функции рассматривают как функции только аргумента z при постоянном значении параметра q , то пишут короче $ce_{2n}(z)$, $se_{2n+1}(z)$, ... (рис 176—187).

Рис 176. Поверхность функции Матье $se_0(x, q)$ над плоскостью x, q .Рис. 177 Функция $se_0(x, q)$ как функция $ctg^2 x$ при x , близких к 90° .

Имеют место следующие соотношения (рис. 188):

$$\begin{aligned}
 se_m(z) &= se_m(-z), & se_m(z) &= -se_m(-z), \\
 se_m(k\pi + z) &= +se_m(k\pi - z), & se_m(k\pi + z) &= -se_m(k\pi - z), \quad k - \text{целое}, \\
 se_m(\pi/2 + z) &= (-1)^m se_m(\pi/2 - z), & se_m(\pi/2 + z) &= (-1)^{m+1} se_m(\pi/2 - z), \\
 \psi_m(z + \pi) &= (-1)^m \psi_m(z).
 \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно определить функции Матье в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}$.

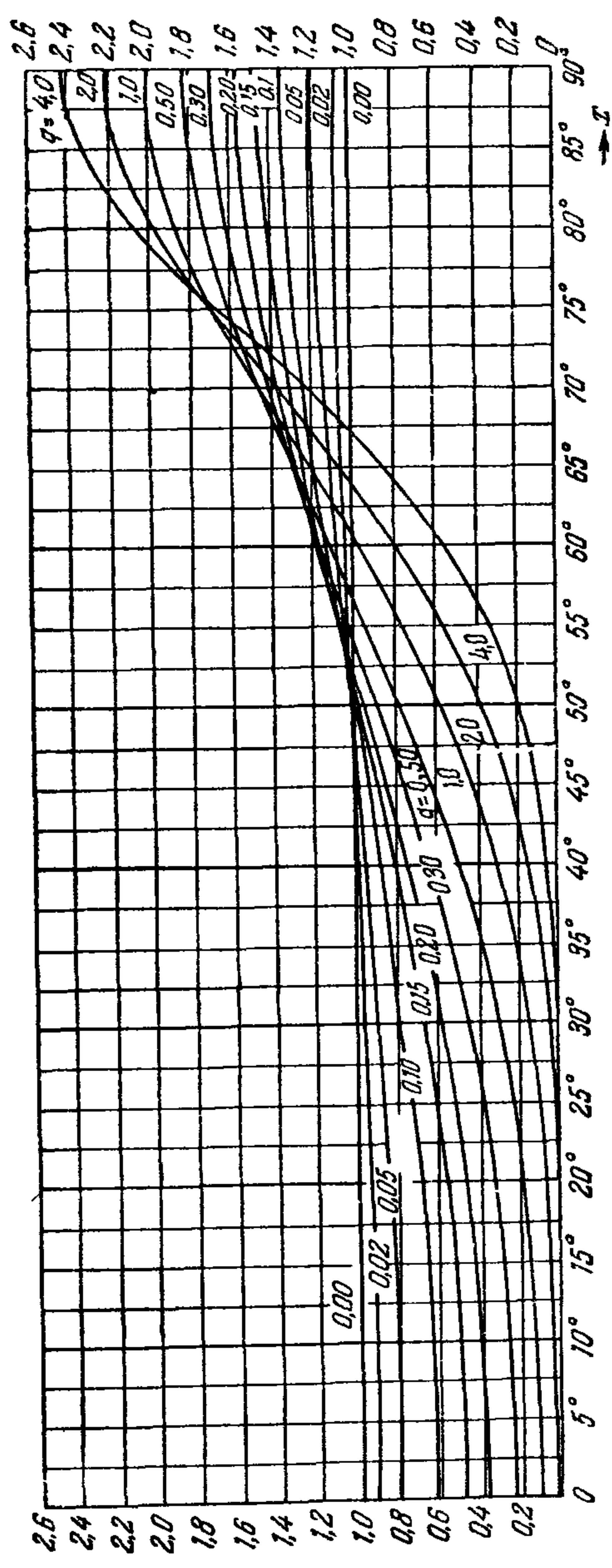


Рис. 178. Функция Матъе $se_0(x, q)$.

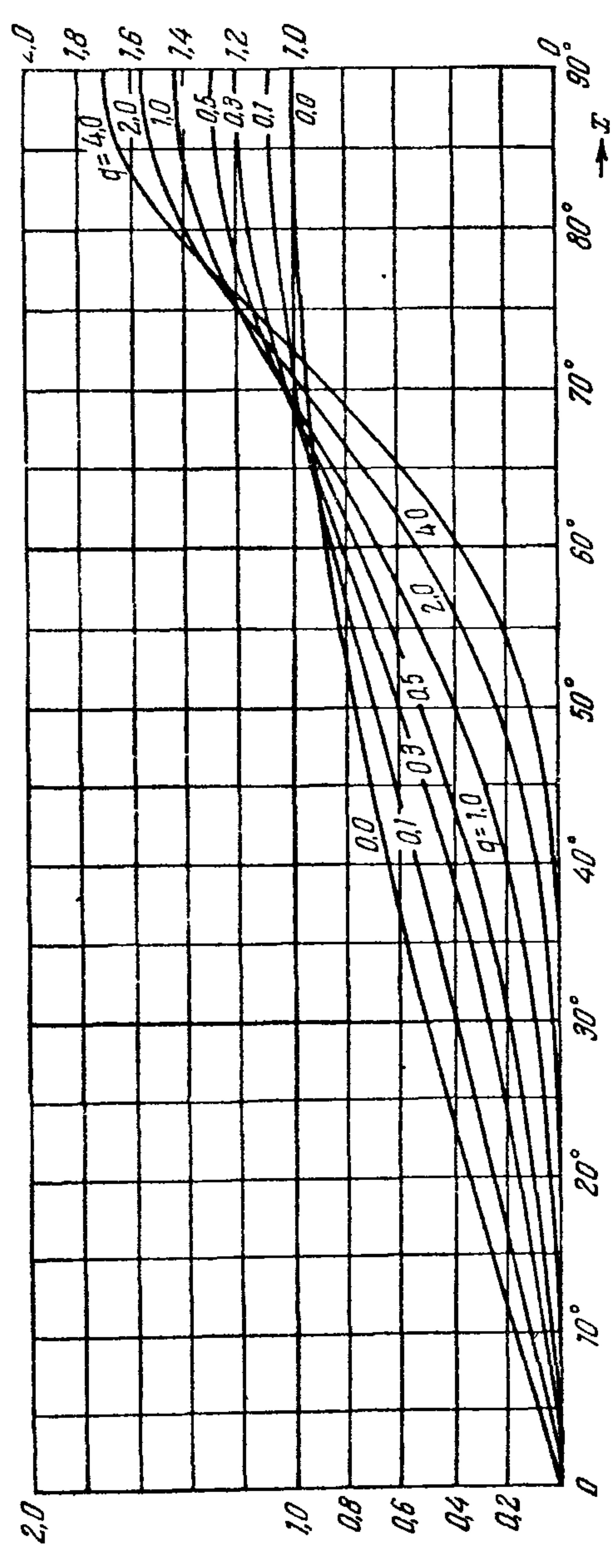
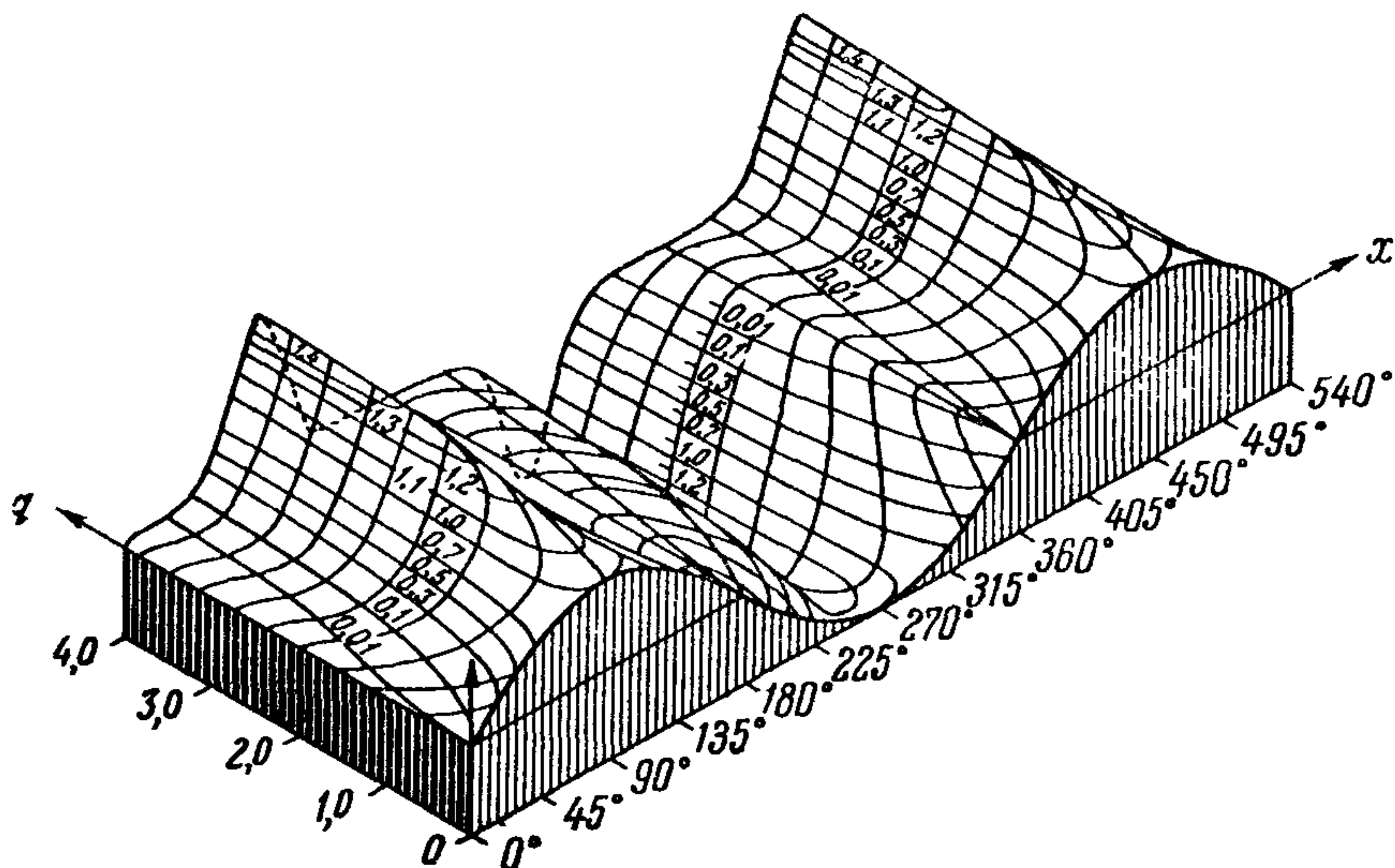
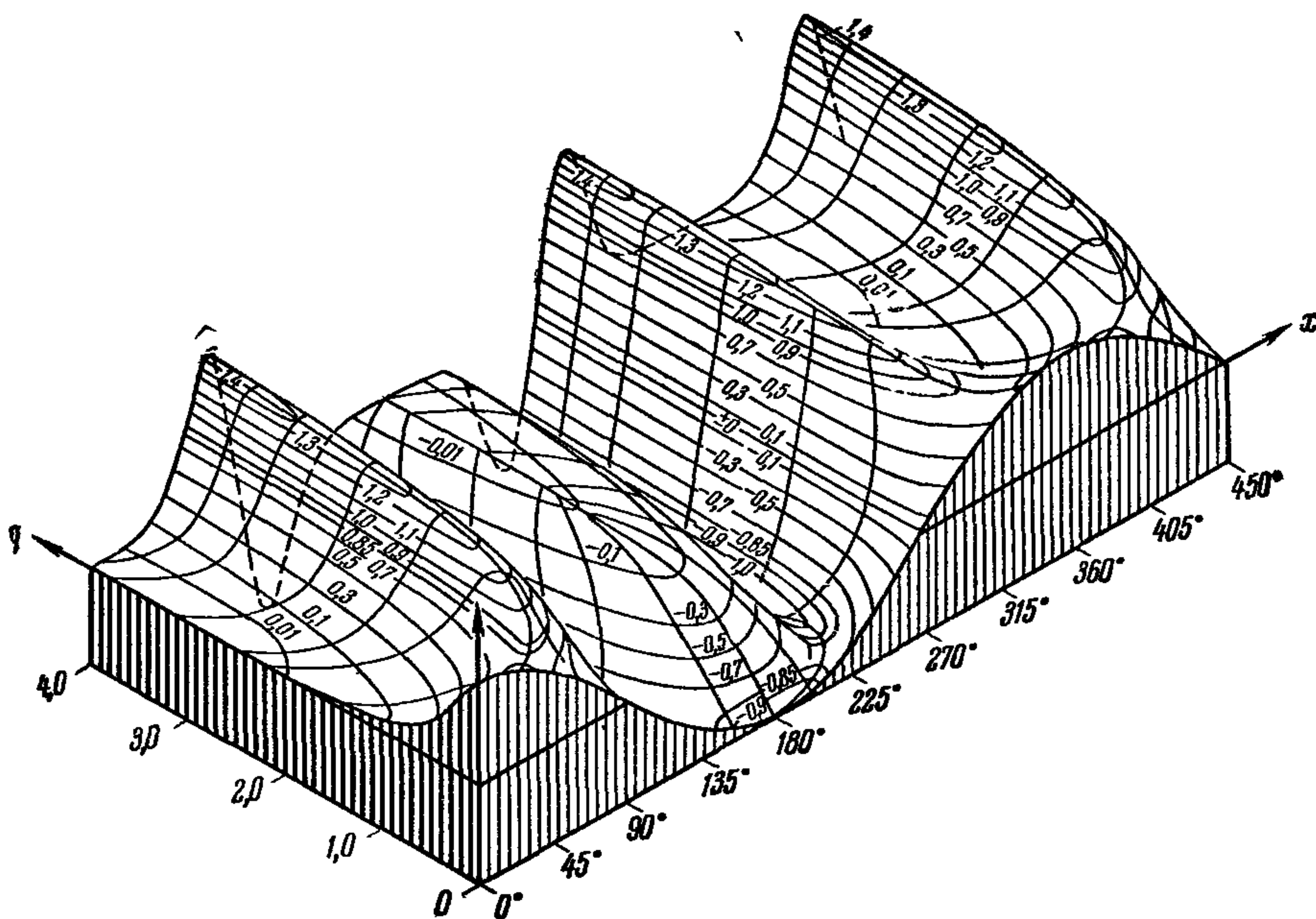


Рис. 179 Функция Матъе $se_1(x, q)$.

Рис. 180. Поверхность функции Матье $se_1(r, q)$ над плоскостью x, q .Рис. 181. Поверхность функции Матье $se_1(x, q)$ над плоскостью x, q .

Нормировка функций производится таким образом, чтобы

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_m^2(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } m=0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } m=1, 2, \dots, \end{cases}$$

чтобы при $z = \frac{\pi}{2}$ следующие выражения были положительны:

$$(-1)^n se_{2n}(z), \quad (-1)^n se_{2n+1}(z), \quad (-1)^n \frac{se_{2n+1}(z)}{\cos z}, \quad (-1)^{n-1} \frac{se_{2n}(z)}{\cos z}.$$

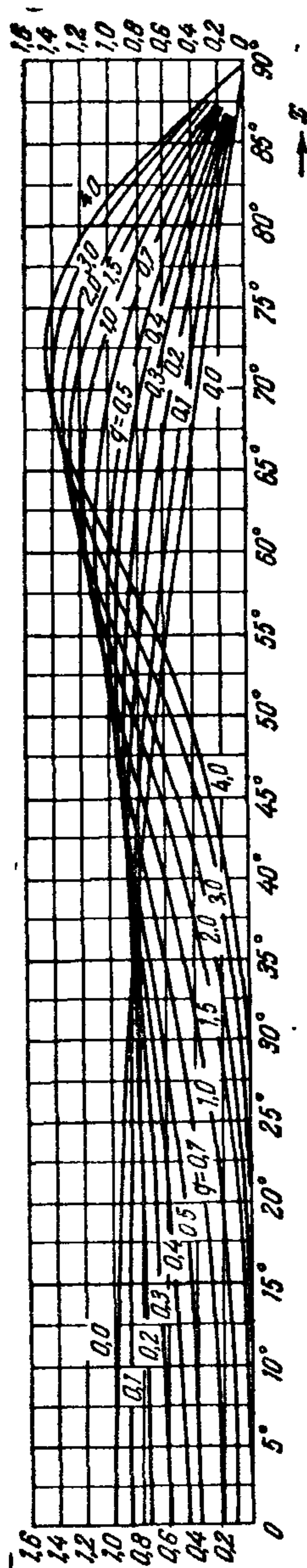


Рис. 182. Функция Матъе $se_1(x, q)$.

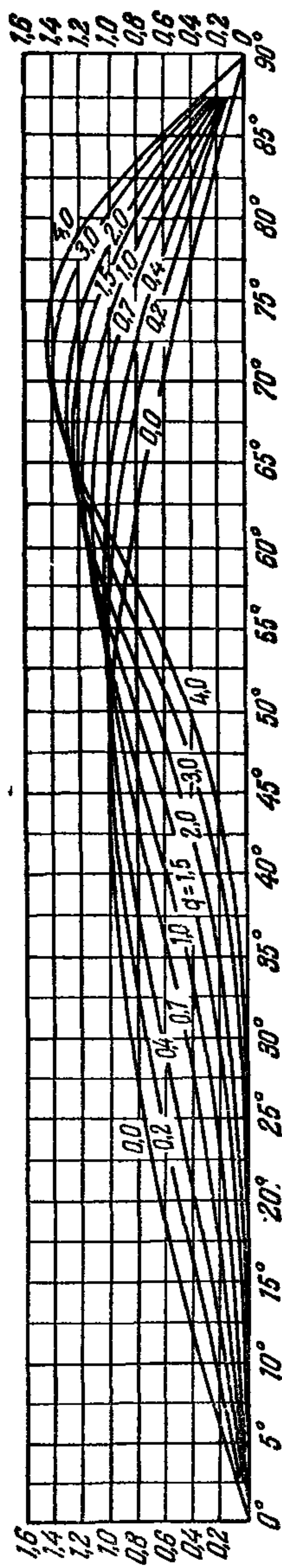


Рис. 183. Функция Матъе $se_2(x, q)$.

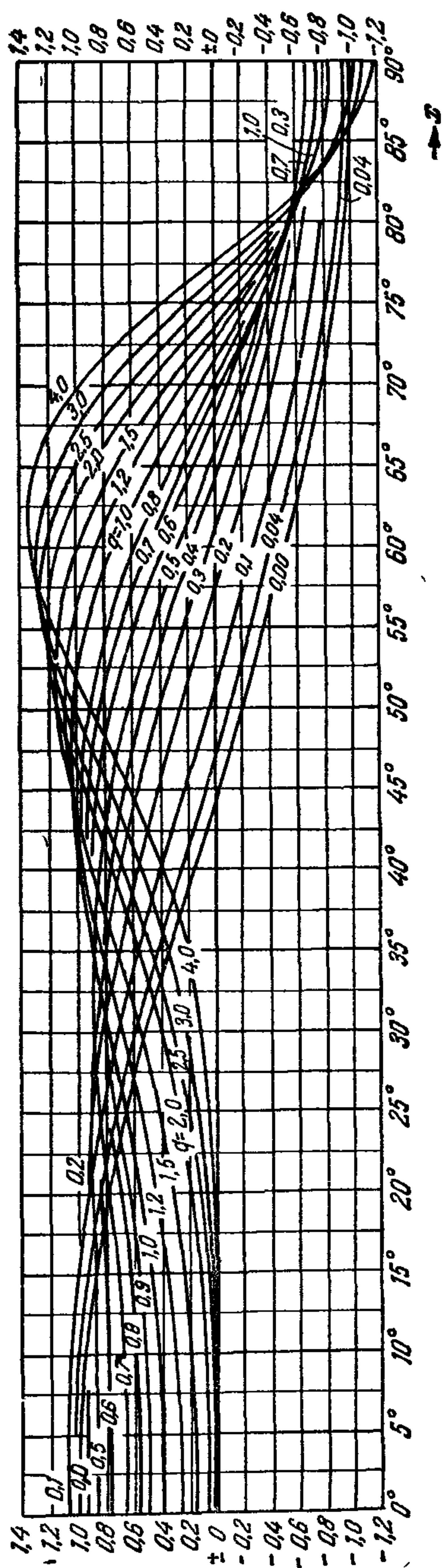


Рис. 184. Функция Матъе $se_3(x, q)$.

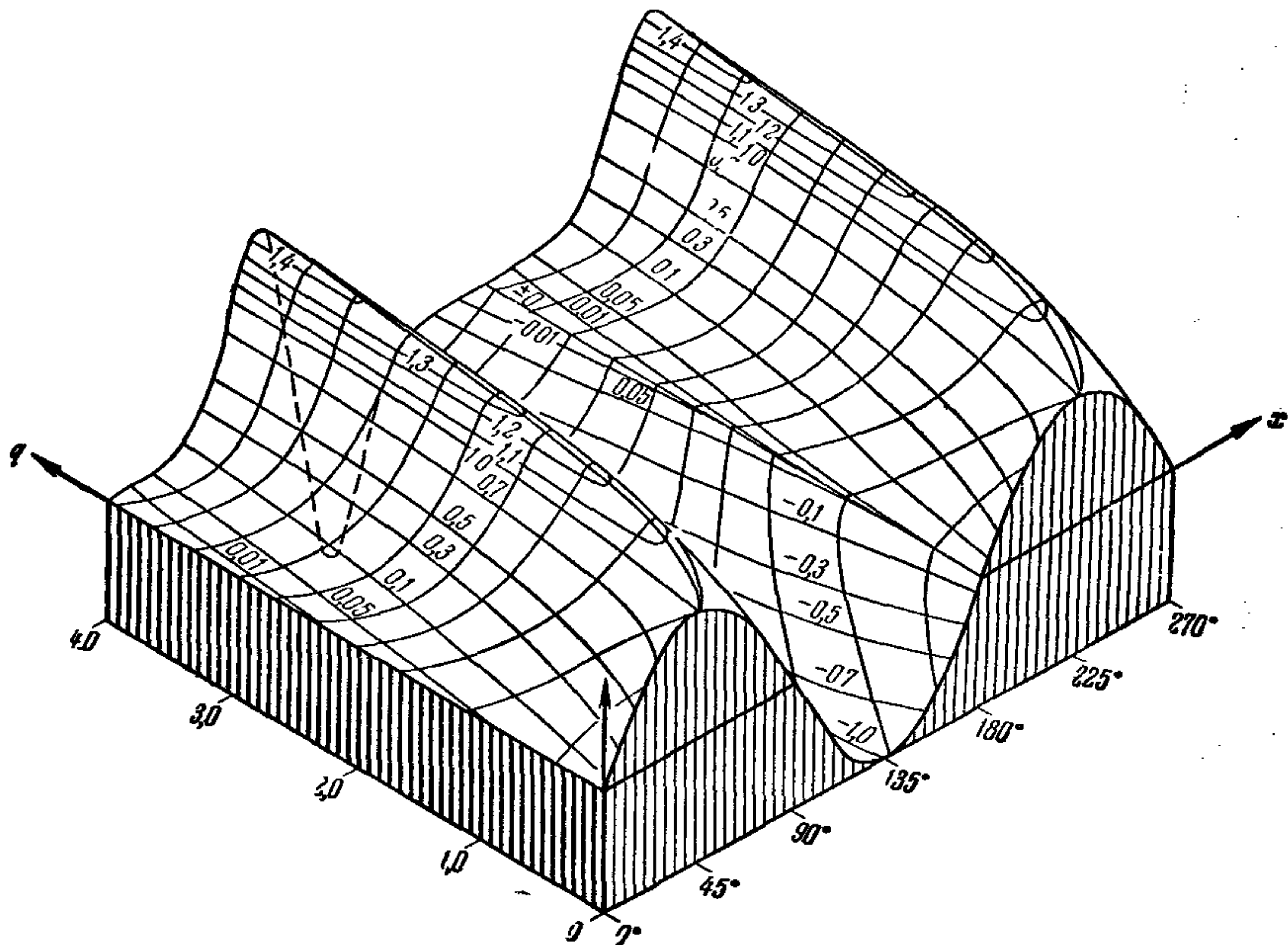


Рис 185 Поверхность функции Матъе $se_2(x, q)$ над плоскостью x, q .

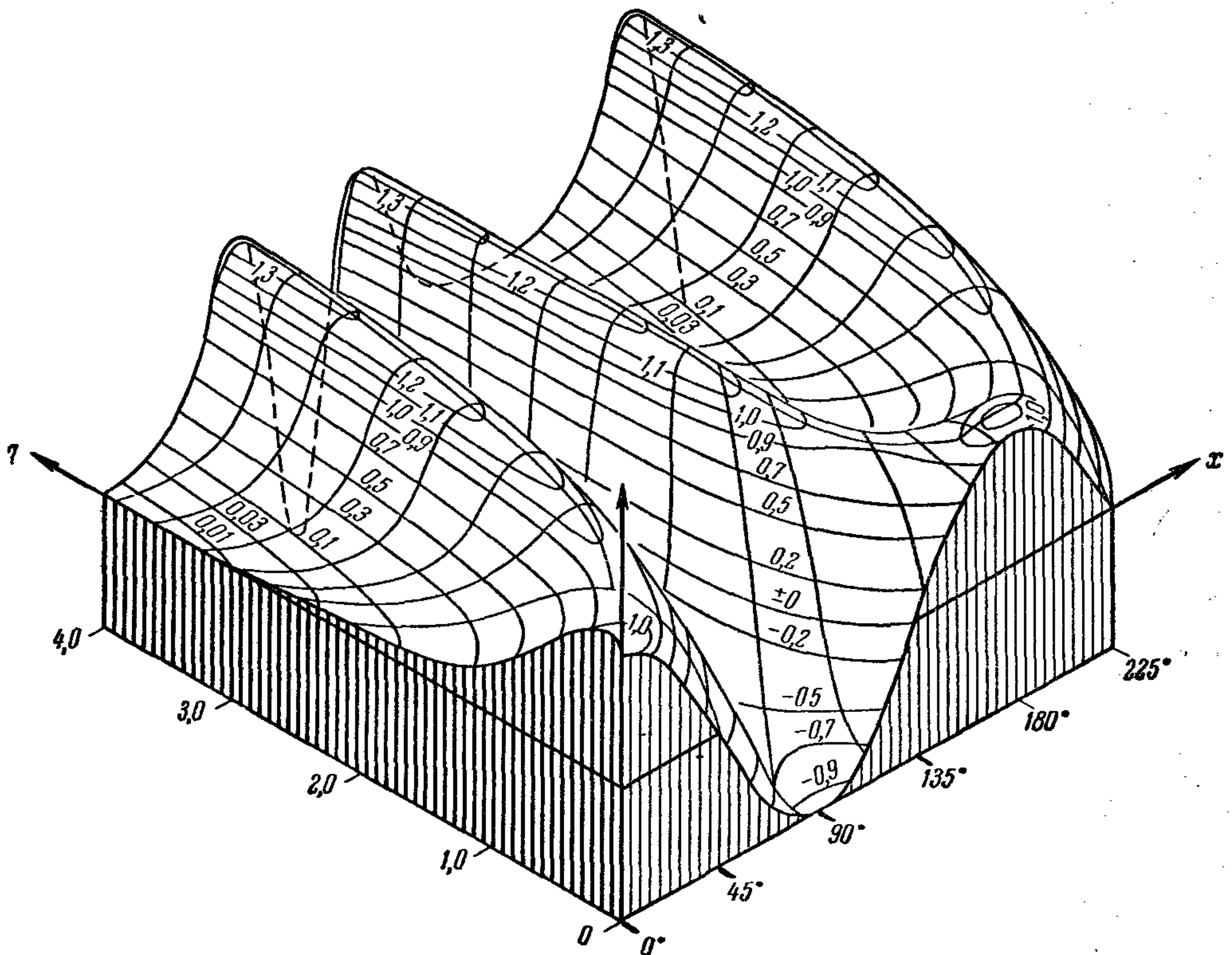


Рис. 186. Поверхность функции Матъе $se_2(x, q)$ над плоскостью x, q .

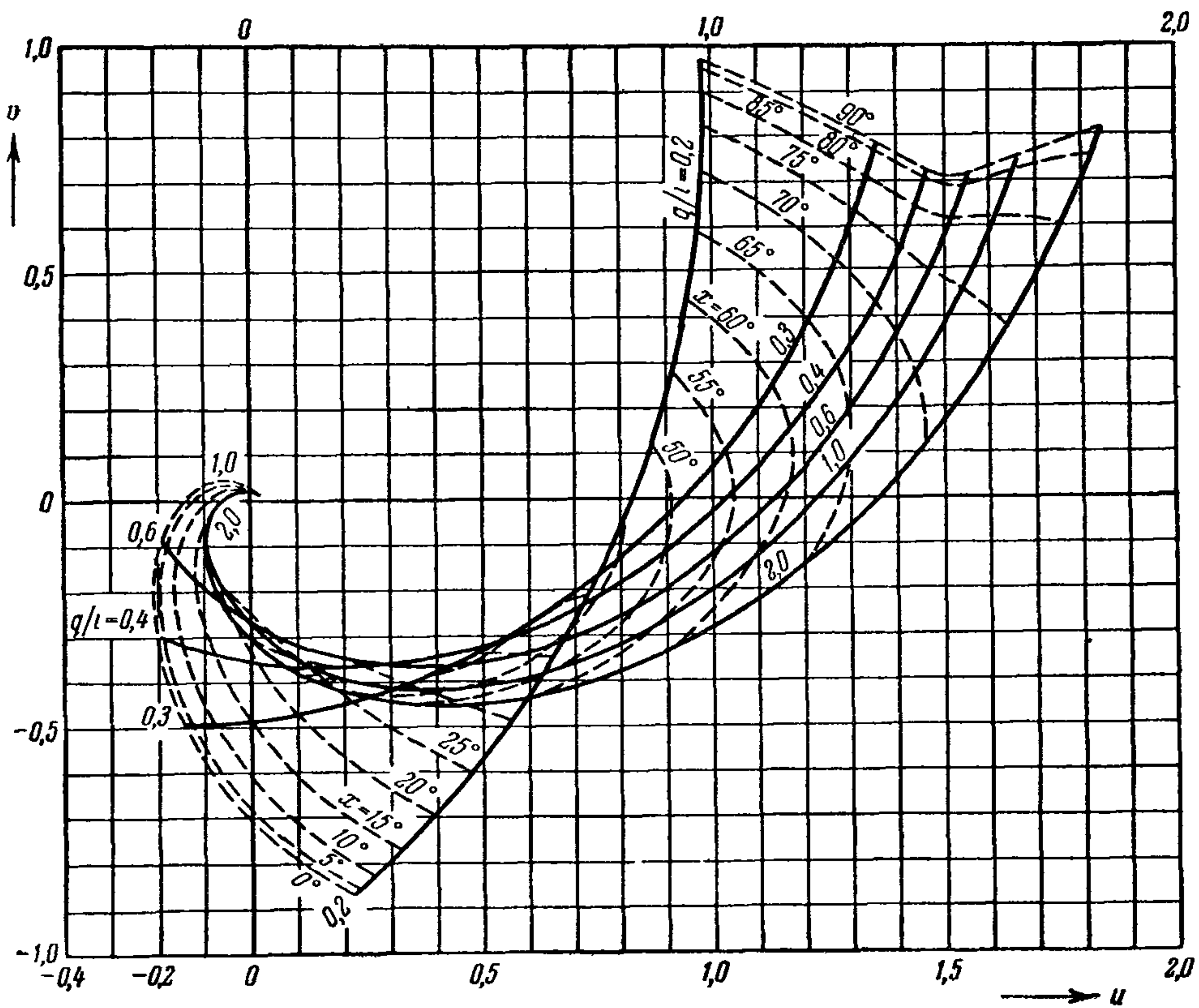


Рис. 187. Функция $se_0(x, q) = u + iv$ при чисто мнимом q .

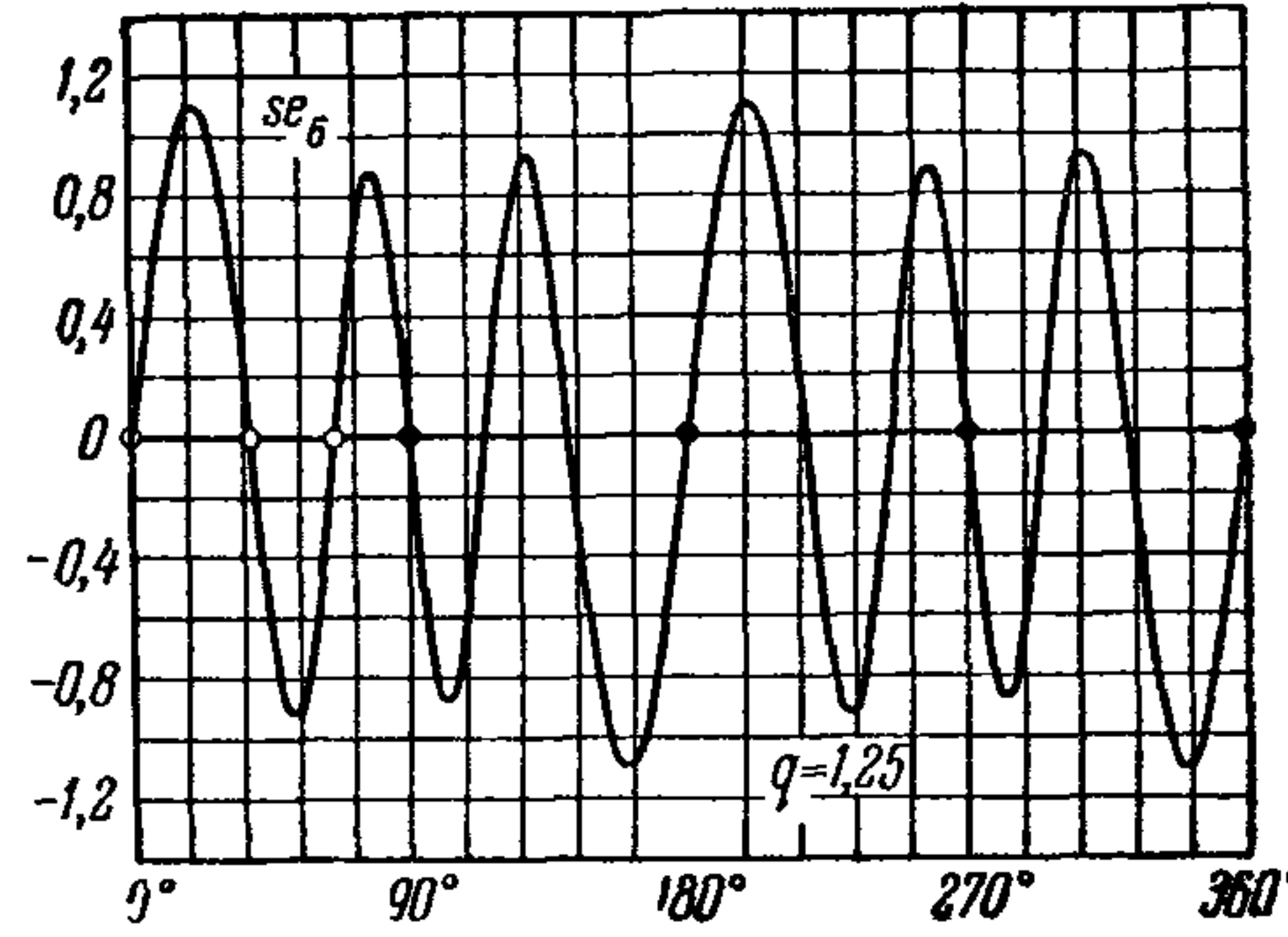
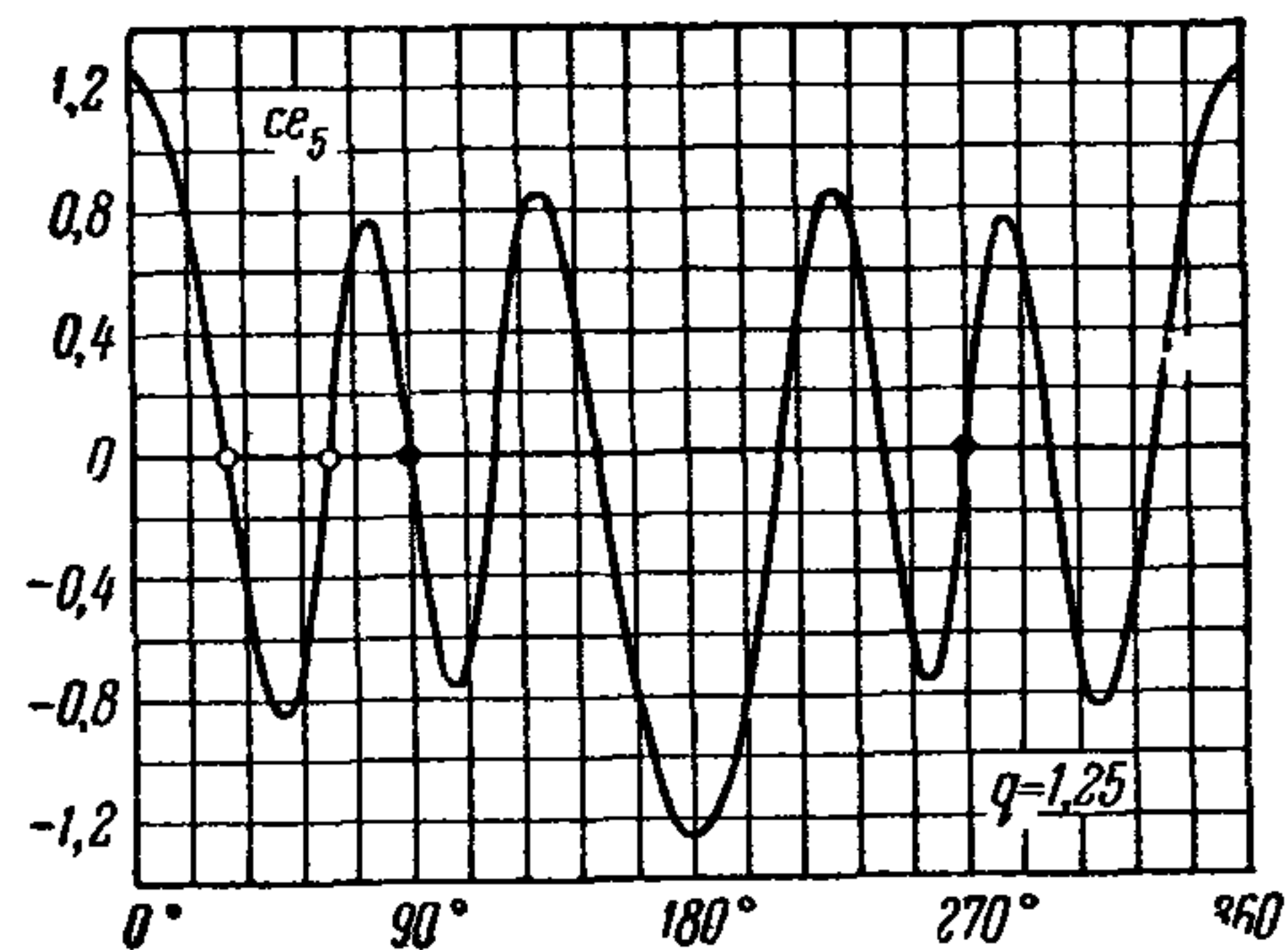
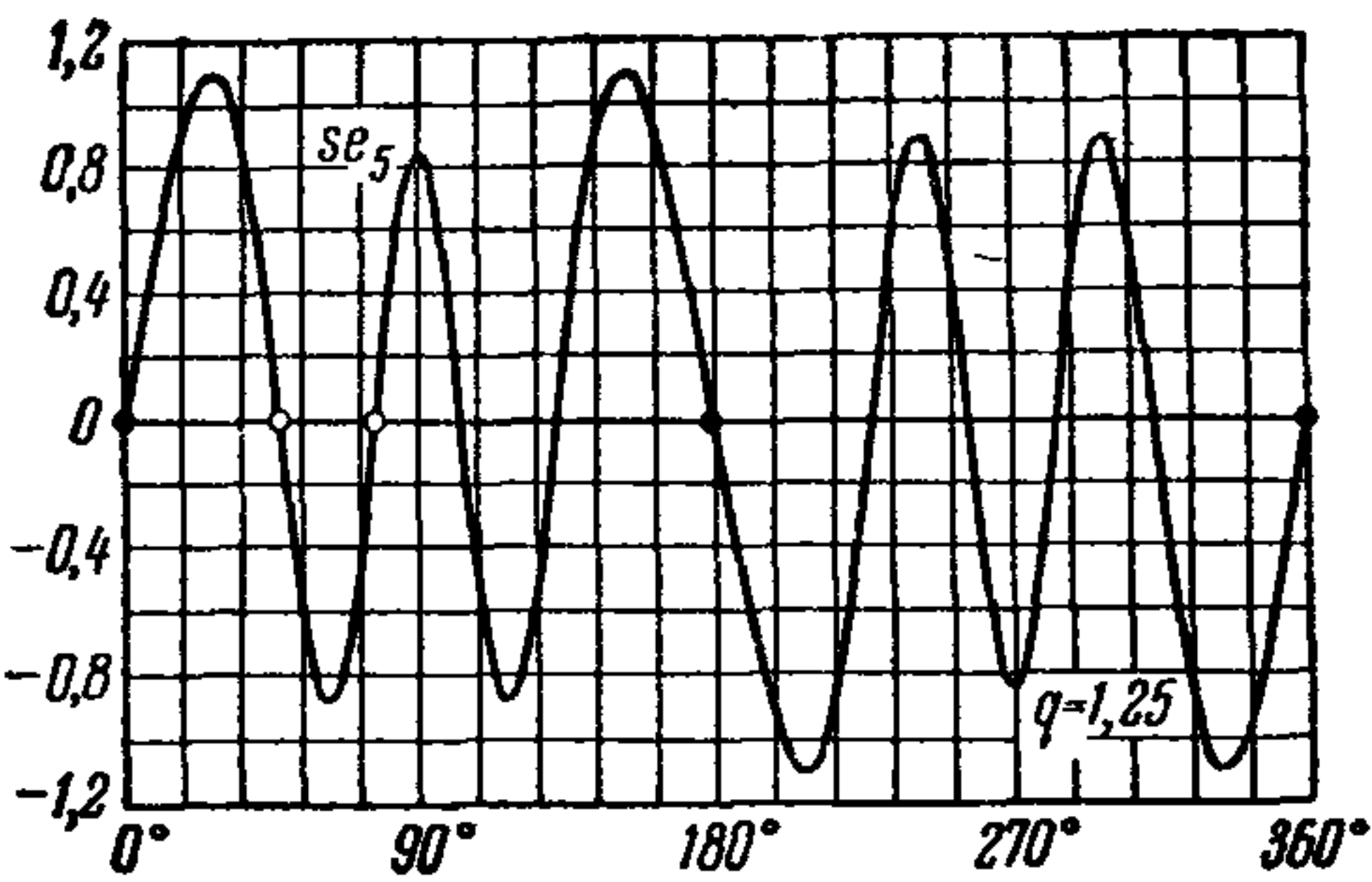
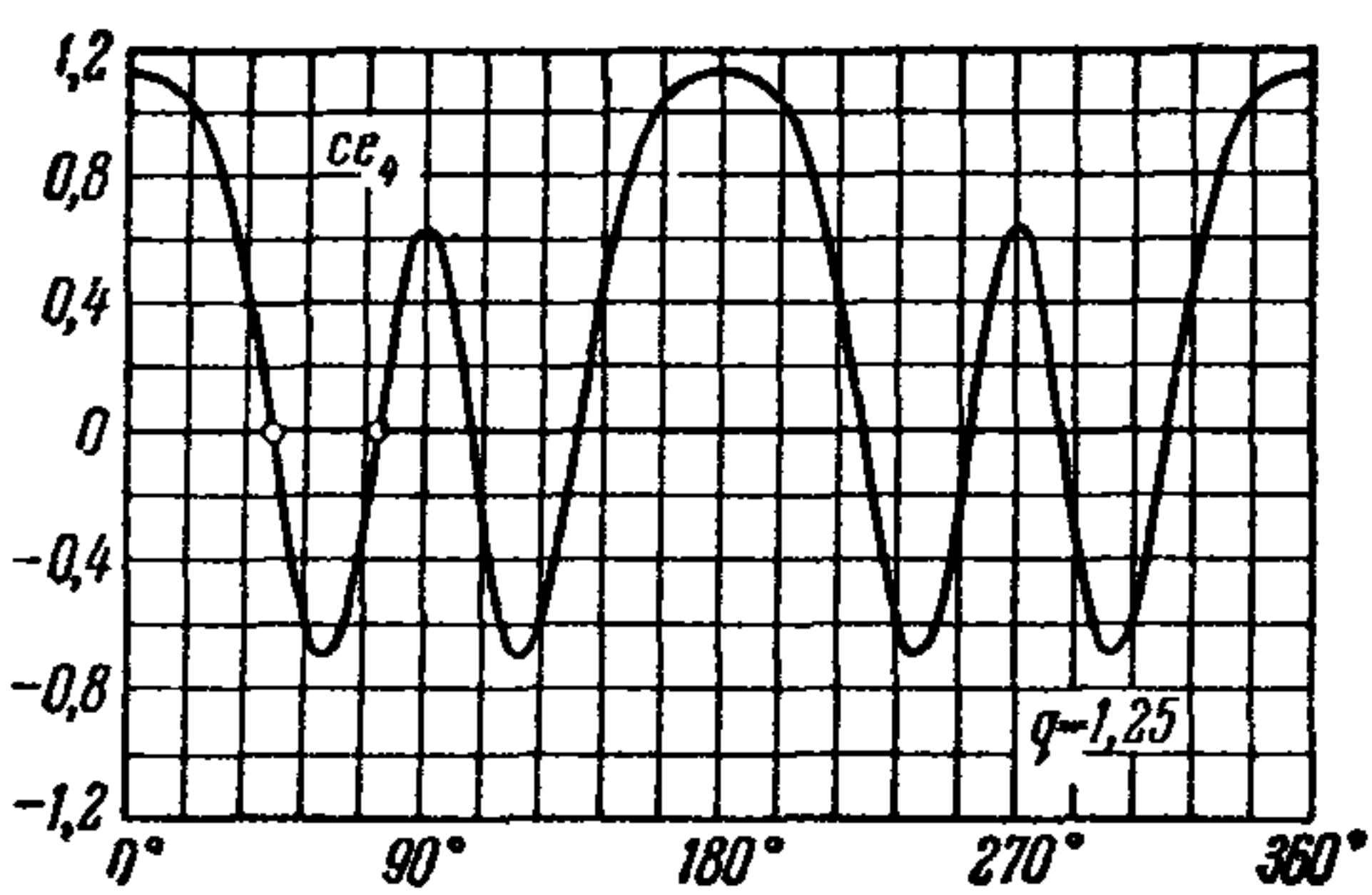


Рис. 188. Симметрия функций Маттье.

На каждом действительном интервале длины 2π произведение двух различных функций Матье, соответствующих одному и тому же значению параметра q , имеет среднее значение нуль.

В предположениях, сделанных выше, при $q \rightarrow 0$ имеем:

$$4\alpha_m \rightarrow m^2, \quad 4\beta_m \rightarrow m^2 \quad (m=0, 1, 2, \dots),$$

$$ce_0(z, q) \rightarrow 1, \quad ce_m(z, q) \rightarrow \cos mz, \quad se_m(z, q) \rightarrow \sin mz \quad (m=1, 2, \dots).$$

2. Представления для собственных значений

Если заменить z на $\pi/2 - z$ и q на $-q$, то дифференциальное уравнение Матье не изменится и для значения параметра $-q$ получаем решения:

$$ce_{2n}(z, -q) = (-1)^n ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right), \quad ce_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right),$$

$$se_{2n}(z, -q) = (-1)^n se_{2n}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right), \quad se_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n ce_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right).$$

Таким образом, достаточно вычислить функции для положительных значений q .

Представления для первых собственных значений при малых q таковы:

$$4\alpha_0 = -2^5 q^2 + 2^5 \cdot 7 q^4 - 2^{10} \cdot \frac{29}{9} q^6 + \dots, \quad 4\beta_1 = 1 \mp 8q - 8q^2 \pm 8q^3 - \frac{8}{3} q^4 \mp \dots,$$

$$4\beta_2 = 4 - \frac{16}{3} q^2 + \frac{2^3 \cdot 5}{3^3} q^4 - \dots, \quad 4\alpha_2 = 4 + \frac{80}{3} q^2 - \frac{2^3 \cdot 7}{3^3} \cdot 109 \cdot q^4 + \dots,$$

$$4\beta_3 = 9 + 4q^2 \mp 8q^3 + \frac{13}{5} q^4 + \dots,$$

$$4\beta_4 = 16 + \frac{2^5}{15} q^2 + \frac{2^4 \cdot 317}{3^3 \cdot 5^3} q^4 + \dots, \quad 4\alpha_4 = 16 + \frac{2^5}{15} q^2 + \frac{2^4 \cdot 433}{3^3 \cdot 5^3} q^4 - \dots$$

Если число $n = 2\nu - 1$ нечетно, то приближенные значения для собственных значений $\alpha_{\nu-1}$ и β_ν при больших q (для $q > n^2/8$) получают из выражений

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_{\nu-1} \\ -\beta_\nu \end{aligned} \right\} \approx 4q - n\sqrt{2q} + \frac{n^2+1}{2^5} + \frac{n}{2^{10}} \frac{n^2+3}{\sqrt{2q}} + \frac{5n^4+34n^2+9}{2^{17}q} + n \frac{33n^4+410n^2+405}{2^{23}q\sqrt{2q}} +$$

$$+ \frac{63n^6+1260n^4+2943n^2+486}{2^{28}q^2} + n \frac{2108n^6+62468n^4+276004n^2+166428}{2^{34}q^2\sqrt{2q}} + \dots$$

При больших положительных q четырем функциям

$$ce_{2n-1}(z, q), \quad se_{2n-1}(z, -q), \quad se_{2n}(z, q), \quad ce_{2n}(z, -q)$$

принадлежит почти одно и то же значение α ; это же утверждение справедливо для четырех функций

$$ce_{2n}(z, q), \quad ce_{2n}(z, -q), \quad se_{2n+1}(z, q), \quad ce_{2n+1}(z, -q).$$

Для функций ce_n и se_n имеется $\alpha = 0$ при следующих значениях q :

$$\begin{array}{cccc} n = & 0 & 1 & 2 & n \text{ велико} \\ q \approx & 0,11 & 0,94 & 2,66 & 0,109(2n+1)^2 \end{array}$$

3. Разложение в ряды Фурье

Справедливы следующие разложения в ряды Фурье:

$$ce_{2n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n, 2r} \cos 2rx, \quad ce_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n+1, 2r+1} \cos (2r+1)x,$$

$$se_{2n}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2n, 2r} \sin 2rx, \quad se_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2n+1, 2r+1} \sin (2r+1)x.$$

Ряды сходятся тем слабее, чем больше q . Для коэффициентов A, B справедливы следующие рекуррентные формулы:

а) для $se_{2n}(x)$:

$$\begin{aligned} -\alpha A_{2n,0} + 2qA_{2n,2} &= 0, \\ 4qA_{2n,0} + (1-\alpha)A_{2n,2} + 2qA_{2n,4} &= 0, \\ 2qA_{2n,2r-2} + (r^2 - \alpha)A_{2n,2r} + 2qA_{2n,2r+2} &= 0 \quad (r > 1); \end{aligned}$$

б) для $se_{2n}(x)$:

$$\begin{aligned} (1-\alpha)B_{2n,2} + 2qB_{2n,4} &= 0, \\ 2qB_{2n,2r-2} + (r^2 - \alpha)B_{2n,2r} + 2qB_{2n,2r+2} &= 0 \quad (r > 1); \end{aligned}$$

с) для $se_{2n+1}(x)$:

$$\begin{aligned} 2qA_{2n+1,1} + \left(\frac{1}{4} - \alpha\right)A_{2n+1,1} + 2qA_{2n+1,3} &= 0, \\ 2qA_{2n+1,2r-1} + \left[\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha\right]A_{2n+1,2r+1} + 2qA_{2n+1,2r+3} &= 0 \quad (r > 0); \end{aligned}$$

д) для $se_{2n+1}(x)$:

$$\begin{aligned} -2qB_{2n+1,1} + \left(\frac{1}{4} - \alpha\right)B_{2n+1,1} + 2qB_{2n+1,3} &= 0, \\ 2qB_{2n+1,2r-1} + \left[\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha\right]B_{2n+1,2r+1} + 2qB_{2n+1,2r+3} &= 0 \quad (r > 0). \end{aligned}$$

Из условия нормировки следует при любом q , любом номере функции и любом первом индексе:

$$2A_0^2 + A_2^2 + A_4^2 + \dots = B_2^2 + B_4^2 + \dots = A_1^2 + A_3^2 + \dots = B_1^2 + B_3^2 + \dots = 1;$$

для $se_0(x)$ первая сумма равна 2.

4. Нули

$$se_0(x) > 0; se_{2n}k\frac{\pi}{2} = se_{2n+1}k\pi = se_{2n+1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi = 0 \quad (k - \text{целое}).$$

Каждая из четырех функций

$$se_{2n}(x), \quad se_{2n+1}(x), \quad se_{2n+1}(x), \quad se_{2n+2}(x)$$

имеет n действительных нулей строго между $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$; эти нули приближаются к $\frac{\pi}{2}$ при возрастании q .

5. Функциональные уравнения. Присоединенные функции Матье

Функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

$$\varphi(z) = \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} e^{4V_{2q} \sin z \sin t} \varphi(t) dt.$$

Если в дифференциальном уравнении Матье сделать замену независимой переменной $t=t(z)$, то получим:

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{d^2 t}{dz^2} \cdot \frac{dw}{dt} + 4(\alpha - 4q \cos 2z)w = 0.$$

В частности,

$$t = \cos 2z: \quad (1 - t^2) \frac{d^2 w}{dt^2} - t \frac{dw}{dt} + (\alpha - 4qt) w = 0,$$

$$t = e^{iz}: \quad t^2 \frac{d^2 w}{dt^2} + t \frac{dw}{dt} + \left[-\alpha + 2q \left(t + \frac{1}{t} \right) \right] w = 0,$$

$$t = \cos^2 z: \quad t(1 - t) \frac{d^2 w}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - t \right) \frac{dw}{dt} + (\alpha + 4q - 8qt) w = 0.$$

Если положить $t = \pm iz$, то функции

$$w = \varphi_m(\pm it, k)$$

будут решениями дифференциального уравнения

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 w}{dt^2} - (\alpha - 4q \operatorname{ch} 2t) w = 0.$$

Полученные таким образом функции

$$\operatorname{Ce}_{2n}(z) = \operatorname{ce}_{2n}(iz),$$

$$\operatorname{Ce}_{2n+1}(z) = \operatorname{ce}_{2n+1}(iz),$$

$$\operatorname{Se}_{2n+1}(z) = -i \operatorname{se}_{2n+1}(iz),$$

$$\operatorname{Se}_{2n+2}(z) = -i \operatorname{se}_{2n+2}(iz)$$

называются *присоединенными функциями Матье*. Они действительны для действительных значений аргумента $z = x$.

О функциях Матье с чисто мнимым q см. рис. 189—191.

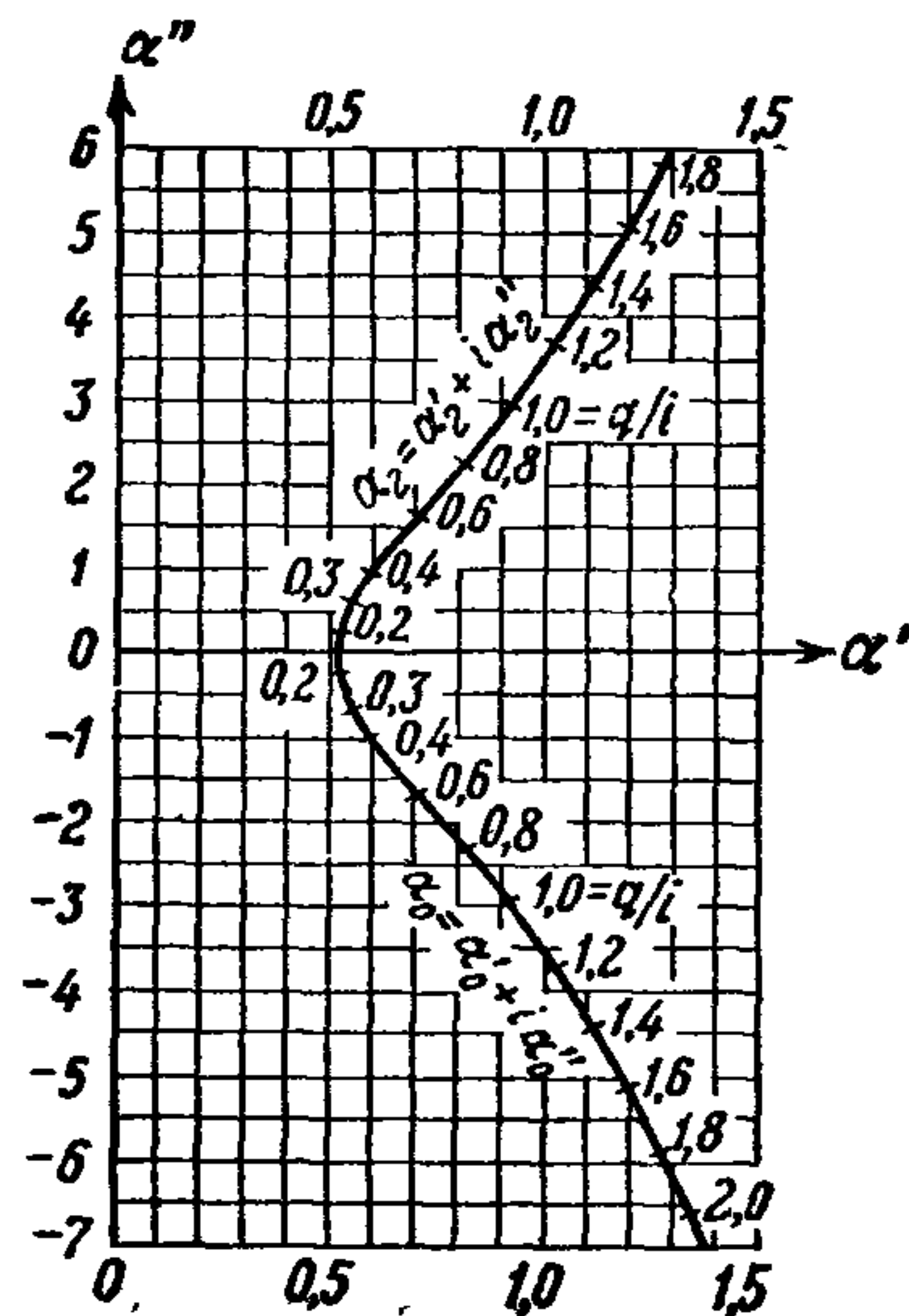


Рис. 189. Параметр $\alpha_n = \alpha'_n + \alpha''_n i$, $n=0, 2$, при q чисто мнимом.

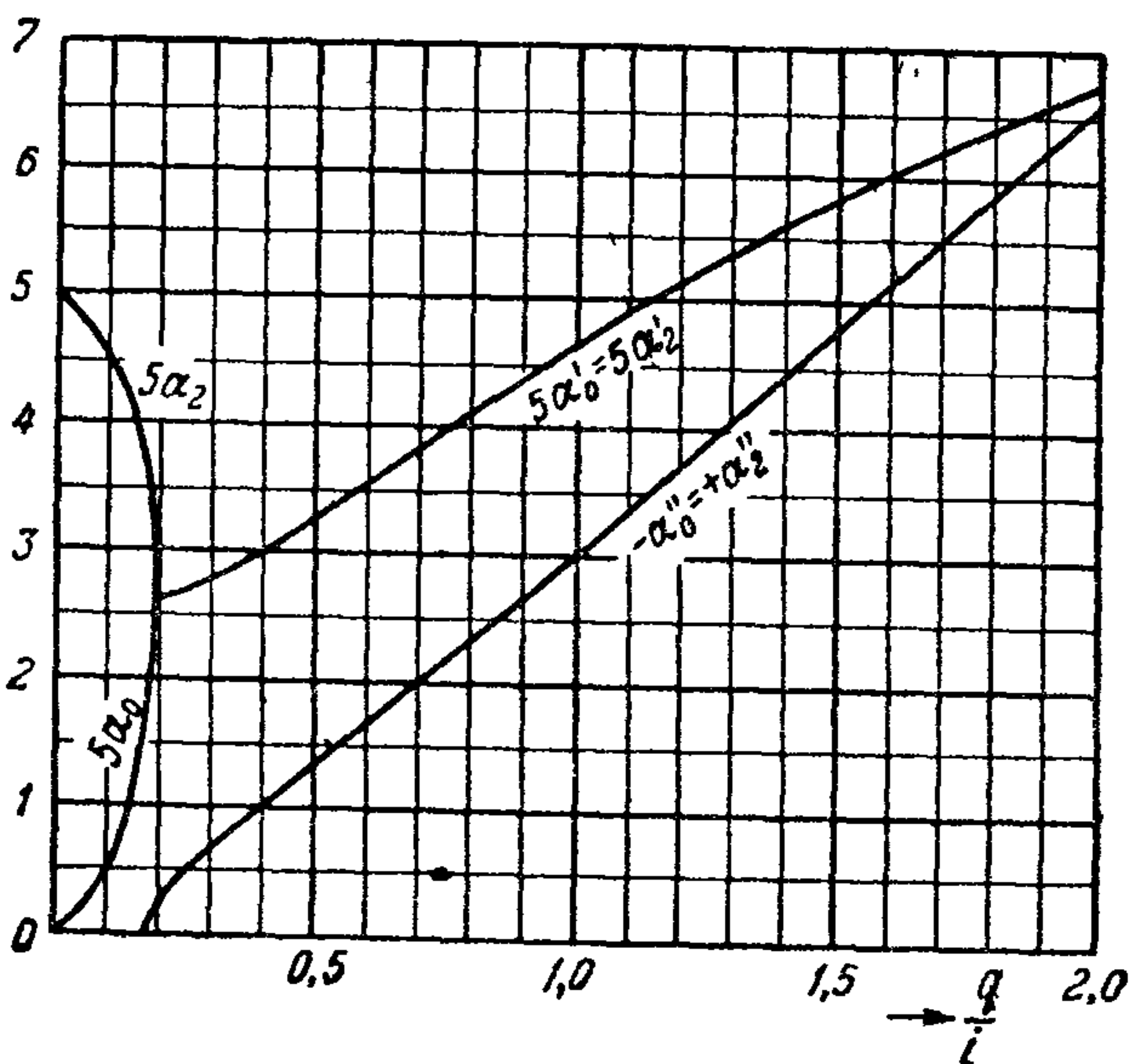
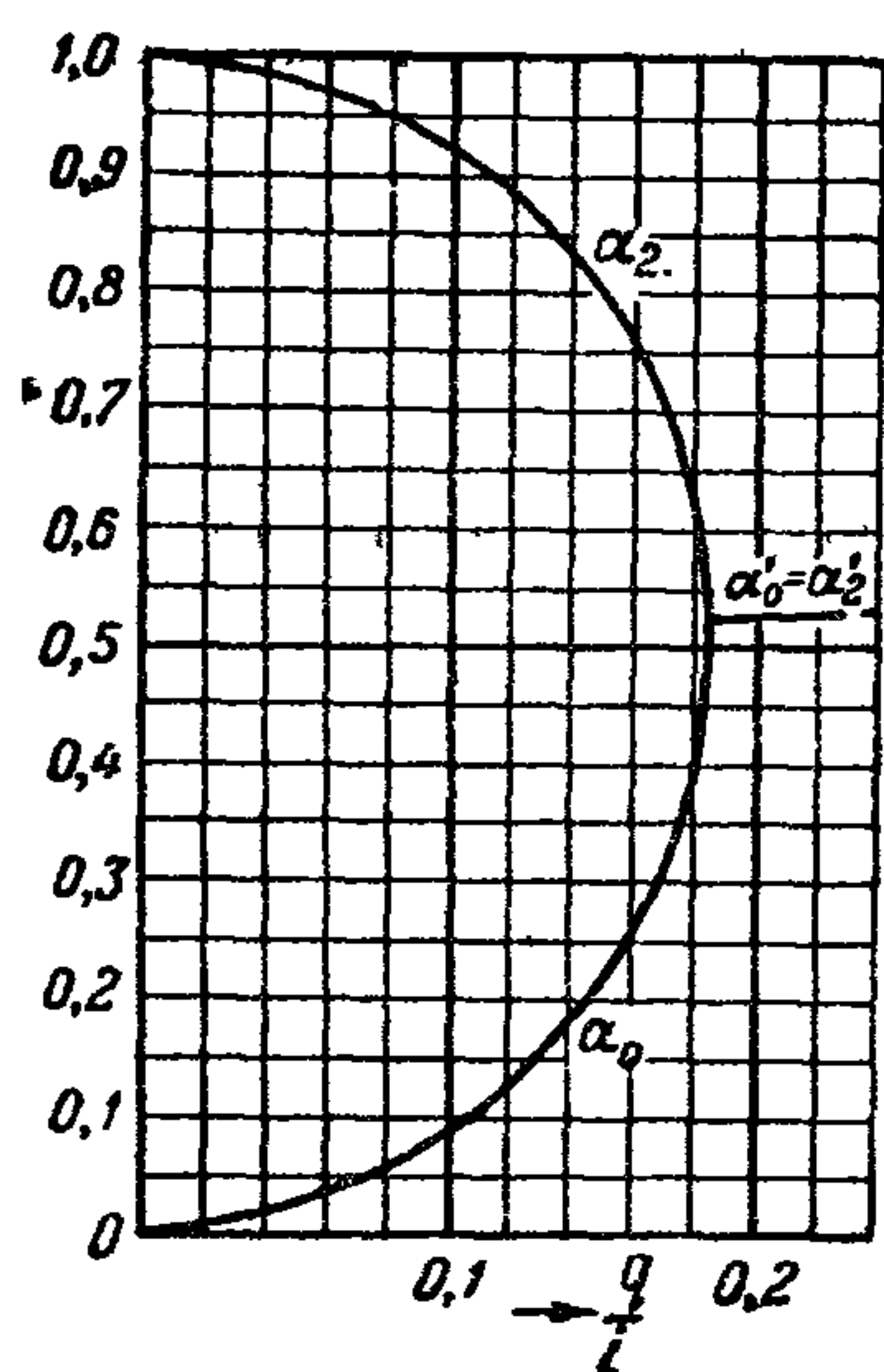


Рис. 190 и 191. Параметр $\alpha_n = \alpha'_n + \alpha''_n i$, $n=0, 2$, как функция $\frac{q}{i}$ при q чисто мнимом.

XV. КОНФЛЮЭНТНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Функция $\Phi(a, c; z)$

Конфлюэнтными гипергеометрическими функциями называются решения «конфлюэнтного дифференциального уравнения» *)

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (c - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0,$$

где a и c — произвольные комплексные постоянные. Если $c \neq 0, -1, -2, \dots$, то одним из решений является функция Куммера**)

$$\Phi(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

(Иногда ее обозначают через $M(a, c; z)$.) Если a, c фиксированы, то она является (однозначной) целой функцией z . Для действительных значений параметров a, c и для действительных значений аргумента $z = x$ она действительна (рис. 192—205).

При $0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c$ функция $\Phi(a, c; z)$ допускает интегральное представление

$$\Phi(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt;$$

кроме того, при $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} c > 0$ справедливо представление через функции Бесселя $J_\nu(z)$:

$$\Phi\left(a, c; -\frac{1}{z}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^a \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{a-\frac{c+1}{2}} J_{c-1}(2\sqrt{t}) dt.$$

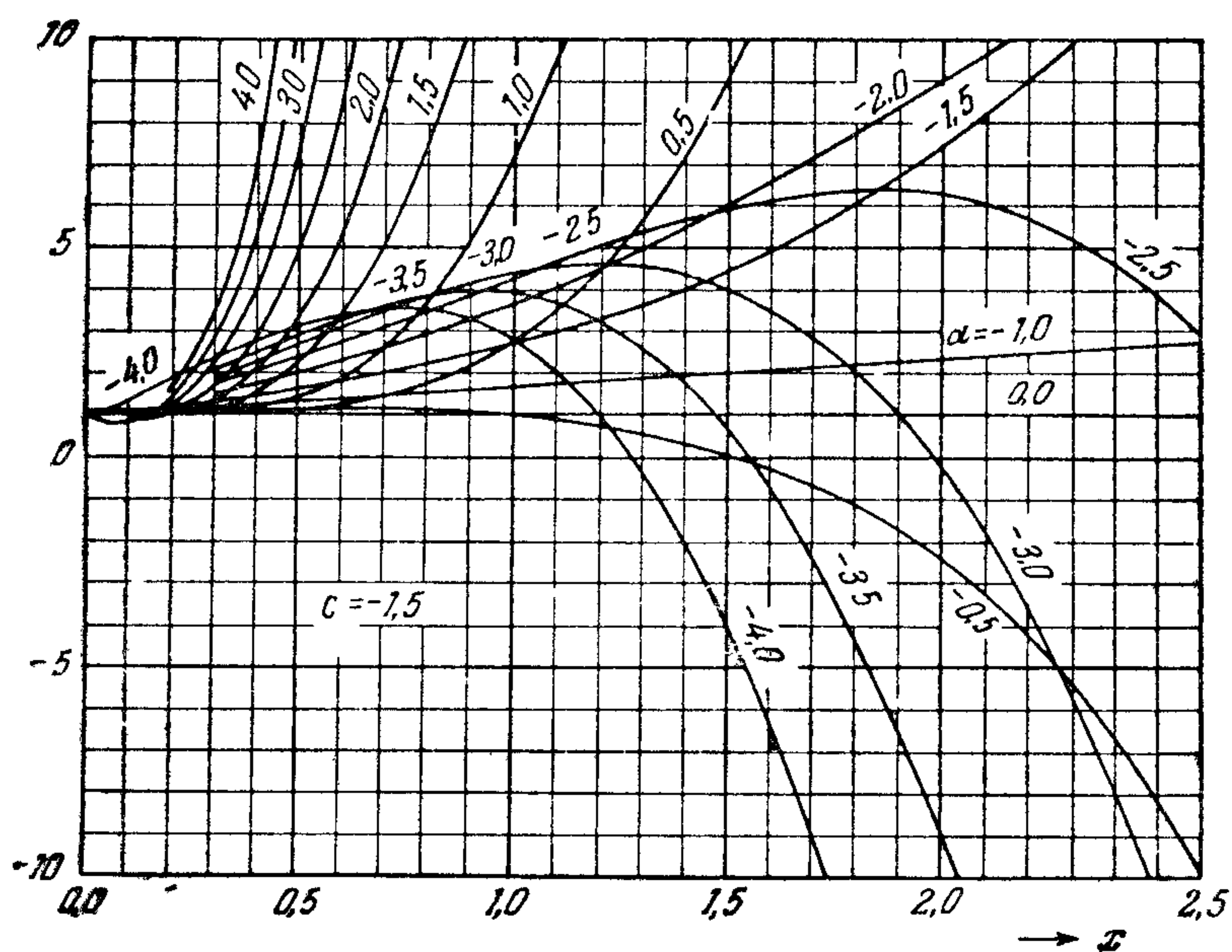
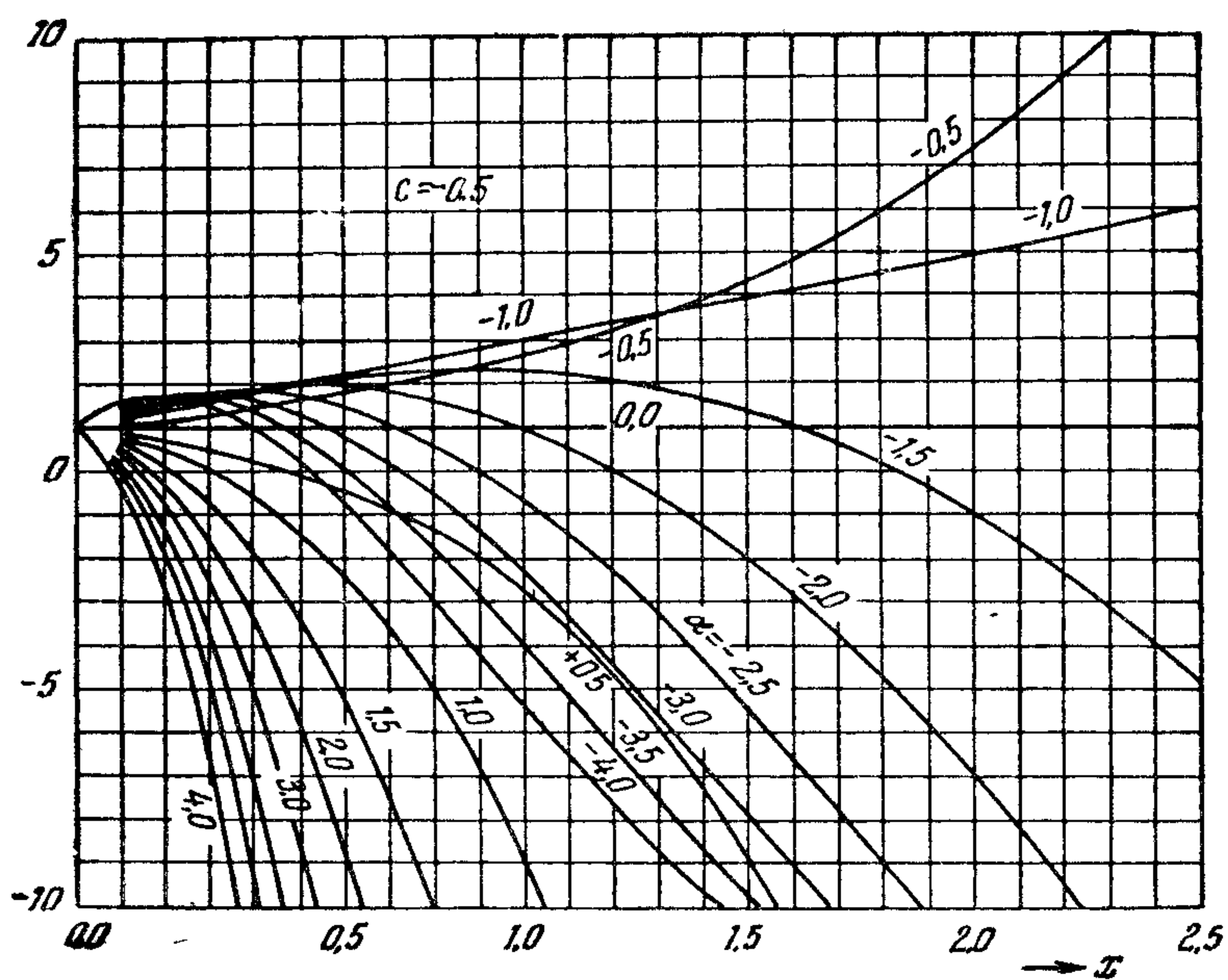
Асимптотическое поведение функции Куммера при $|z| \gg |a|, |z| \gg |c|$ описывается формулой

$$\Phi(a, c; z) \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} \left\{ 1 - \frac{a(a-c+1)}{z} + \frac{a(a+1)(a-c+1)(a-c+2)}{2! z^2} - \dots \right\} + \\ &+ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c} \left\{ 1 + \frac{(1-a)(c-a)}{z} + \frac{(1-a)(2-a)(c-a)(c-a+1)}{2! z^2} + \dots \right\} \\ &(-\pi < \arg z \leq \pi, \quad -\pi < \arg(-z) \leq \pi). \end{aligned}$$

*) Это уравнение называют иногда также вырожденным гипергеометрическим уравнением. — Прим. ред.

**) Иначе: функция Похгаммера или вырожденная гипергеометрическая функция. — Прим. ред.

Рис. 192. Функция $\Phi(a, -1.5; x)$.Рис. 193. Функция $\Phi(a, -0.5; x)$.

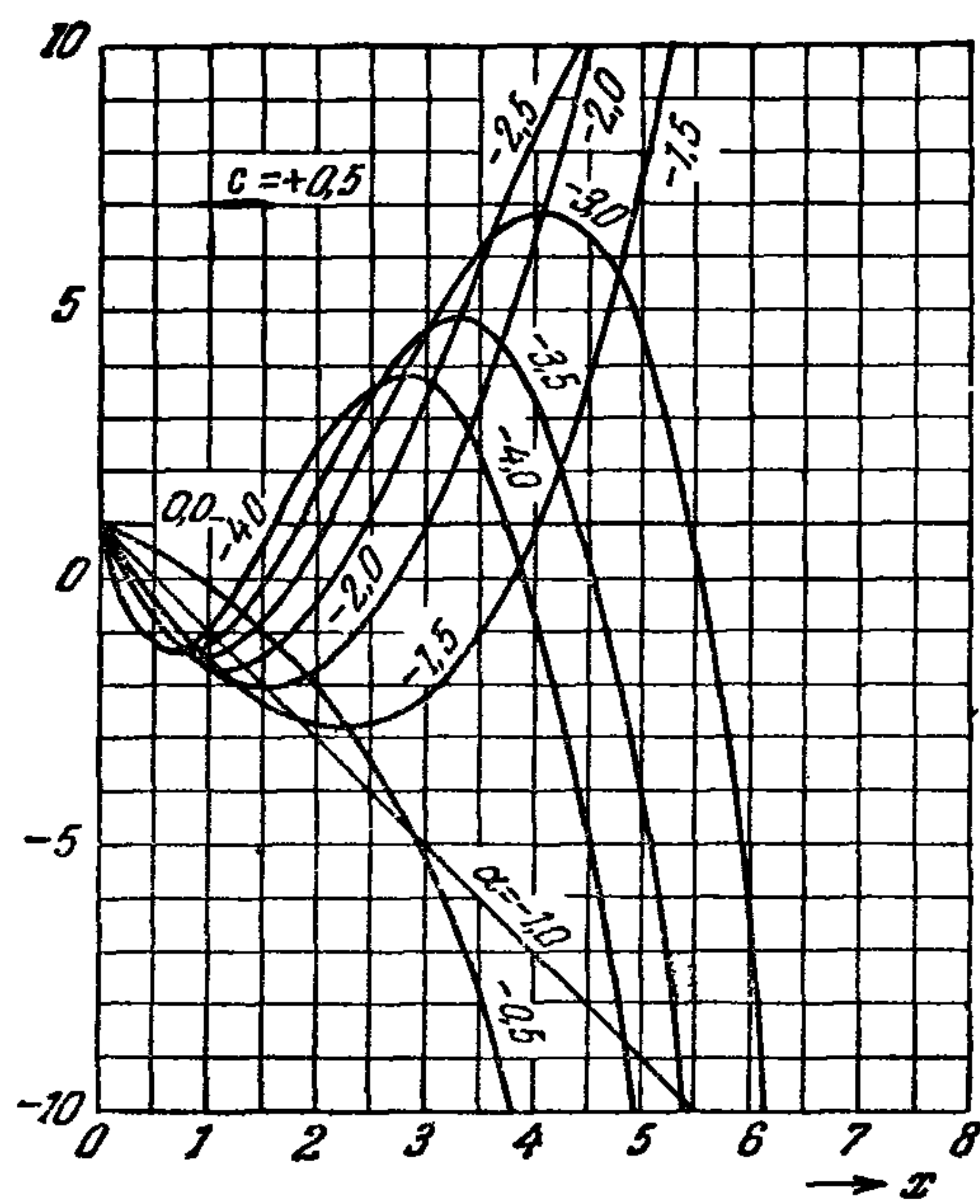
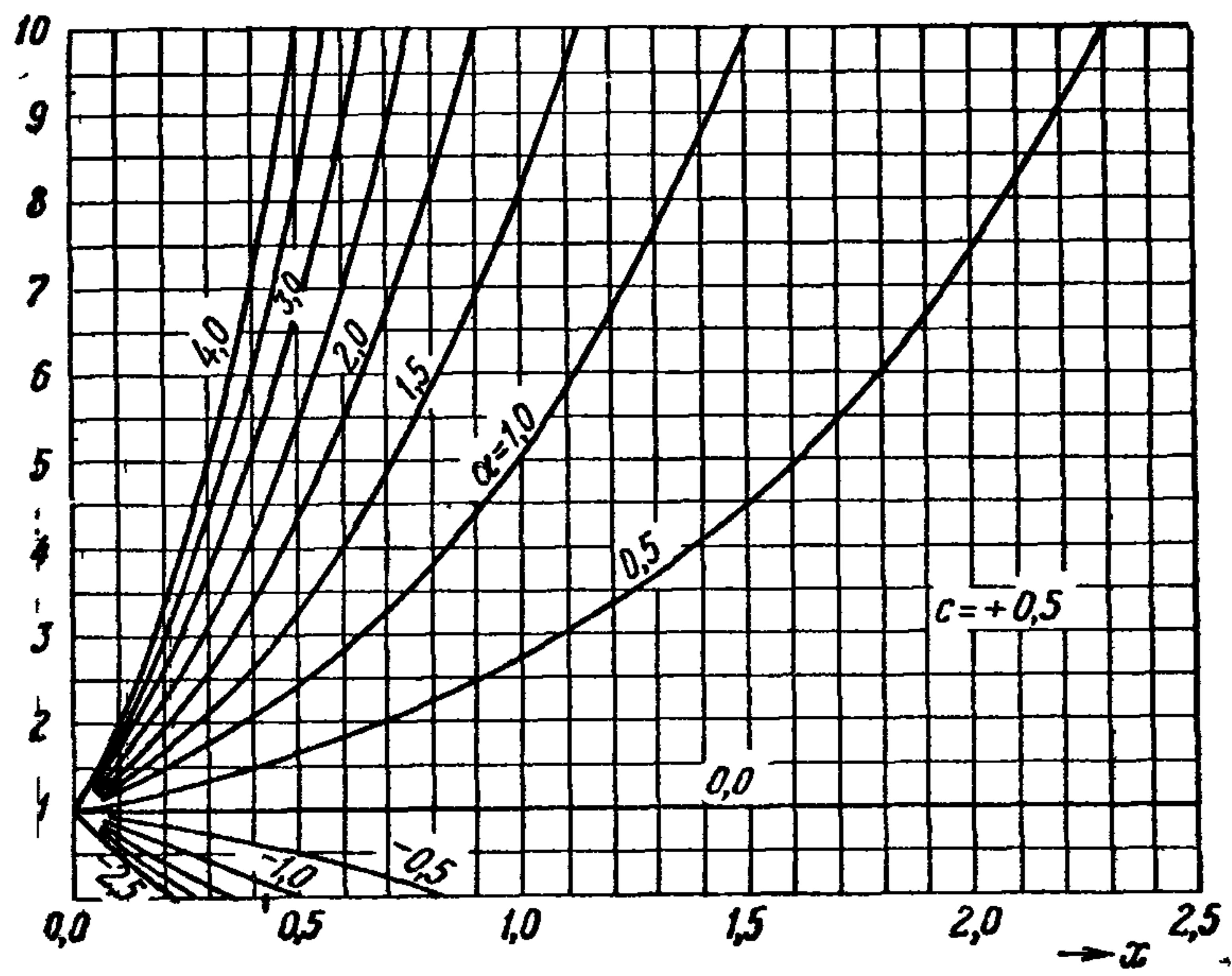
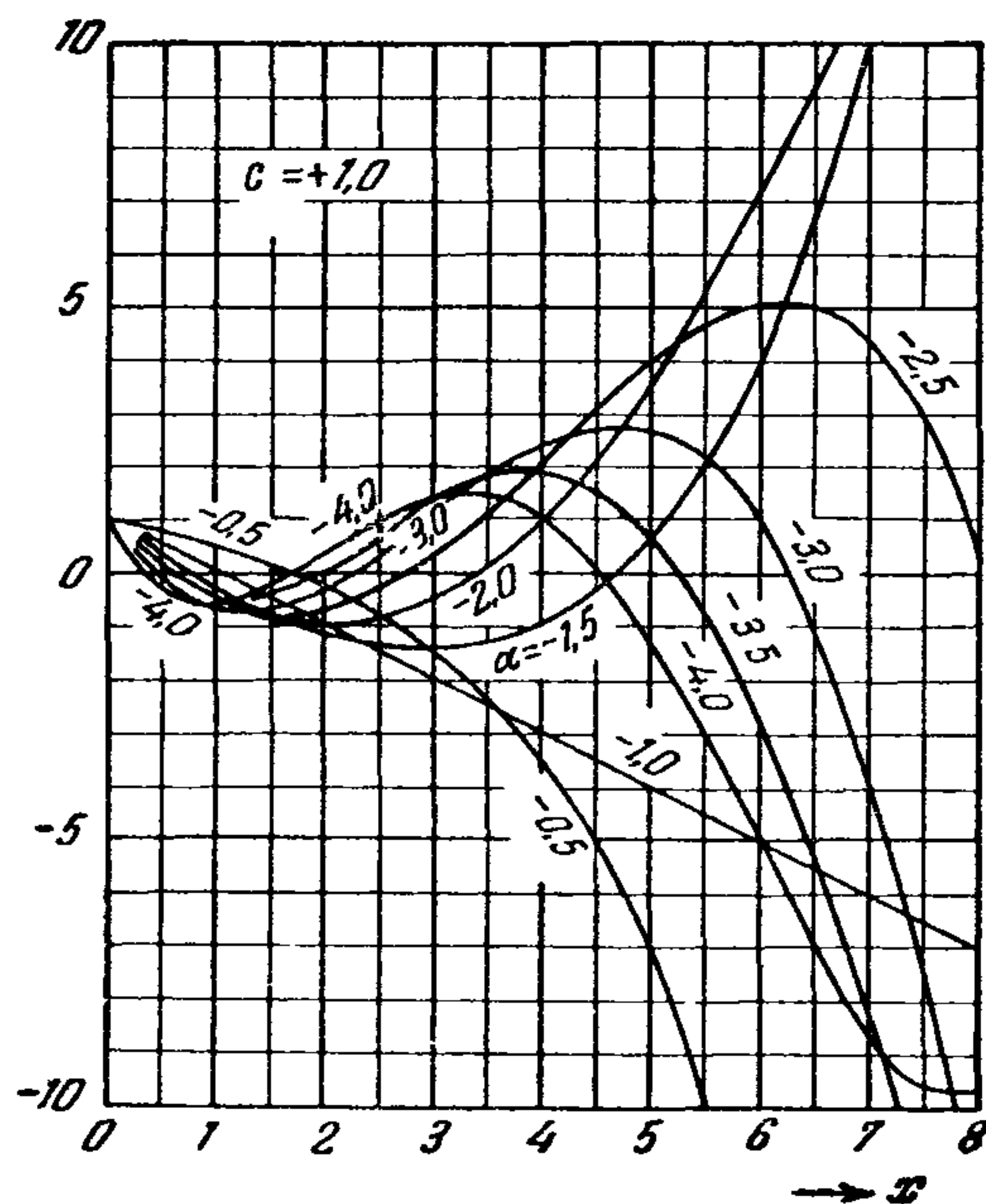
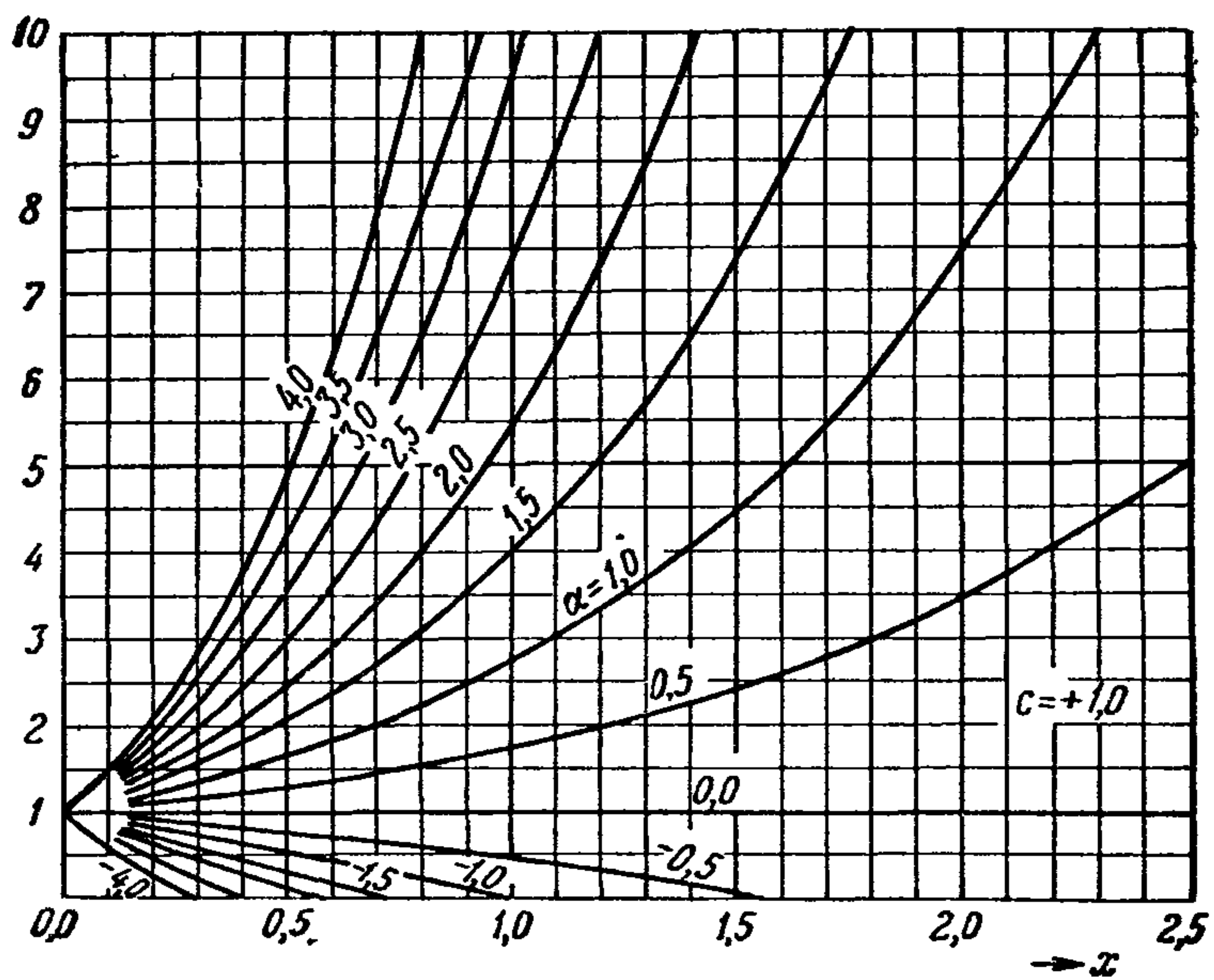


Рис. 194 и 195. Функция $\Phi(\alpha, +0.5, x)$.

Рис. 196 и 197. Функция $\Phi(\alpha, +1.0; x)$.

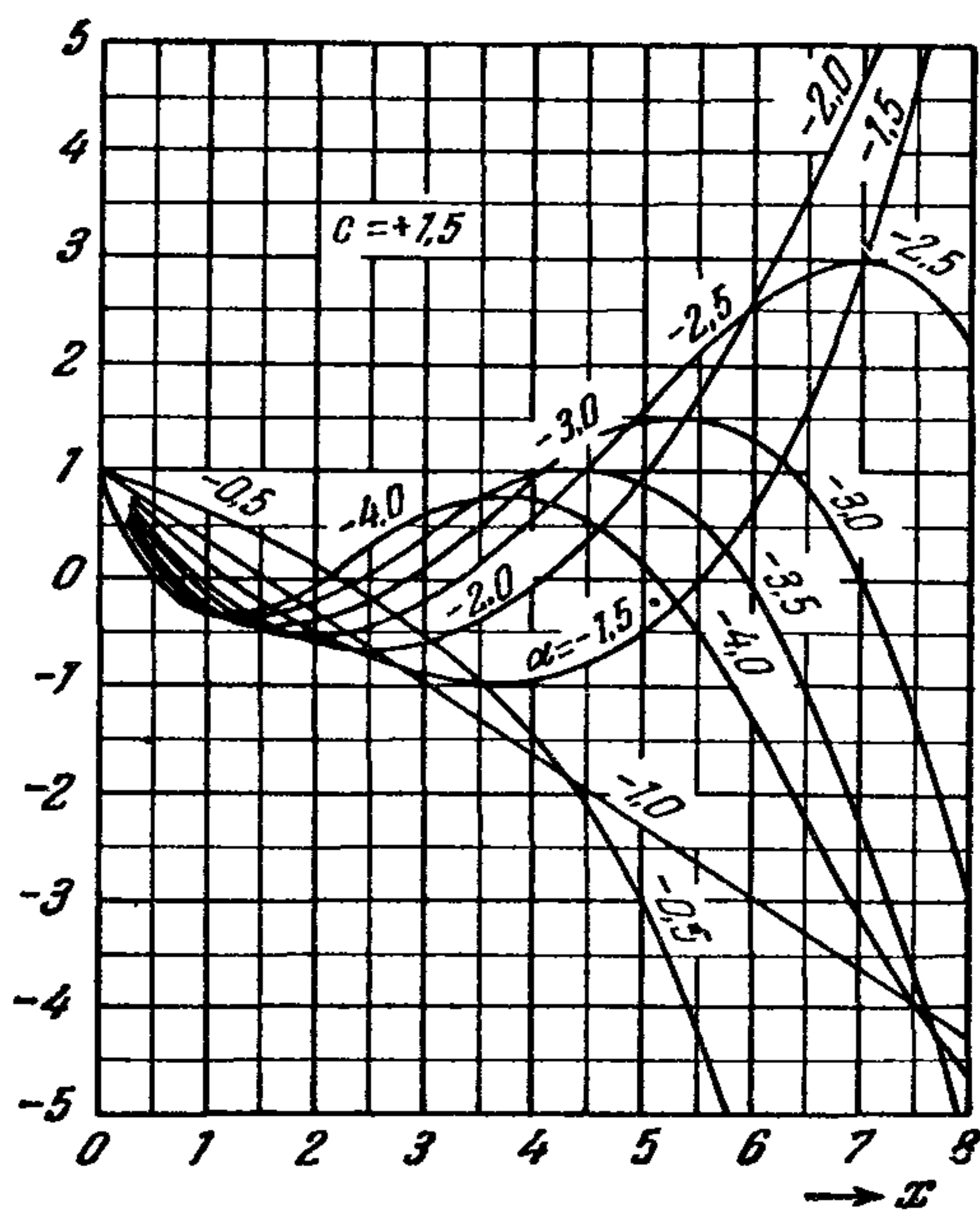
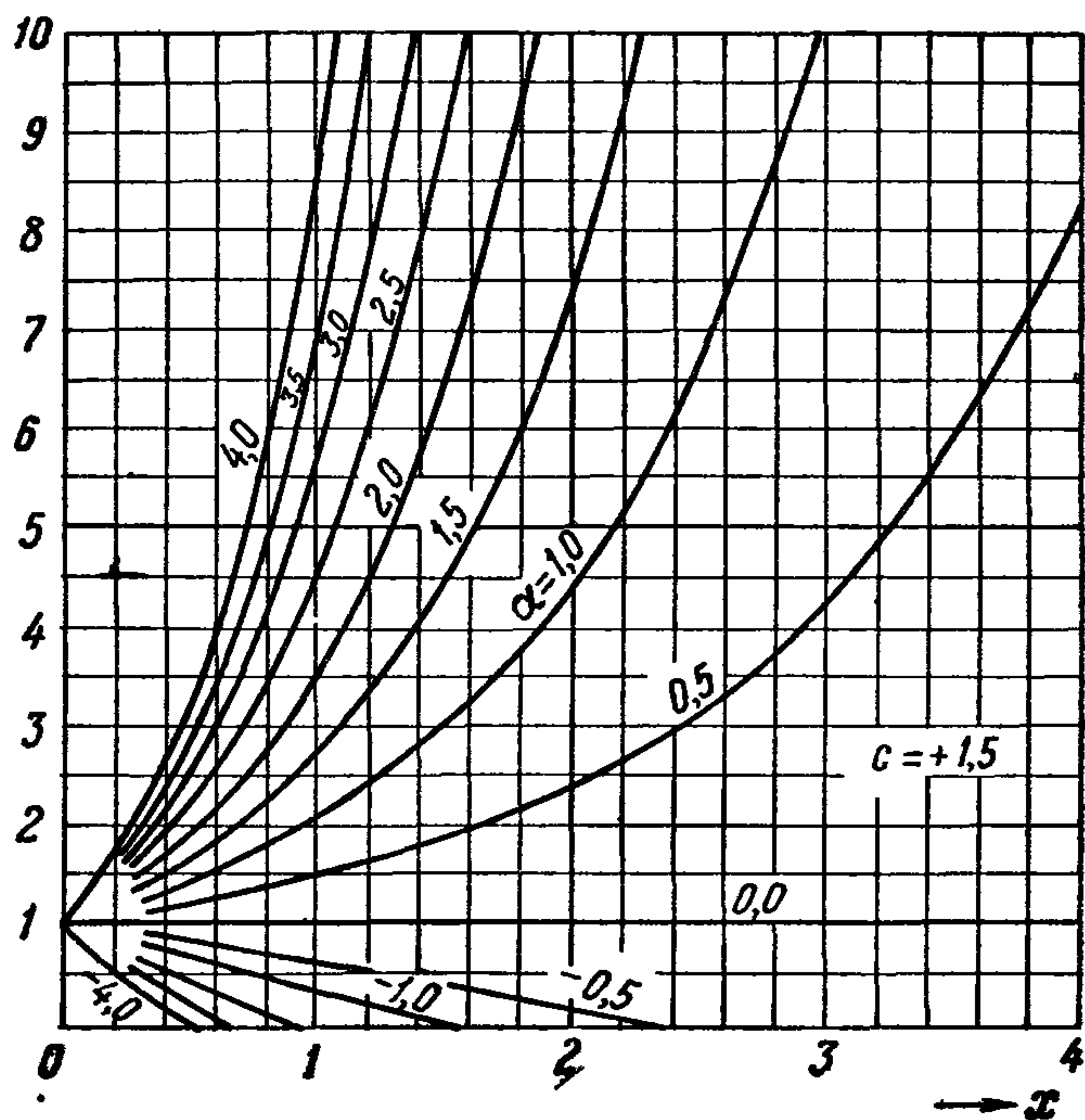


Рис. 198 и 199. Функция $\Phi(\alpha, +1.5; x)$.

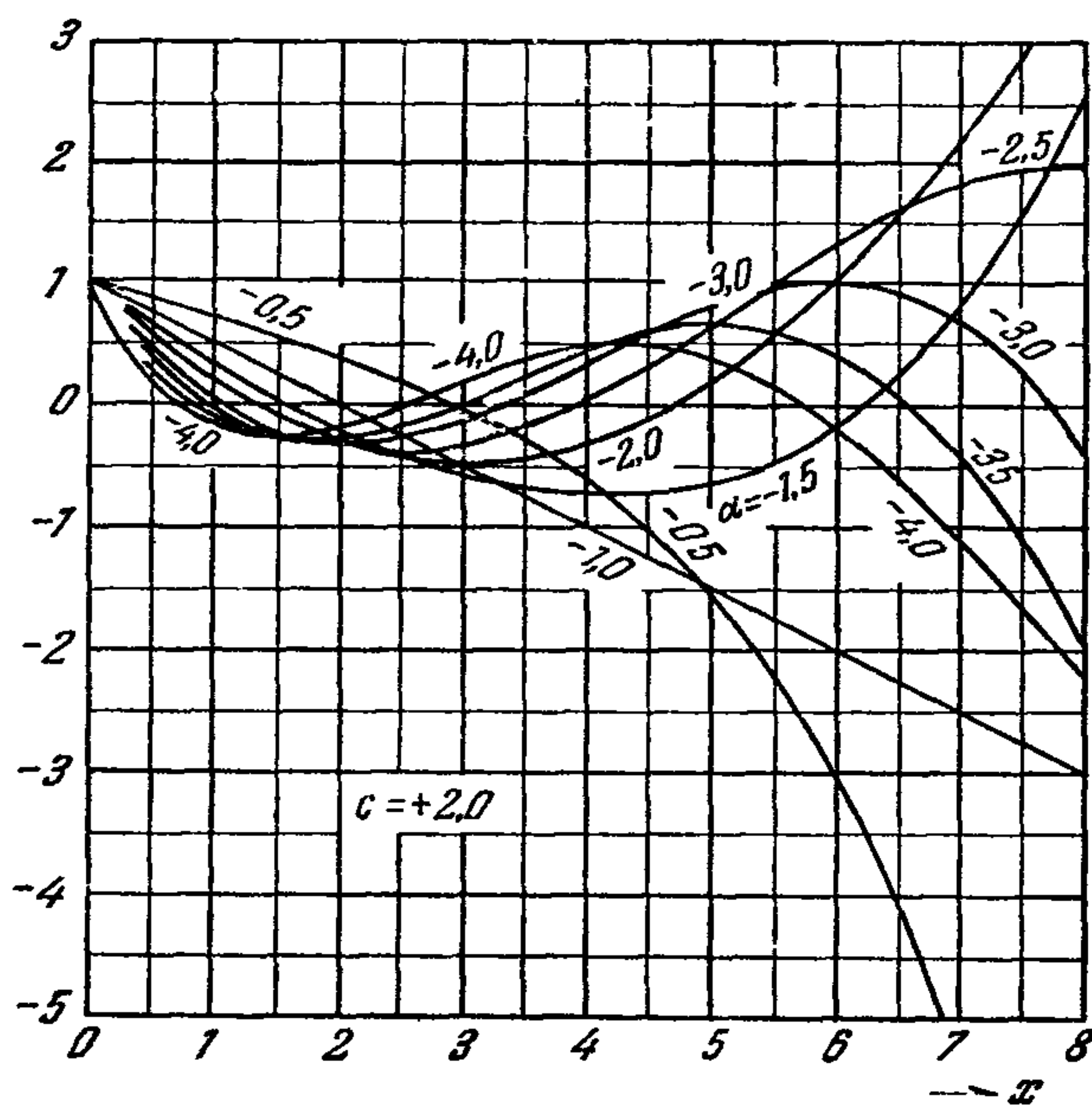
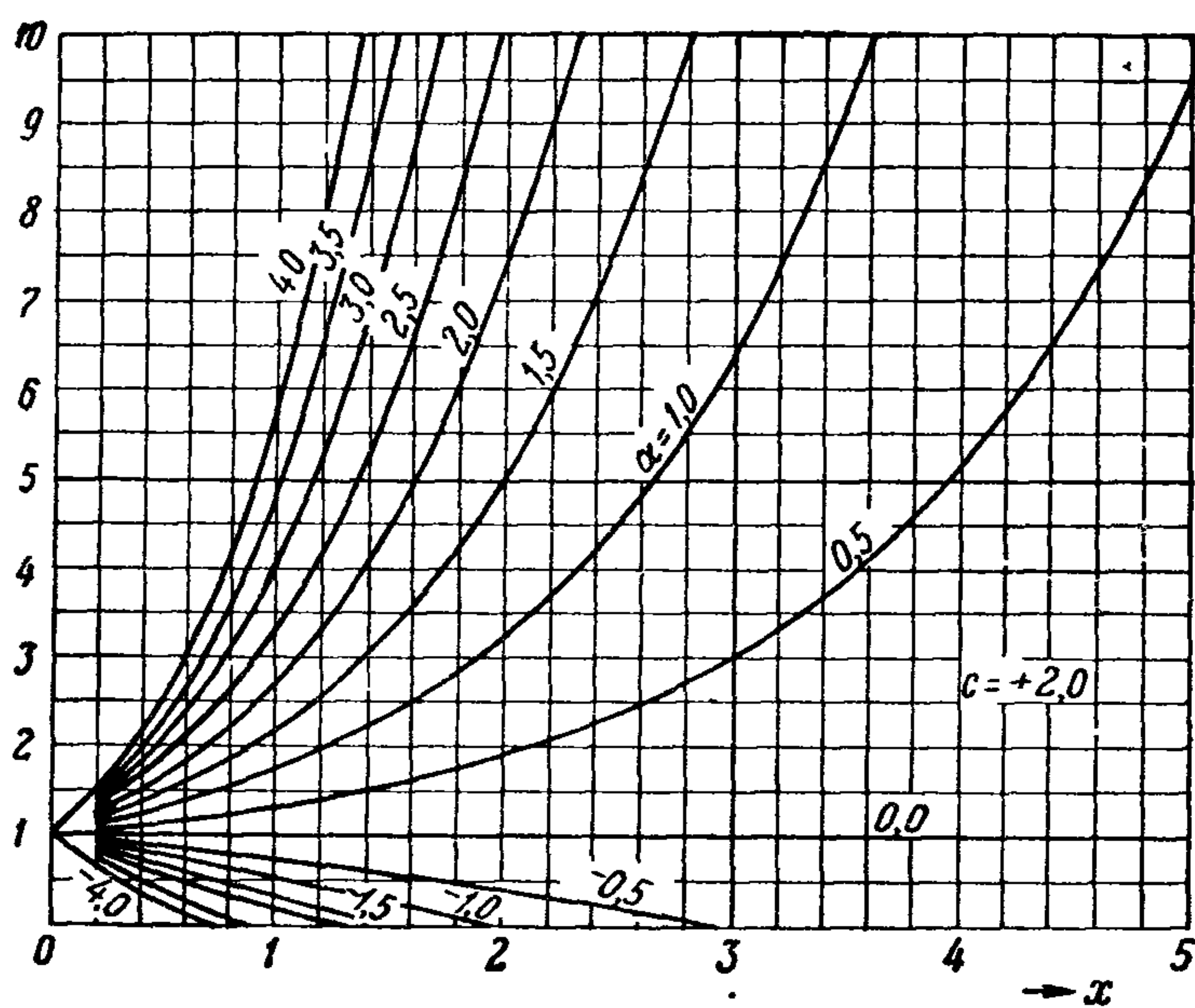
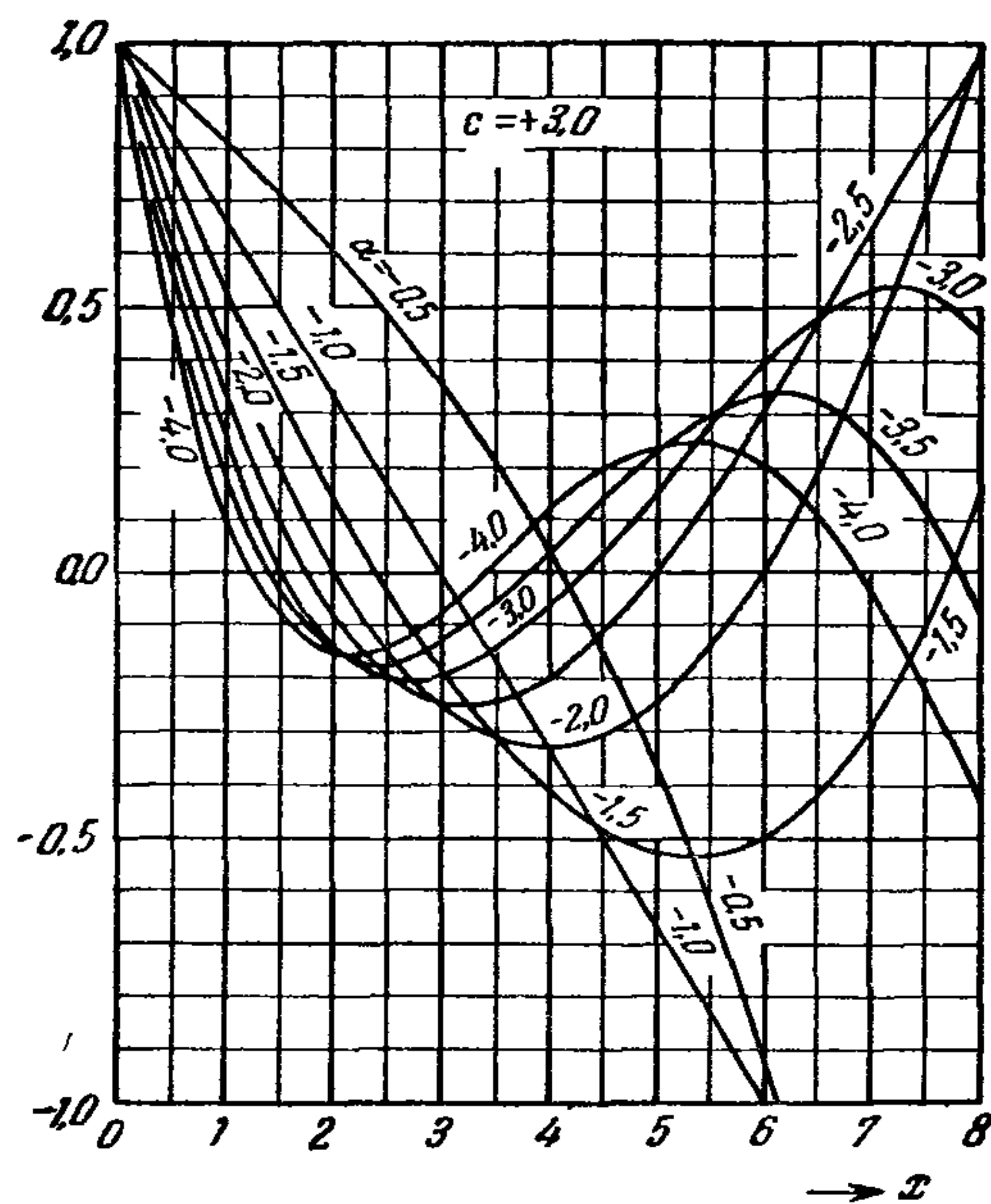
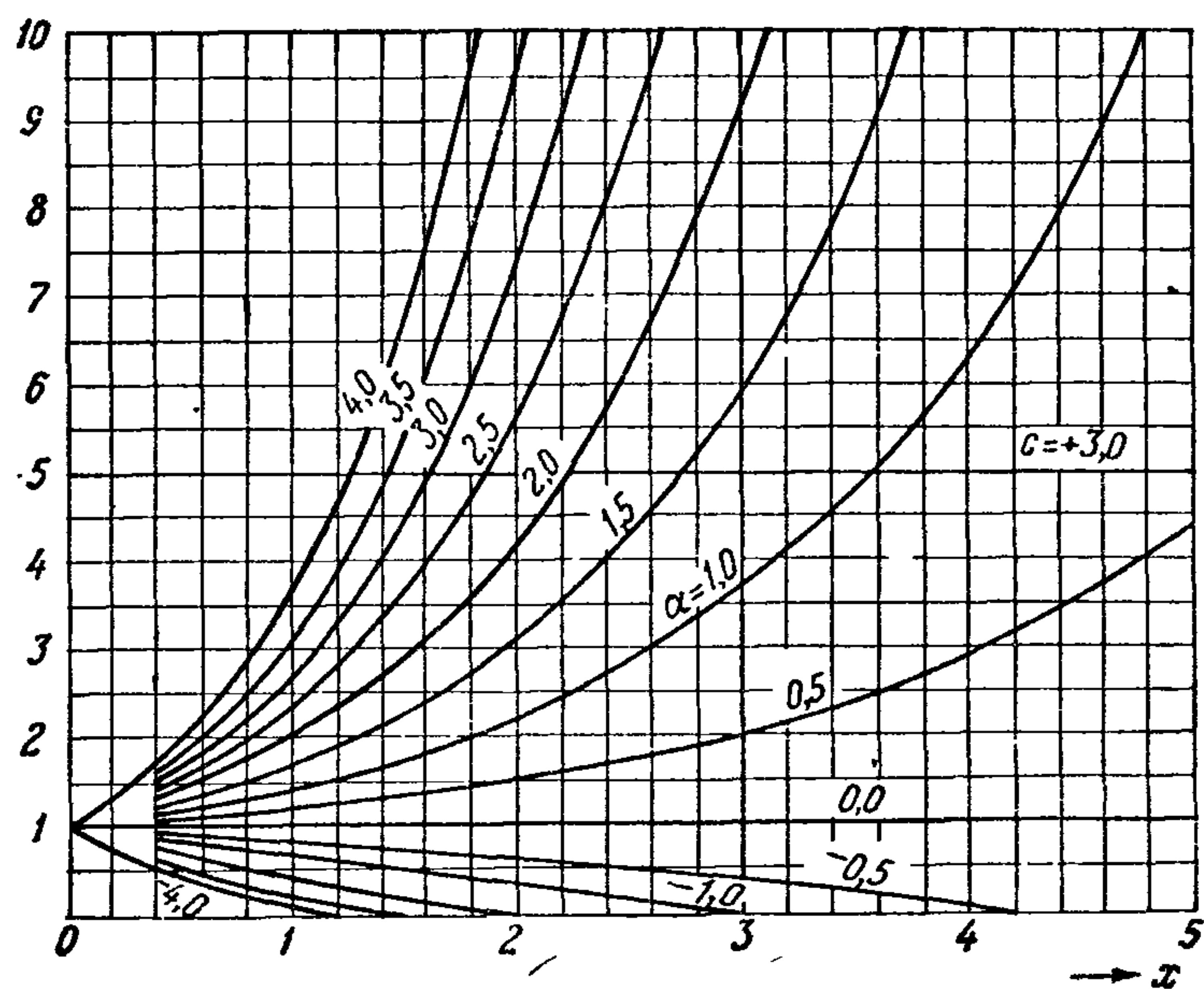


Рис. 200 и 201. Функция $\Phi(\alpha, +2.0; x)$.

Рис. 202 и 203. Функция $\Phi(\alpha, +3, 0; x)$.

Имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} (c-a)\Phi(a-1, c; z) + (2a-c+z)\Phi(a, c; z) - a\Phi(a+1, c; z) &= 0, \\ c(a+z)\Phi(a, c; z) - (c-a)z\Phi(a, c+1; z) - ac\Phi(a+1, c; z) &= 0, \\ c\Phi(a, c; z) - c\Phi(a-1, c; z) - z\Phi(a, c+1; z) &= 0, \\ (a-1+z)\Phi(a, c; z) + (c-a)\Phi(a-1, c; z) - (c-1)\Phi(a, c-1; z) &= 0, \\ (a-c+1)\Phi(a, c; z) - a\Phi(a+1, c; z) + (c-1)\Phi(a, c-1; z) &= 0, \\ c(c-1)\Phi(a, c-1; z) - c(c-1+z)\Phi(a, c; z) + (c-a)z\Phi(a, c+1; z) &= 0. \end{aligned}$$

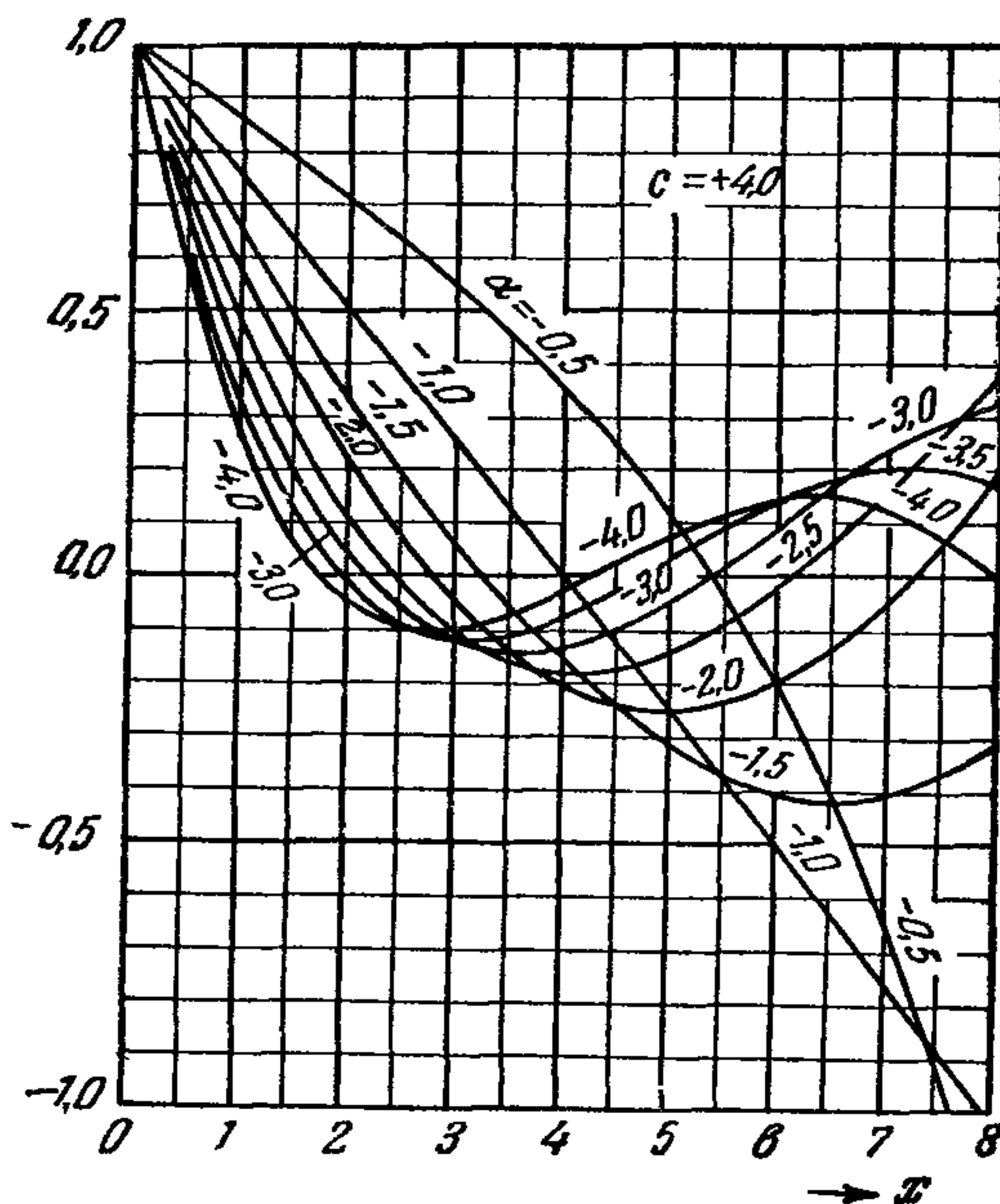
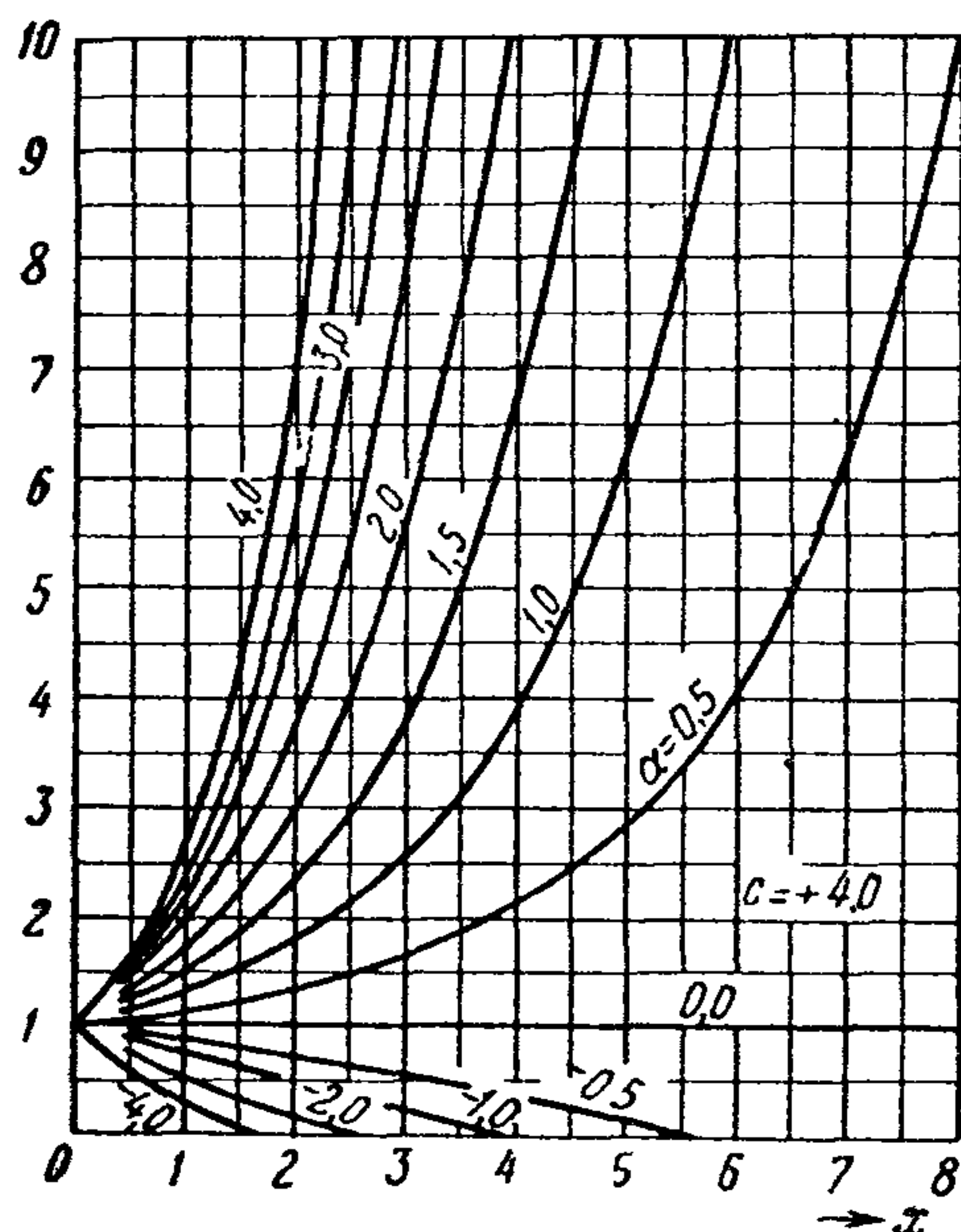


Рис. 204 и 205. Функция $\Phi(a, +4, 0; x)$.

Правило дифференцирования функции $\Phi(a, c; z)$:

$$\frac{d^n \Phi}{dz^n} = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(a)} \Phi(a+n, c+n; z).$$

Формула Куммера:

$$\Phi(a, c; z) = e^z \Phi(c-a, c; -z).$$

2. Функция $\Psi(a, c; z)$

Если c не есть целое число, то линейно независимым от $\Phi(a, c; z)$ решением конфлюэнтного дифференциального уравнения является функция

$$z^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; z).$$

Вместо нее можно взять функцию

$$\Psi(a, c; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c; z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; z).$$

Эта последняя с помощью предельного перехода $\Psi(a, n; z) = \lim_{c \rightarrow n} \Psi(a, c; z)$

может быть определена и для всех целых значений параметра c . Для $n = 0, 1, 2, \dots$ получим:

$$\begin{aligned} \Psi(a, n+1; z) = & \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(a-n)n!} \left\{ \Phi(a, n+1; z) \ln z + \right. \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} [\psi(a+k) - \psi(1+k) - \psi(1+n+k)] \frac{z^k}{k!} \Big\} + \\ & + \frac{(n-1)!}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a-n)(a-n+1)\dots(a-n+k-1)}{(1-n)(2-n)\dots(k-n)} \frac{z^{k+n}}{k!} \end{aligned}$$

($\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$; в случае $n=0$ последняя сумма должна быть отброшена)

Если c не есть целое положительное число, то представление для $\Psi(a, c; z)$ можно получить из следующей формулы, которая справедлива при всех значениях c :

$$\Psi(a, c; z) = z^{1-c} \Psi(a-c+1, 2-c; z).$$

При a и c фиксированных $\Psi(a, c; z)$ является (в общем случае) бесконечнозначной аналитической функцией от z с единственной конечной точкой ветвления $z=0$. При положительных действительных значениях аргумента $z=x>0$ эта функция имеет действительную ветвь. При $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} c > 0$ функция $\Psi(a, c; z)$ допускает интегральное представление

$$\Psi(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt.$$

Асимптотическое поведение функции $\Psi(a, c; z)$ при $|z| \gg |a|$, $|z| \gg |c|$ в области $-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ дается формулой

$$\Psi(a, c; z) \approx z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{z^n}.$$

Имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} \Psi(a-1, c; z) - (2a-c+z) \Psi(a, c; z) + a(a-c+1) \Psi(a+1, c; z) &= 0, \\ (a+z) \Psi(a, c; z) + a(c-a-1) \Psi(a+1, c; z) - z \Psi(a, c+1; z) &= 0, \\ (c-a) \Psi(a, c; z) - z \Psi(a, c+1; z) + \Psi(a-1, c; z) &= 0, \\ (a-1+z) \Psi(a, c; z) - \Psi(a-1, c; z) + (a-c+1) \Psi(a, c-1; z) &= 0, \\ \Psi(a, c; z) - a \Psi(a+1, c; z) - \Psi(a, c-1; z) &= 0, \\ (c-a-1) \Psi(a, c-1; z) - (c-1+z) \Psi(a, c; z) + z \Psi(a, c+1; z) &= 0. \end{aligned}$$

Правило дифференцирования функции $\Psi(a, c; z)$:

$$\frac{d^n \Psi}{dz^n} = (-1)^n \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \Psi(a+n, c+n; z).$$

3. Функции $M_{x, \mu}(z)$ и $W_{x, \mu}(z)$

С помощью функций $\Phi(a, c; z)$ и $\Psi(a, c; z)$ можно получить такие интегралы confluentного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{\Gamma(c)} \Phi(a, c; z), \quad \frac{1}{\Gamma(2-c)} z^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; z), \quad \Psi(a, c; z), \\ e^z \Psi(c-a, c; -z)$$

(причем первые два имеют смысл также и при неположительном целом значении параметра c). Среди них всегда существуют пары независимых интегралов.

Для фундаментальной системы интегралов употребляют и другое представление, данное Э. Уиттекером и Дж. Ватсоном. После преобразования

$$\omega = e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{c}{2}} w, \quad \kappa = \frac{c}{2} - a, \quad \mu = \frac{c-1}{2}$$

конфлюэнтное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{1-4\mu^2}{4z^2} \right) \omega = 0.$$

Решениями этого уравнения являются:

$$M_{\kappa, \mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\mu+\frac{1}{2}} \Phi\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right),$$

$$W_{\kappa, \mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\mu+\frac{1}{2}} \Psi\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right);$$

последняя функция называется *функцией Уиттекера*. Если 2μ не есть целое число, то обе функции связаны соотношением

$$W_{\kappa, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, -\mu}(z).$$

Функции $M_{\kappa, \mu}(z)$, $W_{\kappa, \mu}(z)$ являются бесконечнозначными аналитическими функциями, которые имеют действительную ветвь при действительных положительных значениях аргумента.

4. Частные случаи

Конфлюэнтные гипергеометрические функции содержат как частные случаи: функции Бесселя при $c=2a$, функции параболического цилиндра при $c=\frac{1}{2}$, неполные гамма-функции при $a=1$ и полиномы Лагерра при $a=-n$.

XVI. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ФИЗИКИ

А. ФУНКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАНКА

Тело, имеющее абсолютную температуру T , испускает электромагнитные волны со всевозможными длинами λ . Излучаемая при этом энергия распределяется весьма неравномерно по волнам различной длины.

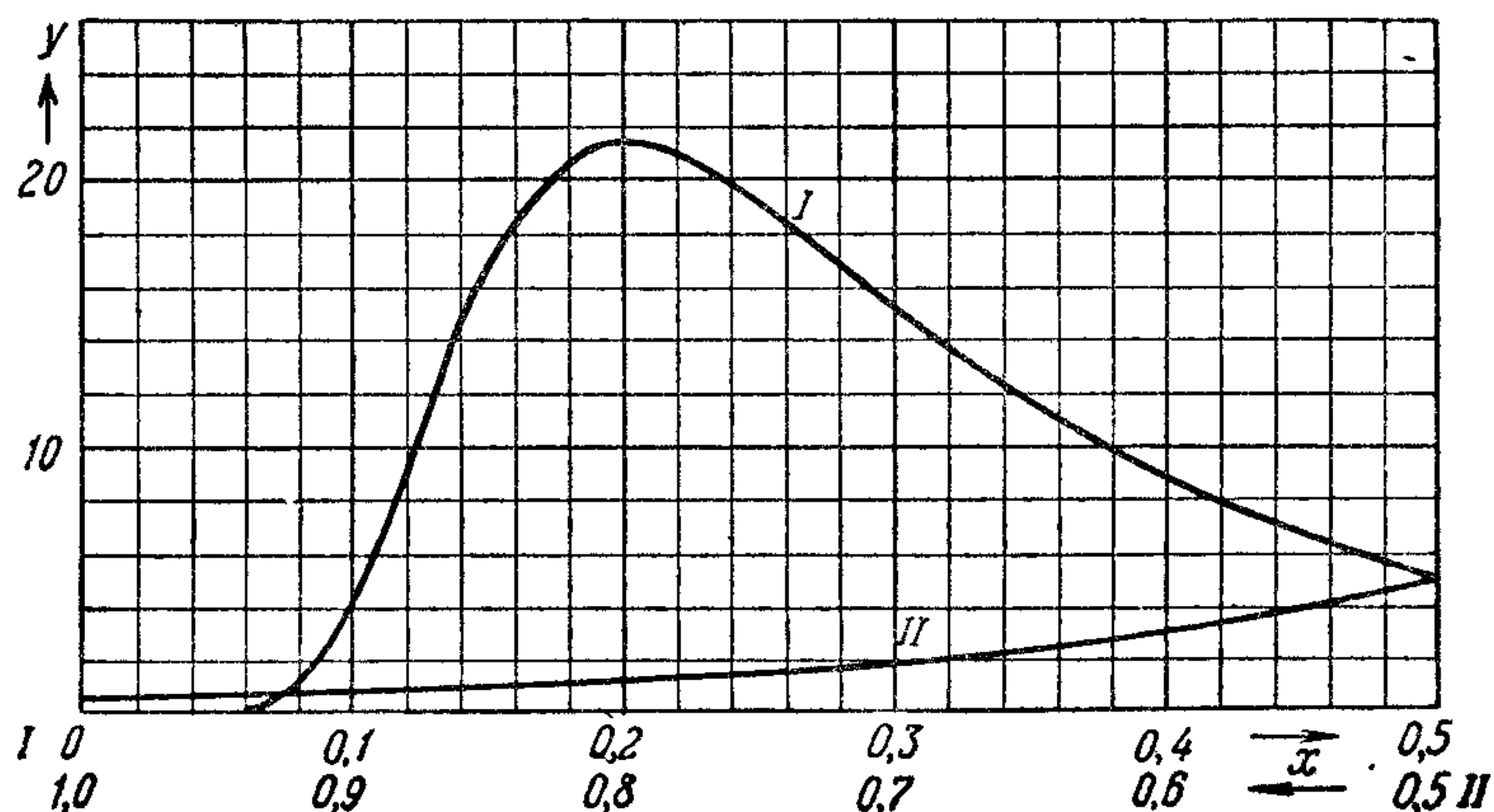


Рис. 206. Функция излучения Планка.

Волнам, длины которых заключены между λ и $\lambda + d\lambda$, соответствует плотность излучения $J d\lambda$. Тогда, согласно Планку,

$$J = hc^2 \lambda^{-5} (e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1)^{-1}.$$

Здесь c означает скорость света в пустоте, k — постоянную Больцмана, h — постоянную Планка. Если ввести два числа x и y , положив

$$\lambda = \frac{hc}{kT} x, \quad J = \frac{k^5 T^5}{h^4 c^3} y,$$

то уравнение Планка принимает вид:

$$(e^{\frac{1}{x}} - 1) x^5 y = 1.$$

Зависимость y от x называется *функцией излучения Планка* (рис. 206, таблица 68). Эта функция показывает, как при постоянной температуре плотность излучения зависит от длины волны.

Таблица 68. Функция излучения Планка

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,060	0,07430	0,110	6,998	0,160	18,446	0,350	11,601	0,600	2,995
1	0,08990	1	7,259	1	18,589	55	11,279	05	2,922
2	0,10797	2	7,522	2	18,73	60	10,965	10	2,852
3	0,12875	3	7,787	3	18,86	65	10,658	15	2,783
4	0,15249	4	8,053	4	18,99	70	10,360	20	2,717
0,065	0,17946	0,115	8,320	0,165	19,12	0,375	10,069	0,625	2,653
6	0,2099	6	8,588	6	19,24	80	9,787	30	2,590
7	0,2441	7	8,856	7	19,36	85	9,512	35	2,529
8	0,2823	8	9,125	8	19,48	90	9,245	40	2,470
9	0,3248	9	9,393	9	19,59	95	8,985	45	2,412
0,070	0,3718	0,120	9,662	0,170	19,69	0,400	8,733	0,650	2,356
1	0,4235	1	9,931	2	19,89	05	8,488	55	2,302
2	0,4802	2	10,198	4	20,08	10	8,250	60	2,249
3	0,5422	3	10,465	6	20,25	15	8,020	65	2,198
4	0,6095	4	10,731	8	20,40	20	7,796	70	2,148
0,075	0,6825	0,125	10,996			0,425	7,578	0,675	2,099
6	0,7613	6	11,259	0,180	20,54	30	7,368	80	2,052
7	0,8460	7	11,521	5	20,82	35	7,163	85	2,006
8	0,9368	8	11,781	0,190	21,02	40	6,965	90	1,961
9	1,0339	9	12,040	5	21,15	45	6,773	95	1,918
0,080	1,1373	0,130	12,296	0,200	21,20	0,450	6,586	0,700	1,875
1	1,2471	1	12,550	05	21,18	55	6,406	05	1,8341
2	1,3635	2	12,801	10	21,11	60	6,231	10	1,7939
3	1,4864	3	13,050	15	20,99	65	6,061	15	1,7548
4	1,6160	4	13,296	20	20,82	70	5,896	20	1,7168
0,085	1,7521	0,135	13,540	0,225	20,61	0,475	5,736	0,725	1,6797
6	1,8948	6	13,780	30	20,36	80	5,582	30	1,6436
7	2,044	7	14,017	35	20,08	85	5,432	35	1,6085
8	2,200	8	14,251	40	19,78	90	5,286	40	1,5743
9	2,362	9	14,482	45	19,45	95	5,145	45	1,5409
0,090	2,531	0,140	14,710	0,250	19,10	0,500	5,009	0,750	1,5084
1	2,706	1	14,934	55	18,74	05	4,876	55	1,4768
2	2,887	2	15,154	60	18,372	10	4,748	60	1,4459
3	3,074	3	15,371	65	17,989	15	4,623	65	1,4158
4	3,267	4	15,584	70	17,600	20	4,502	70	1,3865
0,095	3,466	0,145	15,793	0,275	17,206	0,525	4,385	0,775	1,3580
6	3,671	6	15,998	80	16,809	30	4,271	80	1,3301
7	3,880	7	16,200	85	16,411	35	4,161	85	1,3029
8	4,095	8	16,397	90	16,013	40	4,054	90	1,2764
9	4,315	9	16,591	95	15,617	45	3,951	95	1,2506
0,100	4,540	0,150	16,780	0,300	15,224	0,550	3,850	0,800	1,2254
1	4,769	1	16,966	05	14,834	55	3,753	05	1,2009
2	5,003	2	17,147	10	14,449	60	3,658	10	1,1769
3	5,241	3	17,324	15	14,070	65	3,566	15	1,1535
4	5,482	4	17,497	20	13,696	70	3,477	20	1,1307
0,105	5,727	0,155	17,666	0,325	13,329	0,575	3,390	0,825	1,1084
6	5,976	6	17,830	30	12,968	80	3,307	30	1,0867
7	6,227	7	17,990	35	12,615	85	3,225	35	1,0655
8	6,481	8	18,146	40	12,270	90	3,146	40	1,0448
9	6,738	9	18,298	45	11,932	95	3,069	45	1,0246
0,110	6,998	0,160	18,446	0,350	11,601	0,600	2,995	0,850	1,0048

Продолжение табл. 68

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
	1,		0,		0,		0,1		0,0
0,850	0048	0,975	6344	1,20	3089	1 45	5711	1 70	8795
55	*9856	80	6235	1	3000	6	5325	1	8607
60	9667	85	6128	2	2914	7	4951	2	8424
65	9484	90	6023	3	2831	8	4588	3	8246
70	9304	95	5920	4	2751	9	4236	4	8073
0,875	9129	1,00	5820	1,25	2674	1 50	3895	1,75	7904
80	8958	1	5625	6	2599	1	3564	6	7740
85	8790	2	5438	7	2527	2	3242	7	7580
90	8627	3	5259	8	2458	3	2930	8	7424
95	8467	4	5087	9	2390	4	2627	9	7272
0,900	8311	1,05	4922	1 30	2326	1,55	2333	1,80	7124
05	8158	6	4764	1	2263	6	2047	1	6979
10	8009	7	4611	2	2202	7	1770	2	6838
15	7863	8	4465	3	2144	8	1500	3	6701
20	7721	9	4325	4	2087	9	1239	4	6567
0,925	7581	1,10	4190	1 35	2032	1 60	0984	1,85	6437
30	7445	1	4060	6	1979	1	0737	6	6309
35	7311	2	3935	7	1928	2	0496	7	6185
40	7181	3	3814	8	1878	3	0262	8	6064
45	7054	4	3699	9	18298	4	0035	9	5946
0,950	6929	1,15	3587	1 40	17831	1 65	*9814	1,90	5830
55	6807	6	3480	1	17380	6	9599	1	5718
60	6687	7	3377	2	16943	7	9389	2	5608
65	6571	8	3277	3	16519	8	9186	3	5501
70	6456	9	3181	4	16109	9	8988	4	5396
0,975	6344	1,20	3089	1,45	15711	1,70	8795	1,95	5294
	0,		0,		0,		0,0		0,0

В. ФУНКЦИЯ ЛАНЖЕВЕНА

Рассмотрим систему одинаковых молекулярных магнитных стрелок во внешнем магнитном поле. Если μ означает молекулярный магнитный момент, $\mathfrak{H}$ — напряженность магнитного поля и k — постоянную Больцмана, то поведение молекулярного магнетика при данной температуре T определяется средним моментом (формула Ланжевена):

$$\bar{\mu} = \mu \left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \right),$$

где $x = \frac{\mu \mathfrak{H}}{kT}$. Входящая сюда функция

$$L(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x}$$

называется функцией Ланжевена (таблица 69).

С. ФУНКЦИИ ПЛАНКА — ЭЙНШТЕЙНА И ДЕБАЯ

1. Функции Планка — Эйнштейна

Обозначим через $\Theta = \frac{h\nu}{k}$ характеристическую температуру для системы частиц, которые совершают свободные гармонические колебания с частотой ν (h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана) Тогда характеризующие эту систему атомная теплоемкость C_ν , отношение полной энергии $U - U_0$ к абсолютной температуре T , отношение свободной энергии $F - F_0$ к абсолютной температуре T и энтропия S могут быть представлены, согласно Планку и

Таблица 69. Функция Ланжевена

x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)
0,00	0,000000 3333	1,00	0,3130 27,5	2,00	0,5373 17,5	4,0	0,7507 59	11,0	0,9091 7,8
02	006666 3333	02	3185 27,5	02	5408 17	1	7566 57	5	9130 7,4
04	013332 3331,5	04	3240 27	04	5442 17	2	7623 55	12,0	9167 6,6
06	019995 3330	06	3294 27	06	5476 17	3	7678 52	5	9200 6,2
08	026655 3328	08	3348 26,5	08	5510 16,5	4	7730 50	13,0	9231 5,6
0,10	03331 332 5	1,10	3401 26,5	2,10	5543 16,2	5	7780 48	5	9259 5,4
12	03996 332 5	12	3454 26 5	15	5624 15,8	6	7828 46	14,0	9286 4,8
14	04661 331 5	14	3507 26	20	5703 15,4	7	7874 44	5	9310 4,6
16	05324 331,5	16	3559 26	2,25	5780 15,0	8	7918 42	15,0	9333 4,4
18	05987 331	18	3611 25 5	30	5855 14,6	9	7960 41	5	9355 4,0
0,20	06649 330,5	1,20	3662 25,5	35	5928 14 2	5,0	8001 39	16,0	9375 3,8
22	07310 329 5	22	3713 25	40	5999 13 8	1	8040 38	5	9394 3,6
24	07969 329,5	24	3763 25	45	6068 13,4	2	8078 36	17,0	9412 3,4
26	08628 328,5	26	3813 25	2,50	6135 13,2	3	8114 35	5	9429 3,0
28	09285 328	28	3863 24 5	55	6201 12,8	4	8149 33	18,0	9444 3,0
0,30	09941 327	1,30	3912 24,5	60	6265 12,4	5	8182 33	19	9474 2,6
32	10595 326	32	3961 24,5	65	6327 12,0	6	8215 31	20	9500 2,4
34	11247 325	34	4010 24	70	6387 11,8	7	8246 30	21	9524 2,2
36	11897 324,5	36	4058 23,5	2,75	6446 11,4	8	8276 29	22	9546 1,9
38	12546 323 5	38	4105 23,5	80	6503 11 0	9	8305 28	23	9565 1,8
0,40	13193 322,5	1,40	4152 23,5	85	6558 10,8	6,0	8333 27	24	9583 1,7
42	13838 321 5	42	4199 23	90	6612 10,6	2	8387 25,5	25	9600 1,5
44	14481 320	44	4245 23	95	6665 10 2	4	8438 23,5	26	9615 1,5
46	15121 319	46	4291 22,5	3,00	6716 10 0	6	8485 22	27	9630 1,3
48	15759 318	48	4336 22,5	05	6766 9,8	8	8529 21	28	9643 1,2
0,50	16395 317	1,50	4381 22,5	10	6815 9 4	7,0	8571 20	30	9667 10,5
52	17029 315,5	52	4426 22	15	6862 9 2	2	8611 19	32	9688 9
54	17660 314	54	4470 22	20	6908 9,0	4	8649 17,5	34	9706 8
56	18288 312 5	56	4514 21,5	3,25	6953 8,8	6	8684 17	36	9722 7,5
58	18913 311,5	58	4557 21,5	30	6997 8,6	8	8718 16	38	9737 6,5
0,60	19536 310	1,60	4600 21	35	7040 8,2	8,0	8750 15 5	40	9750 6
62	20156 308 5	62	4642 21	40	7081 8,2	2	8781 14 5	42	9762 5,5
64	20773 307	64	4684 21	45	7122 7,8	4	8810 13 5	44	9773 5
66	21387 305	66	4726 20 5	3,50	7161 7,8	6	8837 13 5	46	9783 4,5
68	21997 304	68	4767 20 5	55	7200 7,4	8	8864 12,5	48	9792 4
0,70	22605 302 5	1,70	4808 20	60	7237 7,2	9,0	8889 12	50	9800 3,6
72	23210 300,5	72	4848 20	65	7273 7,2	2	8913 11,5	55	9818 3,0
74	23811 299	74	4888 20	70	7309 7,0	4	8936 11	60	9833 2,6
76	24409 297	76	4928 19,5	3,75	7344 6,8	6	8958 11	65	9846 2,2
78	25003 295,5	78	4967 19,5	80	7378 6,8	8	8981 10	70	9857 2,0
0,80	25594 294	1,80	5006 19,5	85	7412 6,4	10,0	9000 10	75	9867 1,6
82	26182 292	82	5045 19	90	7444 6,4	2	9020 9,5	80	9875 1,4
84	26766 290	84	5083 19	95	7476 6,2	4	9039 9	90	9889 1,1
86	27346 288 5	86	5121 18,5	4,00	7507 0,	6	9057 8,5	100	9900 0,
88	27923 286,5	88	5158 18,5			8	9074 8,5		
0,90	28496 284,5	1,90	5195 18			11,0	9091 0,		
92	29065 282,5	92	5231 18						
94	29630 281	94	5267 18						
96	30192 279	96	5303 17,5						
98	30750 277	98	5338 17,5						
1,00	31304 0,	2,00	5373 0,						

Таблица 70. Функции Планка — Эйнштейна C_v и $\frac{U - U_0}{T}$

Θ/T	C_v	$\frac{U - U_0}{T}$	Θ/T	C_v	$\frac{U - U_0}{T}$	Θ/T	C_v	$\frac{U - U_0}{T}$
0,0	1,987	1,987	5,0	0,339	0,0	10,0	0,00	0,00
1	985	889	1	319	622	1	83	08
2	980	795	2	300	573	2	77	08
3	972	704	3	281	528	3	71	07
4	961	616	4	264	487	4	65	06
0,5	946	531	5,5	248	448	10,5	60	06
6	928	450	6	232	413	6	56	05
7	908	372	7	217	380	7	51	05
8	884	297	8	204	350	8	47	04
9	858	225	9	191	322	9	44	04
1,0	829	156	6,0	178	296	11,0	40	04
1	798	091	1	167	272	1	37	03
2	765	028	2	156	251	2	34	03
3	729	*968	3	145	230	3	31	03
4	692	911	4	136	212	4	29	03
1,5	653	856	6,5	127	194	11,5	27	02
6	612	804	6	118	179	6	25	02
7	570	755	7	110	164	7	23	02
8	527	708	8	103	151	8	21	02
9	483	664	9	096	138	9	19	02
2,0	439	622	7,0	0889	127	12,0	18	01
1	393	582	1	0828	116	1	16	0,00
2	348	545	2	0770	107	2	15	
3	302	509	3	0716	098	3	14	
4	256	476	4	0666	090	4	13	
2,5	210	444	7,5	0619	082	12,5	12	
6	164	414	6	0575	076	6	11	
7	119	387	7	0534	069	7	10	
8	074	360	8	0496	064	8	09	
9	030	336	9	0460	058	9	08	
3,0	*986	312	8,0	0427	053	13,0	08	
1	943	291	1	0396	049	1	07	
2	901	270	2	0367	045	2	06	
3	860	251	3	0340	041	3	06	
4	820	233	4	0315	038	4	05	
3,5	782	217	8,5	0292	034	13,5	05	
6	744	201	6	0271	031	6	05	
7	707	186	7	0251	029	7	04	
8	672	173	8	0232	026	8	04	
9	637	160	9	0215	024	9	04	
4,0	604	148	9,0	0199	022	14,0	03	
1	572	137	1	0184	020	1	03	
2	542	127	2	0170	018	2	03	
3	512	118	3	0157	017	3	03	
4	484	109	4	0145	015	4	02	
4,5	457	1004	9,5	0134	014	14,5	02	
6	431	0928	6	0124	013	6	02	
7	407	0857	7	0115	012	7	02	
8	383	0791	8	0106	011	8	02	
9	361	0730	9	0098	010	9	01	
5,0	339	0674	10,0	0090	009	15,0	01	
	0,	0,		0,	0,0		0,00	

Эйнштейну, как универсальные функции от Θ/T . Для случая колебания частиц с одной степенью свободы эти функции имеют вид

$$C_v = R x^2 e^x (e^x - 1)^{-2},$$

$$\frac{U - U_0}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T C_v dT = R x (e^x - 1)^{-1},$$

$$\frac{F - F_0}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T C_v dT - \int_0^T \frac{C_v}{T} dT = R \ln(1 - e^{-x}),$$

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T} dT = \frac{U - U_0}{T} - \frac{F - F_0}{T},$$

где $x = \frac{\Theta}{T}$.

Таблицы 70 и 71 дают значения этих функций в *кал/град·мол*; для газовой постоянной взято значение $R = 1,987$ *кал/град·мол*.

Асимптотическое поведение функций Планка — Эйнштейна при $x \gg 1$ описывается формулами:

$$C_v = Rx^2 e^{-x}, \quad \frac{U - U_0}{T} \approx Rxe^{-x}, \quad -\frac{F - F_0}{T} \approx Re^{-x}, \quad S \approx R(1 + x)e^{-x}.$$

Таблица 71. Функции Планка — Эйнштейна $-\frac{F - F_0}{T}$ и S

Θ/T	$-\frac{F - F_0}{T}$	S	Θ/T	$-\frac{F - F_0}{T}$	S	Θ/T	$-\frac{F - F_0}{T}$	S
0,0	∞	∞	2,5	0,170	0,614	5,0	0,013	0,081
1	4,674	6,563	6	0,020	0,113	1	0,12	0,74
2	3,393	5,188	7	0,018	0,104	2	0,11	0,68
3	2,683	4,387	8	0,016	0,096	3	0,10	0,63
4	2,205	3,821	9	0,015	0,088	4	0,09	0,58
0,5	1,853	3,385	3,0	0,067	0,301	5,5	0,08	0,53
6	1,581	3,032	1	0,081	0,277	6	0,07	0,49
7	1,364	2,736	6	0,055	0,256	7	0,07	0,45
8	1,185	2,483	7	0,050	0,236	8	0,06	0,41
9	1,037	2,262	8	0,045	0,218	9	0,05	0,38
1,0	0,911	2,068	9	0,041	0,201	6,0	0,05	0,35
1	0,804	1,895	4,0	0,037	0,185	1	0,04	0,32
2	0,712	1,740	1	0,033	0,170	2	0,04	0,29
3	0,632	1,600	2	0,029	0,157	3	0,04	0,27
4	0,563	1,473	3	0,027	0,145	4	0,03	0,24
1,5	0,502	1,358	4	0,025	0,133	6,5	0,03	0,22
6	0,448	1,252	4,5	0,022	0,123	6	0,03	0,21
7	0,401	1,156	6	0,020	0,113	7	0,02	0,19
8	0,359	1,067	7	0,018	0,104	8	0,02	0,17
9	0,322	0,986	8	0,016	0,096	9	0,02	0,16
2,0	0,289	0,911	9	0,015	0,088	7,0	0,02	0,15
1	0,260	0,842	5,0	0,013	0,081		0,0	0,0
2	0,233	0,778		0,	0,			
3	0,210	0,719						
4	0,189	0,665						
2,5	0,170	0,614						

2. Функции Дебая

Если колеблющиеся частицы взаимодействуют друг с другом (случай твердого тела), то вместо фиксированной частоты ν получается спектр частот. В этом случае тоже можно ввести понятие характеристической температуры Θ так, чтобы атомная теплоемкость C_v и другие указанные выше величины являлись универсальными функциями от Θ/T . Если определить функцию

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} d\xi,$$

Таблица 72. Функции Дебая C_v и $\frac{U-U_0}{T}$

Θ/T	C_v	$\frac{U-U_0}{T}$	Θ/T	C_v	$\frac{U-U_0}{T}$	Θ/T	C_v	$\frac{U-U_0}{T}$
0,0	5 961	5,9610	5,0	2,197	0,7010	10,0	0,4520	0,150
1	5,958	5,7404	1	2,128	6718	1	4394	117
2	5,949	5,5258	2	2,060	6439	2	4273	085
3	5,934	5,3172	3	1,994	6173	3	4157	055
4	5,914	5,1144	4	1,930	5919	4	4044	025
0,5	5,887	4,9176	5,5	1,867	5677	10,5	3935	*9966
6	5,855	4,7266	6	1,807	5447	6	3829	9691
7	5,817	4 5414	7	1,748	5226	7	3727	9426
8	5,775	4,3620	8	1,692	5016	8	3629	9170
9	5,726	4,1883	9	1,637	4816	9	3533	8924
1,0	5,673	4,0202	6,0	1,584	4625	11 0	3441	8685
1	5,615	3,8576	1	1,532	4442	1	3352	8456
2	5,553	3,7006	2	1,482	4268	2	3266	8234
3	5,486	3,5489	3	1,433	4102	3	3183	8019
4	5,415	3,4025	4	1,387	3943	4	3102	7812
1,5	5,341	3,2613	6,5	1,342	3791	11,5	3024	7612
6	5 263	3,1252	6	1,298	3647	6	2948	7419
7	5,181	2,9941	7	1,256	3509	7	2875	7232
8	5,097	2,8679	8	1,215	3377	8	2804	7051
9	5,010	2,7464	9	1,176	3250	9	2736	6876
2,0	4 920	2,6296	7,0	1,138	3130	12,0	2669	6706
1	4 829	2,5173	1	1,101	3015	1	2605	6542
2	4,735	2,4094	2	1,066	2905	2	2543	6384
3	4,640	2,3058	3	1,031	2799	3	2482	6230
4	4,544	2,2064	4	0,9985	2699	4	2423	6081
2,5	4,446	2,1110	7,5	0,9667	2602	12,5	2367	5937
6	4,348	2,0195	6	0 9360	2510	6	2312	5798
7	4,249	1,9319	7	0,9064	2422	7	2258	5662
8	4,149	1,8479	8	0,8778	2338	8	2206	5531
9	4,050	1,7674	9	0,8503	2257	9	2156	5404
3,0	3,951	1,6904	8,0	0,8237	2179	13,0	2107	5281
1	3,852	1,6167	1	0,7981	2105	1	2060	5161
2	3,753	1,5462	2	0,7734	2034	2	2014	5045
3	3,655	1,4787	3	0,7496	1966	3	1969	4932
4	3 558	1,4143	4	0,7266	1901	4	1926	4823
3,5	3,462	1,3526	8,5	0,7044	1838	13,5	1883	4717
6	3 366	1,2937	6	0,6830	1778	6	1843	4614
7	3 272	1,2374	7	0,6624	1721	7	1803	4514
8	3 180	1,1837	8	0 6425	1666	8	1764	4417
9	3 088	1,1323	9	0,6234	1613	9	1727	4322
4,0	2 999	1,0833	9,0	0,6048	1562	14,0	1690	4230
1	2 911	1,0365	1	0,5870	1513	1	1655	4141
2	2 824	0,9919	2	0,5698	1466	2	1620	4054
3	2 739	0,9493	3	0,5532	1421	3	1586	3970
4	2,656	0,9086	4	0,5371	1378	4	1554	3888
4 5	2 575	0,8698	9,5	0,5216	1336	14,5	1522	3808
6	2,496	0,8328	6	0,5067	1296	6	1491	3731
7	2,420	0,7978	7	0,4923	1257	7	1461	3655
8	2,343	0,7638	8	0,4784	1220	8	1432	3581
9	2,269	0,7316	9	0,4649	1185	9	1403	3510
5,0	2,197	0,7010	10,0	0,4520	1150	15,0	1375	3440
					0,		0,	0,0

Таблица 73. Функции Дебая — $\frac{F-F_0}{T}$ и S

Θ/T	$-\frac{F-F_0}{T}$	S	Θ/T	$-\frac{F-F_0}{T}$	S	Θ/T	$-\frac{F-F_0}{T}$	S
0,0	∞	∞	5,0	0,2740	0,9750	10,0	0,0386	0,1536
1	15,935	21,675	1	2604	9321	1	375	492
2	12,022	17,548	2	2476	8915	2	364	449
3	9,821	15,138	3	2356	8529	3	354	408
4	8,319	13,434	4	2243	8162	4	343	369
0,5	7,199	12,117	5,5	2137	7814	10,5	334	330
6	6,320	11,046	6	2036	7483	6	325	294
7	5,605	10,147	7	1942	7168	7	316	258
8	5,010	9,372	8	1853	6869	8	307	224
9	4,507	8,695	9	1769	6585	9	299	191
1,0	4,074	8,094	6,0	1689	6314	11,0	291	159
1	3,699	7,556	1	1615	6057	1	283	128
2	3,370	7,070	2	1544	5812	2	275	099
3	3,080	6,629	3	1477	5578	3	268	070
4	2,822	6,225	4	1413	5356	4	261	042
1,5	2,592	5,853	6,5	1354	5145	11,5	254	016
6	2,386	5,511	6	1297	4943	6	248	* 990
7	2,201	5,195	7	1243	4751	7	242	965
8	2,033	4,901	8	1192	4568	8	235	941
9	1,881	4,628	9	1144	4394	9	230	917
2,0	1,7433	4,373	7,0	1098	4228	12,0	224	895
1	1,6178	4,135	1	1054	4069	1	218	873
2	1,5032	3,913	2	1013	3917	2	213	851
3	1,3984	3,704	3	0973	3773	3	208	831
4	1,3024	3,509	4	0936	3635	4	203	811
2,5	1,2142	3,325	7,5	0900	3503	12,5	198	792
6	1,1332	3,153	6	0867	3377	6	193	773
7	1,0587	2,991	7	0834	3256	7	189	755
8	0,9899	2,838	8	0804	3141	8	185	738
9	0,9265	2,694	9	0774	3031	9	180	721
3,0	0,8679	2,558	8,0	0746	2926	13,0	176	704
1	0,8137	2,430	1	0720	2825	1	172	688
2	0,7635	2,310	2	0694	2729	2	168	673
3	0,7169	2,196	3	0670	2636	3	165	658
4	0,6738	2,088	4	0647	2548	4	161	643
3,5	0,6337	1,986	8,5	0623	2463	13,5	157	629
6	0,5964	1,890	6	0604	2382	6	154	615
7	0,5617	1,799	7	0584	2304	7	151	602
8	0,5294	1,713	8	0564	2230	8	147	589
9	0,4993	1,632	9	0546	2158	9	144	576
4,0	0,4713	1,5546	9,0	0528	2090	14,0	141	564
1	0,4451	1,4817	1	0511	2024	1	138	552
2	0,4207	1,4126	2	0495	1961	2	135	541
3	0,3979	1,3471	3	0479	1900	3	132	529
4	0,3765	1,2851	4	0464	1842	4	130	518
4,5	0,3565	1,2263	9,5	0450	1786	14,5	127	508
6	0,3378	1,1706	6	0436	1732	6	124	497
7	0,3204	1,1183	7	0423	1680	7	122	487
8	0,3039	1,0676	8	0410	1630	8	119	478
9	0,2884	1,0201	9	0398	1582	9	117	468
5,0	0,2740	0,9750	10,0	0386	1536	15,0	115	459
				0,	0,		0,0	0,0

то, согласно Дебаю, для случая колебаний частиц с тремя степенями свободы имеем:

$$C_v = 3R [4D(x) - 3x(e^x - 1)^{-1}], \quad \text{где} \quad x = \frac{\theta}{T}.$$

Далее, так же как и выше, можно получить выражения для $\frac{U - U_0}{T}$, $\frac{F - F_0}{T}$ и S ; в частности:

$$\frac{U - U_0}{T} = 3RD(x).$$

Таблицы 72 и 73 дают значения этих функций в *кал/град·мол*; для газовой постоянной взято значение $R = 1,987$ *кал/град·мол*.

Асимптотическое поведение функций Дебая при $x \gg 1$ описывается формулами:

$$C_v \approx \frac{12\pi^4}{5} Rx^3, \quad \frac{U - U_0}{T} \approx \frac{3\pi^4}{5} Rx^3, \quad -\frac{F - F_0}{T} \approx \frac{\pi^4}{5} Rx^3, \quad S \approx \frac{4\pi^4}{5} Rx^3.$$

Д. ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ОТ ИСТОЧНИКОВ

Пусть в бесконечном однородном не движущемся теле помещен в начальный момент источник тепла в виде точки ($n=3$), бесконечной прямой ($n=2$), или плоскости ($n=1$). Никаких других источников тепла в этот и в последующие моменты времени нет. Пусть соответствующий интеграл от температуры

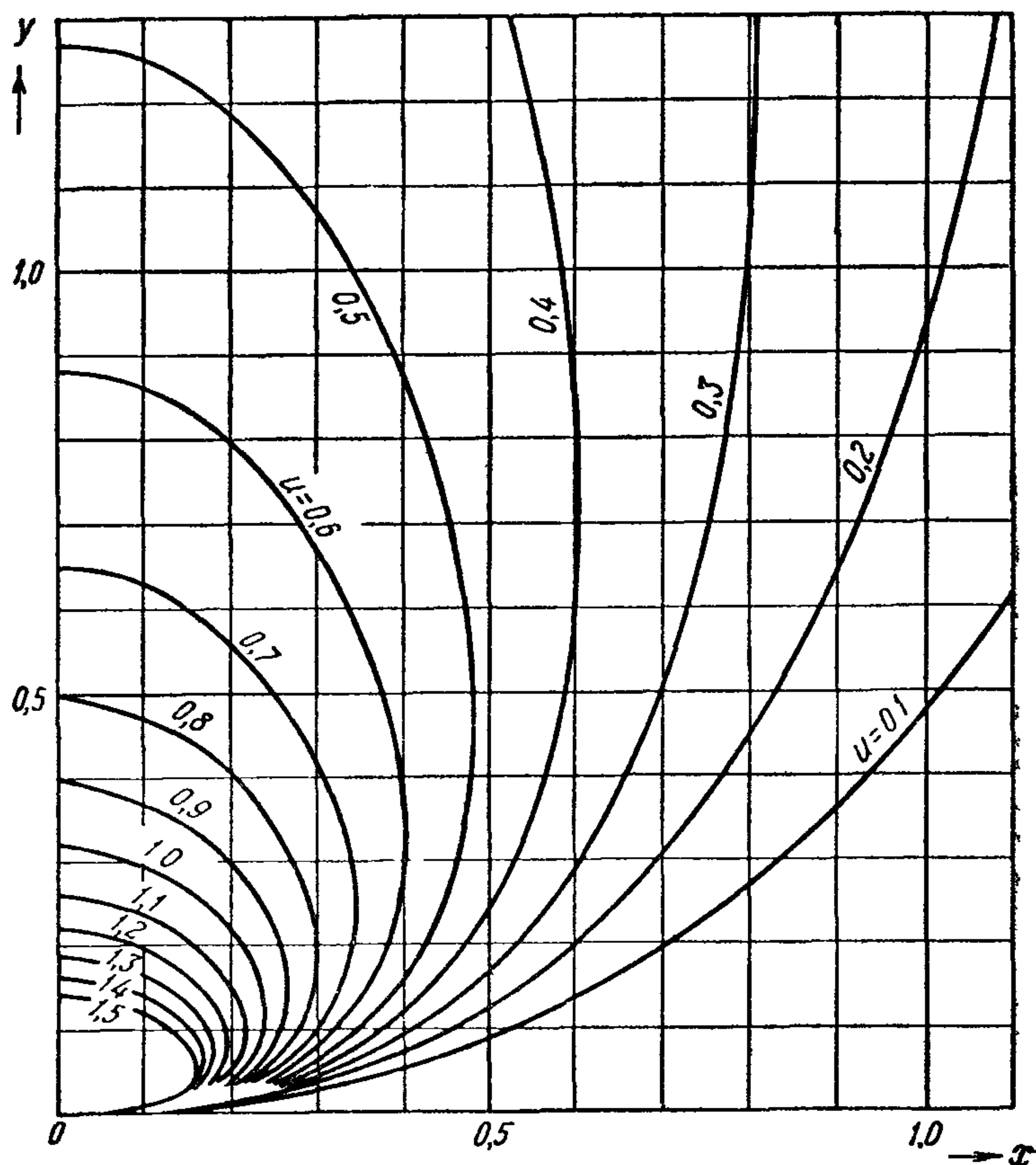


Рис. 207. Функция распространения тепла от нагретой плоскости.

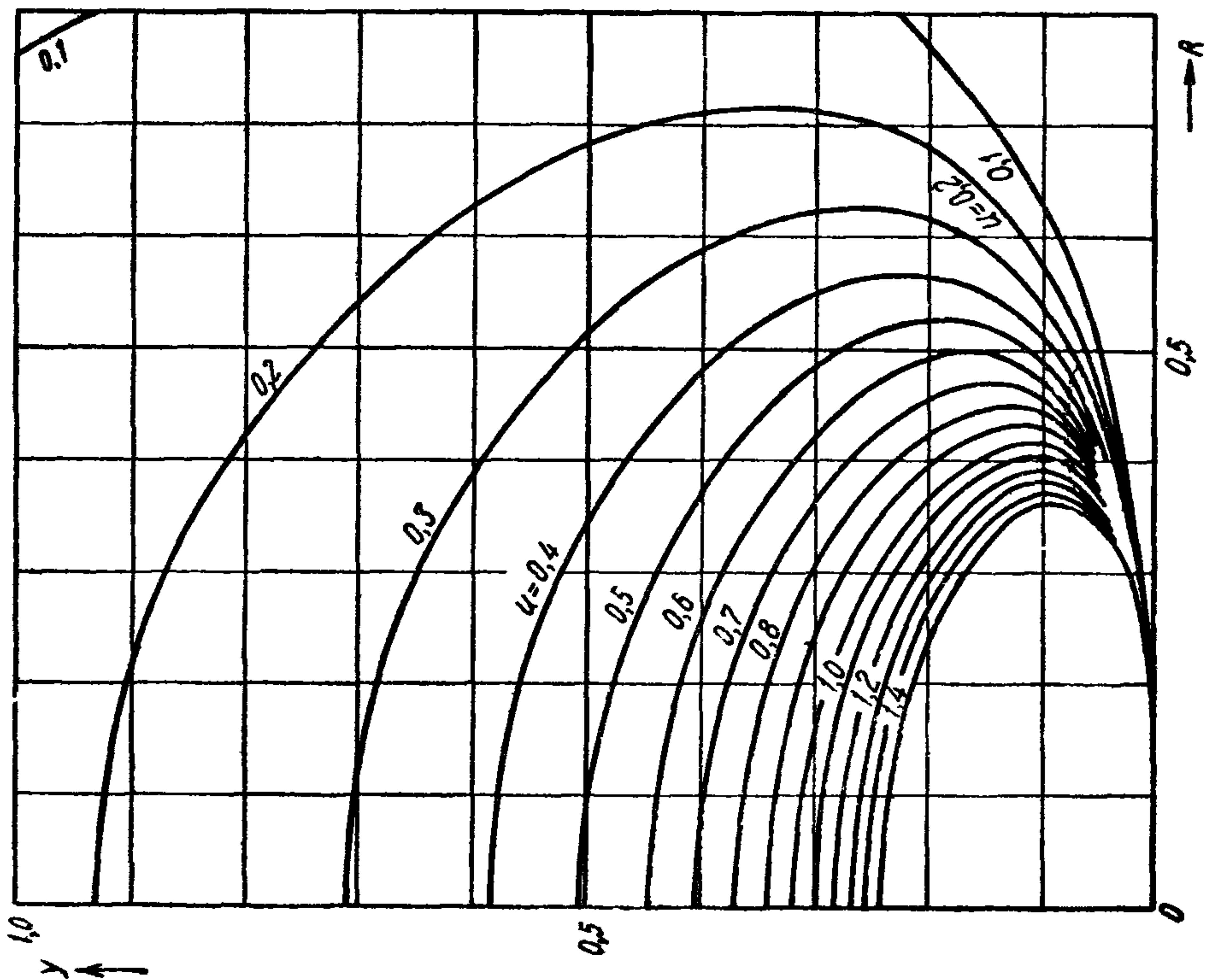


Рис. 209. Функция распространения тепла от нагретой точки

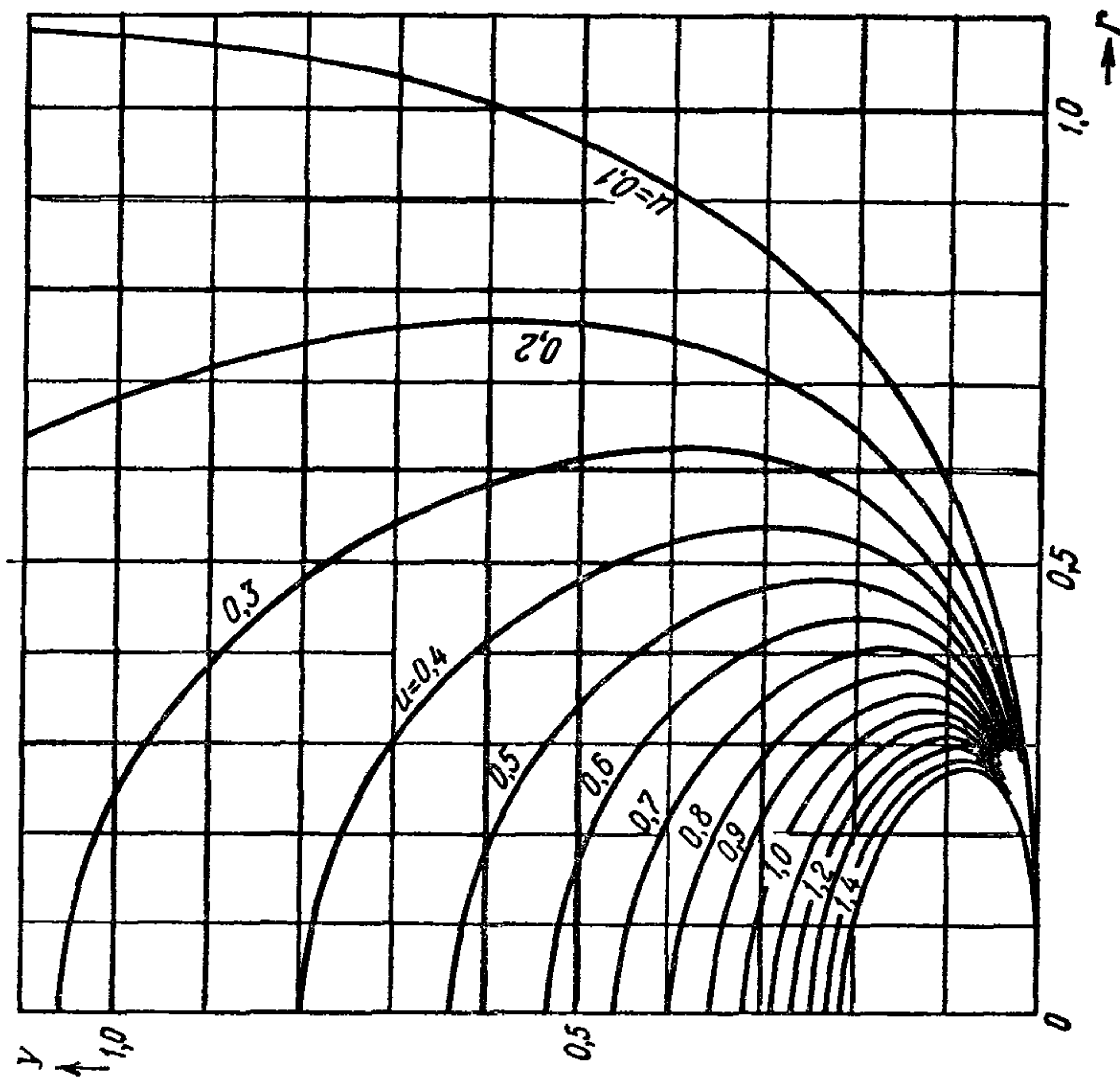


Рис. 208. Функция распространения тепла от нагретой прямой.

распространенный на все пространство, который пропорционален этому количеству тепла u , следовательно, не зависит от времени, равен единице. Тогда в момент времени $t = \frac{y}{4a^2}$ (a^2 — коэффициент теплопроводности тела) температура u на расстоянии x от начала координат будет:

$$u = \frac{e^{-\frac{x^2}{y}}}{\sqrt{(\pi y)^n}}.$$

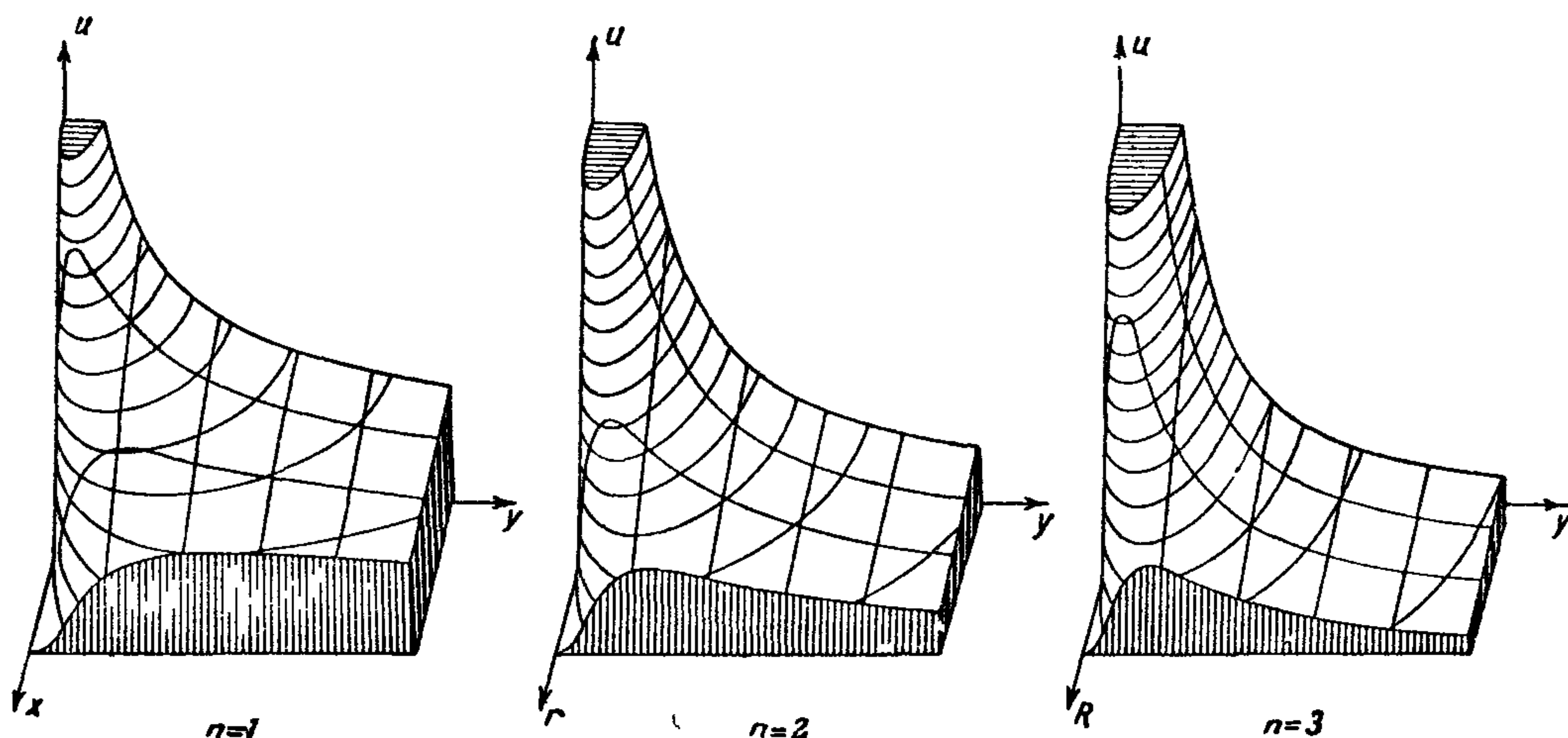


Рис 210. Функции распространения тепла от источников.

Рис. 207—210 представляют эти функции для случаев $n=1$ (нагретая плоскость, изотермы — плоскости), $n=2$ (нагретая прямая изотермы — круговые цилиндры $x=r$), $n=3$ (нагретая точка, изотермы — сферические поверхности $x=R$).

БИБЛИОГРАФИЯ

Сокращения: D —десятичные знаки, S —значащие цифры. [Запись « $\lg \Gamma(x)$ для $x=1(.001)^2, 12D$ » после названия таблицы (см. V, [12]) означает, что в этой таблице приведены значения функции $\lg \Gamma(x)$ для x от 1 до 2 через каждые 0,001 с двенадцатью десятичными знаками.]

Среди перечисленных ниже работ, выбранных из обширной литературы по специальным функциям, прежде всего указаны общие руководства. Затем для каждого раздела настоящей книги приведен список работ, специально посвященных тем функциям, о которых идет речь в этом разделе.

Руководства

Смирнов В. И., Курс высшей математики, Физматгиз, т. I, 1962; т. III, ч. II, 1958.

Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, Физматгиз, т. I, 1962; т. II, 1963.

Кузнецов Д. С., Специальные функции, Высшая школа, 1962.

Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.

Маделунг Э., Математический аппарат физики, Физматгиз, 1961.

Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, т. 1, 1958, т. 2, 1960.

Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F. G., Higher transcendental functions, т. I—III, New York—Toronto—London, 1953—1955.

Сборники формул

Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

Диткин В. А. и Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление (серия «Справочная математическая библиотека»), Физматгиз, 1961.

Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1961.

Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т., Функции математической физики, Физматгиз, 1963.

Magnus W. und Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1948.

Таблицы

В следующих книгах содержатся перечни математических таблиц, вышедших в различных странах в разные годы.

Лебедев А. В. и Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, Изд-во АН СССР, 1956.

Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам (Дополнение 1), Изд-во АН СССР, 1959.

Fletcher A., Miller C. P., Rosenhead L. and Comrie L. J., An index of mathematical tables, I, II, Oxford, 1962.

Текущие сообщения о всех новых работах в области математических таблиц даются журналом: Mathematical tables and other aids to computation, a Quarterly Journal published by the National Research Council, Washington.

[I] — [IV] ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Руководства

[1] Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Янпольский А. Р., Математический анализ (вычисление элементарных функций), Физматгиз, 1963.

[2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. I, Физматгиз, 1962.

[3] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, т. 1, Физматгиз, 1962.

- [4] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, Физматгиз, 1957.
 [5] Янпольский А. Р., Гиперболические функции, Физматгиз, 1960.

Сборники формул

- [6] Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике, Физматгиз, 1962.

Таблицы

- [7] Ангелов С. А., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, Гостехиздат, 1957.
 [8] Андреев П. П., Математические таблицы, Госстатиздат, 1958.
 [9] Барлоу Питер, Таблицы Барлоу квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел от 1 до 15 000, ИЛ, 1964.
 [10] Библиотека математических таблиц, вып. 9, Многозначные таблицы элементарных функции ($\sin x$, $\cos x$, e^x , e^{-x}), ВЦ АН СССР, 1960.
 [11] Библиотека математических таблиц, вып. 10, Таблицы $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$, ВЦ АН СССР, 1960.
 [12] Библиотека математических таблиц, вып. 11, Таблицы обратных гиперболических функций, ВЦ АН СССР, 1960.
 [13] Библиотека математических таблиц, вып. 7 и 8, Таблицы натуральных логарифмов, ВЦ АН СССР, тт. I, II, 1960.
 [14] Библиотека математических таблиц, вып. 1, Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла, ВЦ АН СССР, 1958.
 [15] Библиотека математических таблиц, вып. 6, Таблицы круговых и гиперболических тангенсов и котангенсов в радианной мере угла, ВЦ АН СССР, 1959.
 [16] Библиотека математических таблиц, вып. 15 и 16, Томсон А., Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, ВЦ АН СССР, тт. 1, 2, 1961.
 [17] Брадис В. М., Четырехзначные математические таблицы, Учпедгиз, 1963.
 [18] Бремикер К., Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с шестью десятичными знаками, Физматгиз, 1962.
 [19] Вега Г., Таблицы семизначных логарифмов, Геодезиздат, 1962.
 [20] Восьмизначные таблицы тригонометрических функций, Геодезиздат, 1959.
 [21] Милн-Томсон Л. М. и Комри Л. Дж., Четырехзначные математические таблицы, Физматгиз, 1961.
 [22] Пятизначные таблицы натуральных значений тригонометрических величин, их логарифмов и логарифмов чисел, Геодезиздат, 1962.
 [23] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1962.
 [24] Субботин М. Ф., Многозначные таблицы логарифмов, Изд-во АН СССР, 1940.
 [25] Таблицы e^x и e^{-x} , под ред В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1955.
 [26] Хренов Л. С., Пятизначные таблицы тригонометрических функций, Физматгиз, 1962.
 [27] Хренов Л. С., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, Физматгиз, 1960.
 [28] Хренов Л. С., Семизначные таблицы тригонометрических функций, Гостехиздат, 1956.
 [29] Cohen L., Formulae and tables for the calculation of alternating current problems, New York, 1913. Содержит в конце таблицы sh и ch от $z=0$ до $0,98+i\cdot 1,00$ с интервалами в $0,02$ и $i\cdot 0,02$.
 [30] Hawelka R., Vierstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie ihrer Umkehrfunktionen im komplexen in Schritten von $\frac{\pi}{2} 0,02$ und $i\cdot 0,02$, Berlin, 1931.
 [31] Kennelly A. E., Tables of complex hyperbolic and circular functions, Cambridge, 1914. Содержит много таблиц, например sh и ch от $z=0$ до $3,95+i\frac{\pi}{2}\cdot 2,00$ с интервалами в $0,05$ и $i\frac{\pi}{2}\cdot 0,05$.

V. ГАММА-ФУНКЦИИ

Руководства

- [1] Артин Е., Введение в теорию гамма-функции, ГТТИ, 1934.
 [2] Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., см. I—IV, [6].
 [3] Кратцер А. и Франц В., Трансцендентные функции, ИЛ, 1963.
 [4] Кузнецов Д. С., Специальные функции, Высшая школа, 1962.
 [5] Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.

- [6] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.
- [7] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Физматгиз, 1958.
- [8] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. I—IV, [3].
- [9] Böhmer P. E., Differenzengleichungen und bestimmte Integrale, Leipzig, 1939.
- [10] Lösch F. und Schoblik F., Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen, Leipzig, 1951.
- [11] Nielsen N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906.

Таблицы

- [12] Абрамов А. А. Таблицы $\ln \Gamma(z)$ в комплексной области, Изд-во АН СССР, 1953. $\ln \Gamma(x+iy)$ для $x=1(.01)2$, $y=0(.01)4$; 6D.
- [13] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1962. $\Gamma(x)$ для $x=1(.001)2$; 5D; $\Gamma(n+1)$ для $n=1(1)50$; 6S.
- [14] Таблицы специальных функций, под ред. Я. Н. Шпильрейна, ГТТИ 1934. $\Gamma(x)$ для $x=1(.002)2,5D$.
- [15] Legendre A. M., Tables of the logarithms of the complete Γ -function to twelve figures. Tracts for computers Nr. IV, London, 1921. $\lg \Gamma(x)$ для $x=1(.001)2$, 12D.
- [16] Hayashi K., Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktion, Berlin, 1926. $\lg \Gamma(x)$ для $x=0(.01)1(.00001)1.001(.0001)1.1(.001)2(.01)3$, 8—13D; $\Gamma(x)$ для $x=-5(.01)1(.001)2(.01)5,7-8D$.
- [17] Davis H. T., Tables of the higher mathematical functions I, II, Bloomington, 1933—1935. I: $\lg \Gamma(x)$ для $x=-10(.01)1(.001)2(.01)11(.1)101$, 12—15D; $1(.0001)1.1$, 10D; $1(.01)2,20D$. $\Gamma(x)$ для $x=-10(.01)1$, 10S; $1(.001)2$, 10D; $1(.0001)1.1$, 10D. $\psi(x)$ для $x=-10(.01)1(.001)2(.02)20$, 10—15D; $0.5(.5)100$, 16D; $100(1)450$, 10D; $1(.0001)1.1$, 10D; $1(.01)2$, 18D. $\lg \psi(x)$ для $x=-10(.01)1(.001)2$, 10D; $1(.0001)1.1$, 10D. $1/\Gamma(re^{i\theta})=P(r, \theta)+Q(r, \theta)$ для $r=-1(.1)1$, $\theta=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$, 12D. II: $\psi^{(n)}(x)$, $n=1, 2, 3, 4$ для $x=-10(.1)0(.01)4(.02)20(.1)100$, 10—19D. $\ln \psi^{(n)}(x)$, $n=1, 2, 3, 4$ для $x=-10(.1)0(.01)1$, 10D.
- [18] British Association Mathematical Tables I: Circular and hyperbolic functions, exponential, sine and cosine integrals, factorial function and allied functions, Hermitian probability functions, 3rd ed., Cambridge, 1951. $\Gamma(x)$ для $x=1(.01)2$, 12D. $\psi^{(n)}(x)$, $n=0, 1, 2, 3$ для $x=1(.01)2$, 11(.1)61, 10—12D. $\int_0^x \lg \Gamma(1+t) dt$ для $x=0(.01)1$, 10D.
- [19] Ghizzetti A., Tavola della funzione euleriana $\Gamma(z)$ per valori complessi dell' argomento, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. VIII, Ser. 3 (1947), 254—257. $\Gamma(x+iy)$ для $x=4(.1)5$, $y=0(.1)1$, 5S.
- [20] Stanley J. P. and Wilkes M. V., Table of the reciprocal of the gamma function for complex argument, Toronto, 1950. $1/\Gamma(x+iy)$ для $x=-0.5(.01)0.5$, $y=0(.01)1$, 6D.
- [21] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 34: Table of the gamma function for complex arguments, Washington, 1954. $\ln \Gamma(x+iy)$ для $x=0(.1)10$, $y=0(.1)10$, 12D.
- [22] Pearson K., Tables of the incomplete Γ -function, London, 1922.

$$I(u, p) = \int_0^x e^{-t} t^p dt / \int_0^\infty e^{-t} t^p dt$$
 с $u=x/\sqrt{p+1}$ для $p=-1(.05)0(.1)5(.2)50$, $u=0(.1)$ до $I(u, p)=1,7D$; затем для $p=-1(.01)-0.75$, $u=0(.1)6$, 5D, $\lg I(u, p)/u^{p+1}$ для $p=-1(.05)0(.1)10$, $u=0(.1)1.5$, 8D.
- [23] Pearson K., Tables of the incomplete beta-function, London, 1934. $I_x(p, q) = \int_0^x x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, для $p, q=0.5(.5)11(1)50$, $p \geq q$, $x=0(.01)1$ и соответствующие значения знаменателя $B(p, q)=B_1(p, q)$, 7D.

VI. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Руководства

- [1] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [2] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. I—IV, [3].
- [3] Böhmer P. E., см. V, [9].
- [4] Losch F. und Schoblik F., см. V, [10].
- [5] Nielsen N., Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transcendenten, Leipzig, 1906.

Таблицы

- [6] Таблицы интегральной показательной функции, под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1954. $Ei(x)$, $-Ei(-x)$ для $x=0$ (.0001) 1, 3 (.001) 3 (.0005) 10 (.1) 15; 7S.
- [7] Таблицы интегрального синуса и косинуса, под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1954. $Si(x)$, $Ci(x)$ для $x=0$ (.0001) 2 (.001) 10 (.005) 100; 7D.
- [8] Карпов К. А. и Разумовский С. Н., Таблицы интегрального логарифма, Изд-во АН СССР, 1956. $li(x)$ для $x=0$ (.0001) 2,5 (.001) 20 (.01) 200 (.1) 500 (1) 10000; 7S.
- [9] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 5, 6]: Tables of sine, cosine and exponential integrals, I, II. Washington, 1940. I: $-Ei(-x)$, $Ei^*(x)$, $Si(x)$, $Ci(x)$ для $x=0$ (.0001) 2, 9D; 0 (.1) 10, 9D. $-Ei(-x) + \ln x$, $Ei^*(x) - \ln x$, $Ci(x) - \ln x$ для $x=0$ (.0001) 0.01, 9D. II: $-Ei(-x)$ для $x=0$ (.001) 10, 9S; 10 (.1) 15, 14 D. $Ei^*(x)$ для $x=0$ (.001) 10, 10 S; 10 (.1) 15, 10—11 S. $Si(x)$, $Ci(x)$, для $x=0$ (.001) 10 (.1) 20 (.2) 40, 10 D.
- [10] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 32: Table of sine and cosine integrals for arguments from 10 to 100, Washington, 1954. $Si(x)$, $Ci(x)$ для $x=10$ (.01) 100, 10 D.
- [11] British Association Mathematical Tables I: $-Ei(-x)$, $Ei^*(x)$ для $x=5$ (.1) 15, 10—11 S. $Si(x)$, $Ci(x)$ для $x=5$ (.1) 20 (.2) 40, 10 D. $Ei(-x) - \ln x$, $Ei^*(x) - \ln x$, $Si(x)$, $Ci(x) - \ln x$ для $x=0$ (.1) 5, 11 D.
- [12] Herman R. C. and Meyer Ch. F., The thermoluminescence and conductivity of phosphors, J. Appl. Phys. 17 (1946), 748. $-Ei(-x)$ для $x=15$ (.1) 20, 6 S.
- [13] Akahira T., Sci. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res., p. 181—215, Table 3, Tokyo, 1929. $-Ei(-x)$ для $x=20$ (.02) 50, 5—6 S.
- [14] Tani K., Tables of $si(x)$ and $ci(x)$ for the range $x=0$ to $x=50$, Tokyo, 1931. $Si(x)$ для $x=0$ (.01) 50, 6 D; $Ci(x)$ для $x=0$ (.0001) 0.05 (.001) 1 (.01) 50, 6 D.

VII. ИНТЕГРАЛ ОШИБОК И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ФУНКЦИИ

Руководства

- [1] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, ИЛ, 1960.
- [2] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
- [3] Зоммерфельд А., Волновая механика, ГТТИ, 1933.
- [4] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, т. II, Физматгиз, 1963.
- [5] Böhmer P. E., см. V, [9].
- [6] Lösch F. und Schoblik F., см. V, [10].
- [7] Nielsen N., см. VI, [5].

Таблицы

- [8] Башарин Г. П., Таблицы вероятностей и средних квадратических отклонений потерь на полноступном пучке линий, Изд-во АН СССР, 1962.
- [9] Берлянд О. С., Гаврилова Р. И. и Прудников А. П., Таблицы интегральных ошибок и полиномов Эрмита, Изд-во АН БССР, 1961.
- [10] Библиотека математических таблиц, вып. 2, 3, Таблицы вероятностных функций, ВЦ АН СССР, тт. I, II, 1958.
- [11] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, т. II, ИЛ, 1949. $C(x)$, $S(x)$ для $x=0$ (.02) 1 (.5) 50; 6D.
- [12] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., см. V, [13], $\Phi(x)$ для $x=0$ (.001) 2,5 (.01) 3; 5—7 D.
- [13] Таблицы, под ред. Я. Н. Шпильрейна, см. V, [14]. $\Phi(x)$ для $x=0$ (.001) 1,5 (.01) 2,9; 4 D.
- [14] Смирнов Н. В. и Большев Л. Н., Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения, Изд-во АН СССР, 1962.
- [15] Таблицы интегралов Френеля, под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1953. $C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ и $S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ для $x=0$ (.001) 25, 7 D. Вспомогательные таблицы для малых x .
- [16] Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и ее нормальных производных, под ред. Н. В. Смирнова, Изд-во АН СССР, 1960.
- [17] Таблицы функций распределения и плотностей распределения Стюдента, под ред. Н. В. Смирнова, Изд-во АН СССР, 1960.
- [18] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 41: Tables of the error function and its derivative $H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-a^2} da$ и $H'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Washington,

1954. $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ для $x=0(.0001) 1(.001) 5.6-6, 15 D$. $1-\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ для $x=4(.01) 10, 8 S$.
- [19] Markoff A. A. (Марков А. А.), Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin, 1912. $\Phi(x)$ для $x=0(.001) 2.5(.01) 3.79, 6 D$.
- [20] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 23: Tables of the normal probability functions $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ and $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-a^2/2} da$, Washington, 1953. $2\Phi(x)-1$, $\Phi'(x)$ для $x=0(.0001) 1(.001) 7.8-8.112$ и $8.285, 15 D$. $2[1-\Phi(x)]$, $\Phi'(x)$ для $x=6(.01) 10, 7 S$.
- [21] Harvard University, Computation Laboratory, Annals 23: Tables of the error function and of its first twenty derivatives, Cambridge, 1952. $\Phi(x)-\frac{1}{2}$, $\Phi^{(n)}(x)$, $n=1(1) 11$ для $x=0(.004) X, 6 D$ с $\Phi(X)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\Phi^{(n)}(X)=0$ в $6 D$. $\Phi^{(n)}(x)$, $n=12(1) 21$ для $x=0(.002) X, 7 S$ или $6 D$, где $\Phi^{(n)}(X)=0$ в $6 D$. Нули всех табулированных функций в $10 D$.
- [22] British Association Mathematical Tables VII. The probability integral, Cambridge, 1939. $F(x)=[1-\Phi(x)]/\Phi'(x)$ для $x=0(.1) 10, 24 D$; $0(.01) 10, 12 D$. $L(x)=-\ln[1-\Phi(x)]$ для $x=0(.1) 10, 24 D$, $0(.1) 10, 16 D$. $l(x)=-\lg[1-\Phi(x)]$ для $x=0(.1) 10, 12 D$; $0(.01) 10, 8 D$. Дополнительные таблицы для интерполяции посредством формулы Тейлора.
- [23] Pearson K., см. V, [22]. Таблица дает значения $E_n(x)$ при обозначении $E_n(x)=I(u, p)$, где $u=\sqrt{n}x^n$, $p=-\frac{n-1}{n}$ или $x=(u\sqrt{p+1})^{p+1}$, $n=\frac{1}{p+1}$.
- [24] Schumann W. O., Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen, Berlin, 1923. $\Gamma(5/4) E_4(x)$ для $x=0.1(.1) 1, 4 D$. $i^{-1} E_2(ix)$ для $x=0.1(.1) 2.6(.2) 7.4, 4-5 S$.
- [25] Terrill H. M. and Sweeny L., An extension of Dawson's table of the integral e^{x^2} , J. Franklin Inst. 237 (1944), 495-497; Table of the integral of e^{x^2} , J. Franklin Inst. 238 (1944), 220-222. $\int_0^x e^{x^2} dx$ для $x=0(.01) 2, 6 D$; $2(.01) 4, 7-9 D$.
- [26] Lohmander B. and Rittsten S., Table of the function $y=e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$, Lund, 1958. (From Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. 28 (1958), 45-52.) y для $x=0(.01) 3(.02) 5, 1/x=0(.005) 0.2, 10 D$; $x=0.5(.5) 10, 20 D$.
- [27] British Association Mathematical Tables I, см. V, [18]. $Hh_0(x)=\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$, $Hh_n(x)=\int_x^\infty Hh_{n-1}(t) dt$ для $n=0(1) 11, x=-7(.1) X$; $n=12(1) 17, x=-5(.1) X$; $n=18(1) 21, x=-2.5(.1) X$; $10 D$ X всюду ≤ 6.6 .
- [28] Pearsey T., Table of the Fresnel integral to six decimal places, Cambridge, 1957. $C(x)$, $S(x)$ для $x=0(.01) 1, 7 D$; $1(.01) 50, 6 D$.
- [29] Von Wijngaarden A. and Scheen W. L., Table of Fresnel integrals, Amsterdam, 1949. $C\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$, $S\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$ для $x=0(.01) 20, 5 D$.
- [30] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 21: A guide to tables of the normal probability integral, Washington, 1952.

VIII. ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

Руководства

- [1] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, ИЛ, 1953.
- [2] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [3] Ingham A. E., The distribution of prime numbers, Cambridge, 1932.
- [4] Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, II, New York, 1953.

Таблицы

- [5] Gram J. P., Tafeln für die Riemannsche Zetafunktion. Danske Vid. Selsk. Skrifter, Nat. Math. Afd. 10 (1925—26), 311—325. $\zeta(s)$ для $s = -24$ (.1)—16.5, 10 S; —16.4 (.1) 24, 10 D. $(s-1)\zeta(s)$ для $s = -2$ (.1) 0, 10 D; 0 (.1) 4, 11 D.
- [6] Peters J., Zehnstellige Logarithmentafel I, Berlin, 1922. $\zeta(n) - 1$ для $n = 2$ (1) 100, 32 D.
- [7] Titchmarsh E. C., The zeros of the Riemann zeta-function, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A151 (1935), 234—235 and 157 (1936), 261—263. 1) Сообщение о вычислении: 1) 195 нулей $\frac{1}{2} + it$, где $0 < t < 390$. 2) 1041 нулей $\frac{1}{2} + it$, где $0 < t < 1468$.
- [8] Lehmer D. H., Extended computation of the Riemann zeta-function, Mathematika 3 (1956), 102—108. Сообщение о вычислении первых 25 000 нулей $\frac{1}{2} + it$. Таблица отклонений от закона Грама.

IX. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Руководства

- [1] Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., см. I—IV, [6].
- [2] Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
- [3] Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, ч. 2, ГТТИ, 1933.
- [4] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.
- [5] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [6] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Физматгиз, 1957.
- [7] Эрмит Ш., Курс анализа, ОНТИ, 1936.
- [8] Byrd P. F. and Friedman M. D., Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954.
- [9] Gröbner W. und Hofreiter N., Integraltafel I, II, 2. Aufl., Wien und Innsbruck, 1957—1958.
- [10] Hancock H., Elliptic integrals, New York, 1917.
- [11] Westropp Roberts W. R., Elliptic and Hyperelliptic integrals and allied theory, Cambridge, 1938.

Таблицы

- [12] Беляков В. М., Кравцова Р. И. и Раппопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, Изд-во АН СССР, т. 1, 1962; т. 2, 1963.
- [13] Ветчинкин В. П., Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций с приложением сокращенных семизначных таблиц логарифмов и тригонометрических функций, Изд-во Воен.-возд. акад. РККА, 1935.
- [14] Глазенап С. П., Математические и астрономические таблицы (в двух частях), Изд-во АН СССР, 1932.
- [15] Самойлова-Яхонтова Н. С., Таблицы эллиптических интегралов, ОНТИ, 1935.
- [16] Legendre A. M., Tables of the complete and incomplete elliptic integrals. Reissued by K. Pearson, London, 1934 $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$, ($k = \sin \alpha$), для φ , $\alpha = 0^\circ$ (1°) 90° , 9—10 D. $\lg K(k)$, $\lg E(k)$, ($k = \sin \alpha$), для $\alpha = 0^\circ$ ($0^\circ 1$) 90° , 12—14 D.
- [17] Heuman C. A., Tables of complete elliptic integrals, J. Math. Physics 20 (1941), p. 127—206, 336. $2K(k)/\pi$, $2E(k)/\pi$, ($k = \sin \alpha$), для $\alpha = 0^\circ$ ($0^\circ 1$) 90° , 6 D. $2(\pi)[K + \ln(90 - \alpha)]$ для $\alpha = 65^\circ$ ($0^\circ 1$) 90° , 6 D. Полный интеграл 3-го рода

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}$$

для $\alpha = 0^\circ$ (1°) 90° , $\beta = 0^\circ$ (1°) 90° и $\alpha = 0^\circ$ ($0^\circ 1$) $5^\circ 9$, $\beta = 80^\circ$ (1°) 89° , 6 D.

- [18] Hayashi K., Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderen Funktionen, Berlin, 1930. $K(k)$, $K'(k)$, K'/K , K/K' для $k^2 = 0$ (.001) 1, 10—12 D; $k^2 = 0$ (10^{-7}) 10^{-5} (10^{-5}) 0.003, 8—10 D.
- [19] Hayashi K., Tafeln für die Differenzengleichung sowie für die Hyperbel-, Besselschen, elliptischen und anderen Funktionen, Berlin, 1933. $E(k)$, $E'(k)$ для $k^2 = 0$ (.001) 1, 10 D.

Х. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Руководства

- [1] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.
- [2] Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, 1933.
- [3] Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, ч. 1, ГТТИ, 1933.
- [4] Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, Изд-во АН СССР, 1941.
- [5] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., см. IX, [4].
- [6] Сикорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ, 1936.
- [7] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [8] Appell P. et Lacour E., Principes de la théorie des fonctions elliptiques, Paris, 1922.
- [9] Hurwitz A. und Courant R., Funktionentheorie, Berlin, 1929.
- [10] Neville E. H., Jacobian elliptic functions, Oxford, 1951.
- [11] Oberhettinger F. und Magnus W., Anwendungen der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1949.
- [12] Thomae J., Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen, Leipzig, 1905.
- [13] Tricomi F., Funzioni Ellittiche, Bologna, 1951.

Таблицы

- [14] Библиотека математических таблиц, вып. 13, Таблицы эллиптических функций, ВЦ АН СССР, 1961.
- [15] Мілн-Томсон Л., Еліптичні функції Якобі, ДНТБУ, 1933.
- [16] Schuler M. und Gebelein H., Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955. С использованием аргумента $z = \cos 2x = \cos(\pi u/K)$ и вспомогательных функций $G, H, \bar{G}, \bar{H}$, где $\vartheta_1(x) = 2q^{1/4} \sin x \bar{G}$, $\vartheta_2(x) = \bar{H}$, $\bar{G} = 1 - q^2 G$, $\bar{H} = 1 + qH$, даны таблицы: $G(q^2 z)$ для $q^2 = 0(.001) 0.1, z = -1(.05) 1, 9D$. $H(q^2, z)$ для $q^2 = 0(.002) 0.176, z = -1(.05) 1, 9D$. $\lg(\operatorname{sn} u/\sin x)$, $\lg(\operatorname{cn} u/\cos x)$, $\lg \operatorname{dn} u$ для $q = 0(.01) 0.55, z = -1(.05) 1, 8D$. α, q для $q^2 = 0(.001) 0.1, q^2 = 0(.002) 0.176$ с $0'.0001$ соотв. $7D$. $\alpha, -\lg \cos \alpha, K, K/E$ для $q = 0(.01) 0.55$ с $0'.01$ соотв. $8D$. $1/(1-q), K, K/E$ для $-\lg k' = -\lg \cos \alpha = 0(.005) 3$ с $8D$.
- [17] Schuler M. und Gebelein H., Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955. С использованием обозначений [16] даны таблицы: $G(q, z), \bar{H}(q, z)$ для $q = 0(.01) 0.5, z = -1(.1) 1, 5D$. $\lg(\operatorname{sn} u/\sin x)$, $\lg(\operatorname{cn} u/\cos x)$, $\lg \operatorname{dn} u$ для $q = 0(.01) 0.5, z = -1(.1) 1, 5D$. $\alpha, -\lg \cos \alpha, K, K/E$ для $q = 0(.01) 0.5$ с $0'.01$ соотв. $5D$. $\alpha, 1/(1-q), K, K/E$ для $-\lg k' = -\lg \cos \alpha = 0(.01) 2.5$ с $0'.01$ соотв. $5D$.
- [18] Adams E. P. and Hippisley R. L., Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions, Smithson. Misc. Coll. 74 (1922), 259—309; reprint 1939. K, E для $\alpha = 0^\circ (1^\circ) 10^\circ (5^\circ) 80^\circ (1^\circ) 90^\circ, 9-10D$. $\operatorname{am} u$ для $\alpha = 0^\circ (5^\circ) 80^\circ (1^\circ) 89^\circ, x = \pi u/2K = 0^\circ (1^\circ) 90^\circ$ в $1'$. $\operatorname{zn} u$ для $\alpha = 0^\circ (5^\circ) 80^\circ (1^\circ) 89^\circ, x = \pi u/2K = 0^\circ (1^\circ) 90^\circ, 10D$. ϑ_2, ϑ_4 для $\alpha = 0^\circ (5^\circ) 80^\circ (1^\circ) 89^\circ, 10-12D$. $\vartheta_1(x)/\vartheta_2, \vartheta_2(x)/\vartheta_2, \vartheta_3(x)/\vartheta_4, \vartheta_4(x)/\vartheta_4$ для $\alpha = 0^\circ (5^\circ) 80^\circ (1^\circ) 89^\circ, x = \pi v = \pi u/2K = 0^\circ (1^\circ) 90^\circ, 10D$. q для $\alpha = 0^\circ (5^\circ) 80^\circ (1^\circ) 90^\circ, 14-15D$. $u = 2Kv = 2Kx/\pi$ для $\alpha = 0^\circ (5^\circ) 80^\circ (1^\circ) 89^\circ, x = 0^\circ (1^\circ) 90^\circ, 10D$.
- [19] Hayashi K., см. IX, [18]. $\vartheta_1', \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_1''/\vartheta_1', \vartheta_2''/\vartheta_2, \vartheta_3''/\vartheta_3, \vartheta_4''/\vartheta_4, q, q^4, q^{1/4}, q^{9/4}, q^{25/4}$ для $k^2 = 0(.001) 0.5, 8D$. $\lg q, \lg q'$ для $k^2 = 0(.001) 1, 10D$; $k^2 = 0(10^{-7}) 10^{-5} (10^{-5}) 0.003, 8D$.

XI. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Руководства

- [1] Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ИЛ, 1948.
- [2] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951.
- [3] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., см. IX, [4].
- [4] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
- [5] Сеге Г., Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962.
- [6] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [7] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [8] Tricomi F. G., Vorlesungen über Orthogonalreihen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

Таблицы

- [9] Библиотека математических таблиц, вып. 19, Таблицы полиномов Чебышева, ВЦ АН СССР, 1963.
- [10] Митропольский А. А., Интеграл вероятностей, изд. Лесотехн. акад. им. Кирова, Л., 1948, $H_n(x)$ для $x=0(.01)4$, $n=2, 3, 4$; 4—8D.
- [11] Таблицы, под ред. Я. Н. Шпильрейна, см. V, [14]. $P_n(x)$ для $x=0(.01)1$ и $P_n(\cos \theta)$ для $\theta=0(1^\circ)90^\circ$; $n=1(1)7$; 4D.
- [12] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 9: Tables of Chebyshev polynomials $S_n(x)$ and $C_n(x)$, Washington, 1952. При $(T_n x) = \frac{1}{2} C_n(2x)$, $U_n(x)/\sqrt{1-x^2} = S_{n-1}(2x)$ даны таблицы: $C_n(x)$, $S_n(x)$ для $n=2(1)12$, $x=0(.001)2$, 12D. $C_n(x)$, $S_n(x)$, $T_n(x)$, $U_{n+1}(x)/\sqrt{1-x^2}$ явно для $n=0(1)12$, $T_n^*(x) = \frac{1}{2} C_n(4x-2)$ для $n=0(1)20$.
- [13] Salzer H. E., Tables for facilitating the use of Chebyshev's quadrature formula, J. Math. Physics 26 (1947), 191—194. Нули полиномов $T_n(x)$ для $n=3(1)7, 9, 10$ D. Соответствующие множители для численного интегрирования, 9S.
- [14] Tricomi F. G., Valori numerici di funzioni ortogonali di Laguerre, Atti Accad. Sci. Torino 90 (1956). $l_n(x)$ для $n=0(1)10$, $x=0(.1)1(.25)6(1)14(2)34$, 6S.
- [15] Slater L. J., A short table of the Laguerre polynomials, Inst. Elect. Engineers, Monograph, London, 1955. $L_n(x)$ для $n=0(1)10$, $x=0(.1)5$, 5—6D.
- [16] Head J. W. and Wilson W. P., Laguerre functions: Tables and properties, Inst. Elect. Engineers, Monograph, London, 1956. $e^{-x}L_n(x)$ для $n=0(1)20$, $x=0(.1)1(.2)3(.5)6(1)14(2)40(5)100$, 4D или 2S. Нули полиномов $L_n(x)$ для $n=1(1)20$, 6D.
- [17] Salzer H. E. and Zucker R., Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1004—1012. Нули полиномов $L_n(x)$ для $n=1(1)15$, 12D, соответствующие множители для численного интегрирования, 12S.
- [18] Smith E. R., Zeros of the Hermitian polynomials, Amer. Math. Monthly 43 (1936), p. 354—358. Нули полиномов $H_n(x/\sqrt{2})$ для $n=3(1)27$, 6D.
- [19] Salzer H. E., Zucker R. and Capuano R., Table of the zeros and weight factors of the first twenty Hermite polynomials, NBS, J. Res. 48 (1952), 111—116. Нули полиномов $H_n(x)$ для $n=1(1)20$, 15D; соответствующие множители для численного интегрирования, 13 S.

XII. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Руководства

- [1] Вебстер А. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 2, ОНТИ, 1934.
- [2] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
- [3] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Основные дифференциальные уравнения математической физики, Физматгиз, 1962.
- [4] Кузнецов Д. С., см. V, [4].
- [5] Курант Р. и Гильберт Д., см. XI, [2].
- [6] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
- [7] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [8] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.
- [9] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [10] Lense J., Kugelfunktionen, Leipzig, 1954.
- [11] MacRobert T. M., Spherical harmonics, London, 1947.
- [12] Robin L., Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales, I—III, Paris, 1957—1959.

Таблицы

- [13] Белоусов С. Л., Таблица нормированных присоединенных полиномов Лежандра, Изд-во АН СССР, 1956. $P_n^m(\cos \theta)$ для $\theta=0^\circ(2^\circ,5)90^\circ$, $m=0(1)36$, $n=m(1)56$; 6D.
- [14] Библиотека математических таблиц, вып. 14, Таблицы присоединенных функций Лежандра, ВЦ АН СССР, 1962.
- [15] Журина М. И. и Кармазина Л. М., Таблицы функций Лежандра $P_{-1/2+i\tau}(x)$, Изд-во АН СССР, т. 1, 1960; т. 2, 1962; т. 3, 1963. Даны таблицы для $x=-1(.1)1$, $\tau=0(.01)50$; 7S и т. д.
- [16] Журина М. И. и Кармазина Л. М., Таблицы и формулы для сферических функций $P_{-1/2+i\tau}^m(z)$, Изд-во АН СССР, 1962.

- [17] Hayashi K., см. IX, [18]. $P_n(x)$ для $n=2(1)8$, $x=0(.01)1$, точно. $P_n(\cos \vartheta)$ для $n=1(1)8$, $\vartheta=0^\circ(1^\circ)90^\circ$. 10D.
- [18] British Association Mathematical Tables, Part-Volume A: Legendre polynomials, Cambridge, 1946. $P_n(x)$ для $n=2(1)12$, $x=0(.01)1$, 7D; $n=2(1)12$, $x=1(.01)6$, 6—8S; $n=2(1)6$, $x=6(.1)11$, 7—8S.
- [19] Tallqvist Hj., Sechsstellige Tafeln der 16 ersten Kugelfunktionen $P_n(x)$, Acta Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A 2, № 4 (1937). $P_n(x)$ для $n=1(1)16$, $x=0(.001)1$, 6D.
- [20] Tallqvist Hj., Sechsstellige Tafeln der 32 ersten Kugelfunktionen $P_n(\cos \vartheta)$, Acta Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A 2, № 11 (1938). $P_n(\cos \vartheta)$ для $n=1(1)32$, $\vartheta=0^\circ(10')90^\circ$, 6D.
- [21] Clark G. C. and Churchill St. W., Tables of Legendre polynomials $P_n(\cos \vartheta)$ for $n=0(1)80$ and $\vartheta=0^\circ(1^\circ)180^\circ$, Ann Arbor, 1957. $P_n(\cos \vartheta)$ для $n=1(1)80$, $\vartheta=1^\circ(1^\circ)180^\circ$, 6D.
- [22] Mursi Z., Tables of Legendre associated functions, Fouad I University, Faculty of Science, № 4, Cairo, 1941. $P_n^m(x)$ для $n=1(1)10$, $m=1(1)n$, $x=0(.001)1$, 8—13S.
- [23] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 18]: Tables of associated Legendre functions, Washington, 1945. $P_n^m(\cos \vartheta)$, $dP_n^m(\cos \vartheta)/d\vartheta$ для $n=0(1)10$, $m=0(1)4$, $m \leq n$, $\vartheta=0^\circ(1^\circ)90^\circ$, 6S. $\mathfrak{P}_n^m(x)$, $(-1)^m \mathfrak{Z}_n^m(x)$, $d\mathfrak{P}_n^m(x)/dx$, $(-1)^{m+1} d\mathfrak{Z}_n^m(x)/dx$ для $n=0(1)10$, $m=0(1)4$, $m \leq n$, $x=1(.1)10$, 6S. $i^{-n} \mathfrak{P}_n^m(ix)$, $i^{n+2m+1} \mathfrak{Z}_n^m(ix)$, $i^{-n} d\mathfrak{P}_n^m(ix)/dx$, $i^{n+2m-1} d\mathfrak{Z}_n^m(ix)/dx$ для $n=0(1)10$, $m=0(1)4$, $m \leq n$, $x=0(.1)10$, 6S. $\mathfrak{P}_{n+1/2}^m(x)$, $(-1)^m \mathfrak{Z}_{n+1/2}^m(x)$, $d\mathfrak{P}_{n+1/2}^m(x)/dx$, $(-1)^{m+1} d\mathfrak{Z}_{n+1/2}^m(x)/dx$ для $n=-1(1)4$, $m=0(1)4$, $x=1(.1)10$, 4—6S.
- [24] Prévost G., Tables des fonctions sphériques et de leurs intégrales, Paris, 1933. $P_n^m(x)$ для $n=1(1)8$, $m=0(1)n$ и $(n, m)=(9, 0), (9, 1), (10, 0)$, $x=0(.01)1$, 5—6S. $\int_0^x P_n^m(x) dx$ для $n=0(1)8$, $m=0(1)n$ и $(n, m)=(9, 0), (9, 1), (10, 0)$, $x=0(.01)1$, 5—7S. Нули функций $P_n^m(x)$ для $n=2(1)8$, $m=0(1)n$ и $(n, m)=(9, 0), (9, 1), (10, 0)$, 4D. Нули функций $P_n^m(\cos \vartheta)$ для $n=2(1)10$, $m=0$ и $n=2(1)8$, $m=1(1)n$, 1'.
- [25] Schmidt A., Tafeln der normierten Kugelfunktionen, Gotha, 1935. $P_n(x)$, $\log P_n(x)$ для $n=1(1)7$, $x=0(.1)1$, 5—6D. $P_n(\cos \vartheta)$, $\log P_n(\cos \vartheta)$ для $n=1(1)7$, $\vartheta=0^\circ(5^\circ)90^\circ$, 5—6D. $\frac{2}{\sqrt{2n+1}} \overline{P}_n^m(x)$, $\log \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \overline{P}_n^m(x)$ для $n=1(1)6$, $m=1(1)n$, $x=0(.1)1$, 5—6D. $\frac{2}{\sqrt{2n+1}} \overline{P}_n^m(\cos \vartheta)$, $\log \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \overline{P}_n^m(\cos \vartheta)$ для $n=1(1)6$, $m=1(1)n$, $\vartheta=0^\circ(5^\circ)90^\circ$, 5—6D. Нули полиномов $P_n(x)$, $P_n(\cos \vartheta)$ для $n=2(1)6$, 7D соотв. 1". Нули полиномов $P_n^m(x)$, $P_n^m(\cos \vartheta)$ и первых производных для $n=2(1)6$, $m=1(1)n$, 7D соотв. 1".
- [26] Lowan A. N., Davids N. and Levenson A., Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1—16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 739—743. Нули полиномов $P_n(x)$ для $n=2(1)16$, 15D; соответствующие множители для численного интегрирования, 15D.
- [27] Smith E. R. and Higdon A., Zeros of the Legendre polynomials, Iowa State College, J. Sci. 12 (1938), 263—274. Нули полиномов $P_n(x)$ для $n=2(1)40$, 6D.
- [28] Gray M. C., Legendre functions of fractional order, Quart. Appl. Math. 11 (1953), 311—318. $P_\nu(\cos \vartheta)$ для $\nu=0.1(.1)2$, $\vartheta=10^\circ(10^\circ)170^\circ, 175^\circ$, 6D.
- [29] Le Centre National d'Études des Télécommunications: Tables des fonctions de Legendre associées, Paris, 1952. $(-1)^m P_\nu^m(\cos \vartheta) = (-\sin \vartheta)^m d^m P_\nu(\cos \vartheta)/(d \cos \vartheta)^m$ для $m=0(1)5$, $\nu=-0.5(.1)10$, $\vartheta=0^\circ(1^\circ)90^\circ$, точность различная.

ХIII. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Руководства

- [1] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, 1949.
- [2] Грей Э. и Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.
- [3] Карман Т. и Био И. М., Математические методы в инженерном деле, Гостехиздат, 1948.
- [4] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., см. XII, [3].

- [5] Кратцер А. и Франц В., см. V, [3].
- [6] Кузнецов Д. С., см. V, [4].
- [7] Кузьмин Р. О., см. V, [5].
- [8] Курант Р. и Гильберт Д., см. XI, [2].
- [9] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
- [10] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [11] Соболев С. Л., см. XII, [8].
- [12] Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, Гостехиздат, 1954.
- [13] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [14] McLachlan N. W., Bessel functions for engineers, Oxford, 1955.
- [15] Nielsen N., Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig, 1904.
- [16] Petiau G., La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la physique mathématique, Paris, 1955.
- [17] Weyrich R., Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig und Berlin, 1937.

Таблицы

- [18] Ватсон Г. Н., см. VII, [11].
- [19] Библиотека математических таблиц, вып. 12, Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса, ВЦ АН СССР, 1960.
- [20] Библиотека математических таблиц, вып. 4 и 5, Таблицы функций Бесселя дробного индекса, ВЦ АН СССР, тт. 1—2, 1959.
- [21] Библиотека математических таблиц, вып. 20 и 21, Таблицы сферических функций Бесселя, тт. 1, 2, ВЦ АН СССР, 1963.
- [22] Динник А. Н., Таблицы бесселевых функций дробного порядка, Київ, Зак. прир. техн. відділу АН УРСР, 29 (1933).
- [23] Люстерник Л. А., Акушский И. Я. и Диткин В. А., Таблицы бесселевых функций, Гостехиздат, 1949. $J_0(x)$ и $J_1(x)$ для $x=0(.001)16(.01)25$; 7D. Корни уравнений $J_0(x)=0$, $J_1(x)=0$, $J'_1(x)=0$ и ряд связанных с ними величин.
- [24] Фадеева В. Н. и Гавурин М. К., Таблицы функций Бесселя целых номеров от 0 до 120, Гостехиздат, 1950. $J_n(x)$ для $x=0(.1)125$, $n=0(1)120$; 6D. $J_n(x)$ для $x=0(.01)15$, $n=0(1)13$; 8S. Вычислены корни уравнений $J_n(x)=0$ для $n=0(1)115$.
- [25] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., см. V, [13]. Даны функции Бесселя индексов 0 и 1 для $x=0(.01)10$; 5D, 5—6S.
- [26] Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них, Изд-во АН СССР, 1958. Даны функции Бесселя индексов 0 и 1 для $x=0(.001)15(.01)100$; 7D, 7S.
- [27] Кармазина Л. Н. и Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них, Изд-во АН СССР, 1958.
- [28] Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента, под ред. И. М. Виноградова и Н. Г. Четаева, Изд-во АН СССР, 1950. $I_n(x)$ и $K_n(x)$ для $n=0, 1$, $x=0(.001)10$; 8D, 8S.
- [29] Деканосидзе Е. Н., Таблицы цилиндрических функций от двух переменных, Изд-во АН СССР, 1956.
- [30] Барк Л. С. и Кузнецов П. И., Таблицы цилиндрических функций от двух мнимых переменных, Изд-во АН СССР, 1962.
- [31] Смирнов А. Д., Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций, Изд-во АН СССР, 1955.
- [32] Карпов К. А. и Киреева Н. Е., Таблицы функций Вебера, т. 1, Изд-во АН СССР, 1959; т. 2, ВЦ АН СССР, 1963.
- [33] Носова Л. Н., Таблицы функций Томсона и их первых производных, Изд-во АН СССР, 1960.
- [34] Носова Л. Н. и Тумаркин С. А., Таблицы обобщенных функций Эйри для асимптотического решения дифференциальных уравнений $\varepsilon(py')' + (q + \varepsilon r)y = f$, ВЦ АН СССР, 1961.
- [35] Фок В. А., Таблицы функций Эйри, 1946.
- [36] Harvard University, Computation Laboratory, Annals 3—14: Tables of the Bessel functions, Cambridge, 1947, 1951. $J_n(x)$ для $n=0(1)3$, $x=0(.001)25(.01)99.99$, 18D; для $n=4(1)15$, $x=0(.001)25(.01)99.99$, 10D; для $n=16(1)111$, $x=0(.01)99.99$, 10D; для $n=112(1)135$, $x=0(.1)99.99$, 10D. Последний том дает далее $J_n(100)$ для $n=0(1)135$ и $J_n(n)$ для $n=0(1)100$, 10D.

- [37] British Association Mathematical Tables VI: Bessel functions, Cambridge, I, 1950, II, 1952. I: $J_0(x)$, $J_1(x)$ для $x=0(.001)16(.01)25, 10D$; $N_0(x)$, $N_1(x)$ для $x=0(.01)25, 8D$; Вспомогательные таблицы для $x=0(.01)0.5$ и $25 \leq x \leq 6000$. $I_0(x)$, $I_1(x)$ для $x=0(.001)5, 7-8D$; $K_0(x)$, $K_1(x)$ для $x=0(.01)5, 8-9S$; Вспомогательные таблицы для $x=0(.01)0.5$ и $x=5(.01)10(.1)20$. Нули $j_{0,s}$ и значения $J_1(j_{0,s})$ для $s=1(1)150, 10D$; нули $j_{1,s}$ и значения $J_0(j_{1,s})$ для $s=1(1)150, 10D$. II: $J_n(x)$ для $n=2(1)12, x=0(.01)10(.1)25$; $n=13(1)20, x=0(.01)5(.1)25, 8D$. $N_n(x)$ для $n=2(1)11, x=0(.01)10(.1)25$; $n=12(1)20, x=0(.1)25, 8S$. $I_n(x)$, $K_n(x)$ для $n=2(1)11, x=0(.01)5(.1)20$; $n=12(1)20, x=0(.1)20, 8S$. Для осуществления интерполяции N , I , K частично заменены через $x^n N_n$, $x^{-n} I_n$, $e^{-x} I_n$, $x^n K_n$, $e^x K_n$. $J_n(x)$, $N_n(x)$ для $n=0(1)20, x=0(.1)25, 10D$ соотв. $10S$. $I_n(x)$, $K_n(x)$ для $n=0(1)20, x=0(.1)20, 10S$.
- [38] Hayashi K., см. IX, [18]. $J_0(x)$, $J_1(x)$ для $x=0(.001)0.11(.01)25.1, 12-18D$. $J_n(x)$ для n при $0 \leq n \leq 135, x=0.01(.01)0.05, 0.1(.1)0.5, 1, 2, 10(10)50, 100, 10-103D$. $J_{\pm 1/2}(x)$, $J_{\pm 3/2}(x)$ для $x=0(.01)10(.1)20(1)100, 9-12D$.
- [39] Cambi E., Eleven- and fifteen-place tables of Bessel functions of the first kind, to all significant orders, New York, 1948. $J_n(x)$ для $x=0(.01)10.5, 11D$; $x=0(.001)0.5, 15D$. Включены все J_n , которые $> 0.5 \cdot 10^{-11}$ соотв. $> 10^{-15}$. Коэффициенты разложения в ряд Тейлора $J_n(x+h)$ и разложения $J_n(x+h)$ по функциям Бесселя $J_k(h)$.
- [40] Goodwin E. T. and Staton J., Table of $J_0(j_{0,n} r)$, Quart. J. Mech. Appl. Math. 1 (1948), 220-224. $J_0(j_{0,s} x)$ для $s=1(1)10, x=0(.01)1, 5D$.
- [41] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series I: Tables of the Bessel functions $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Washington, 1948. Reissued as NBS, Applied Mathematics Series 25, Washington, 1952. $N_0(x)$, $N_1(x)$ для $x=0(.0001)0.05(.001)1, 8D$ или $8-9S$; вспомогательные таблицы для $x=0(.0001)0.005, 8D$. $K_0(x)$, $K_1(x)$ для $x=0(.0001)0.033(.001)1, 8D$ или $8-9S$; вспомогательные таблицы для $x=0(.001)0.03, 8D$.
- [42] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 14]: Table of the Bessel functions $J_0(z)$ and $J_1(z)$ for complex arguments, 2nd ed., New York, 1947. Действительная и мнимая части $J_0(re^{i\varphi})$, $J_1(re^{i\varphi})$ для $r=0(.01)10, \varphi=0^\circ(5^\circ)90^\circ, 10D$.
- [43] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Table of the Bessel functions $Y_0(z)$ and $Y_1(z)$ for complex arguments, New York, 1950. Действительная и мнимая части $N_0(re^{i\varphi})$, $N_1(re^{i\varphi})$ для $r=0(.01)10, \varphi=0^\circ(5^\circ)90^\circ, 10D$. Вспомогательные таблицы для $r=0(.01)0.5, 10D$. Комплексные нули $z_{0,s}$ функции N_0 , $z_{1,s}$ функции N_1 , $z'_{1,s}$ функции Y'_1 для $s=1(1)15, 5D$; $z_{0,s}$ со значениями N_1 и N'_1 для $s=1(1)3, 9D$; $z_{1,s}$ со значениями $N_0=N'_1$ для $s=1(1)3, 9D$; $z'_{1,s}$ со значениями N_0 и N_1 для $s=1(1)4, 9D$.
- [44] Tölke F., Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen, Stuttgart, 1936. $J_n(r\sqrt{i})$ и $\frac{i\pi}{2} H_n^{(1)}(r\sqrt{i})$ для $n=0(1)3, r=0(.01)21, 4S$.
- [45] British Association Report, 1923. $M_0(r)$, $M_1(r)$, $\Theta_0(r)$, $\Theta_1(r)-180^\circ$ для $r=0(.1)10, 6-5D$ соотв. $0^\circ.00001$.
- [46] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Tables of Bessel functions order I, II, New York, 1948-1949. I: $J_\nu(x)$ для $\nu=-3/4$ и $-2/3, x=0(.001)0.9(.01)25$; $\nu=-1/3$ и $-1/4, x=0(.001)0.8(.01)25$; $\nu=1/4$ и $1/3, x=0(.001)0.6(.01)25$; $\nu=2/3$ и $3/4, x=0(.001)0.5(.01)25$; $10D$. Вспомогательные функции $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$ для $x=25(.1)50(1)500(10)5000(100)10\,000(200)30\,000, 10D$. Нули $j_{\nu,s}$ для $s=1(1)30, 10D$. II: $I_\nu(x)$ для $\nu=-3/4$ и $-2/3, x=0(.001)1(.01)13$; $\nu=-1/3$ и $-1/4, x=0(.001)0.8(.01)13$; $\nu=1/4$ и $1/3, x=0(.001)0.6(.01)25$; $\nu=2/3$ и $3/4, x=0(.001)0.5(.01)25$; $10D$ или $10S$. Вспомогательные функции $e^{-x} I_\nu(x)$ для $x=25(.1)50(1)500(10)5000(100)10\,000(200)30\,000, 10D$.
- [47] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 37: Tables of functions and the zeros of functions, Washington, 1954. Нули $j_{\nu,s}$, см. [42]. Нули $j'_{\nu,s}$ для $\nu=\pm 3/4, \pm 2/3, \pm 1/3, \pm 1/4, s=1(1)8, 7D$. Комплексные нули функций N_0, N_1, N'_1 , см. [39].
- [48] British Association Report, 1927. Нули $j_{\nu,1}$ функций $J_\nu(x)$ для $\nu=-1(.01)1, 5D$.
- [49] British Association Report, 1928. $\partial J_\nu(x)/\partial \nu$ для $\nu=\pm 1/2, \pm 3/2, x=0(.1)20, 6D$.

- [50] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Tables of spherical Bessel functions, I, II, New York, 1946—1947. I: $\sqrt{\pi/2x} J_\nu(x)$ для $\pm \nu = \frac{1}{2} (1) \frac{25}{2}$, $x = 0(.01) 10(.1) 25$; $\pm \nu = \frac{27}{2}$, $x = 0(.01) 10(.05) 10.5(.1) 25$; 8—10S для $x \leq 10$, 7S для $x > 10$. II: $\sqrt{\pi/2x} J_\nu(x)$ для $\pm \nu = \frac{29}{2} (1) \frac{43}{2}$, $x = 0(.01) 10(.1) 25$; $\pm \nu = \frac{45}{2} (1) \frac{61}{2}$, $x = 10(.1) 25$; 8—10S для $x \leq 10$, 7S для $x > 10$. $Y_\nu(x)$ для $\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{41}{2} (1) \frac{61}{2}$, $x = 0(.1) 10$, 9D; $\nu = \frac{1}{2} (1) \frac{61}{2}$, $x = 10(.1) 25$, большей частью 7S; $-\nu = \frac{29}{2} (1) \frac{61}{2}$, $x = 0(.1) 25$, большей частью 7S. Нули $j_{\nu,s}$, $j'_{\nu,s}$ функций $J_\nu(x)$, $J'_\nu(x)$ с соответствующими значениями J'_ν соотв. J_ν для $\pm \nu = \frac{1}{2} (1) \frac{39}{2}$, $s = 1 (1) S$, где $1 \leq S \leq 8$, 6—10D.
- [51] Crowder H. K. and Francis G. C., Tables of spherical Bessel functions and ordinary Bessel functions of order half an odd integer of the first and second kinds, Ballistic Research Laboratories, Mem. Report 1027, Aberdeen Proving Ground, Maryland, 1956. $\sqrt{\pi/2x} J_\nu(x)$, $\sqrt{\pi/2x} N_\nu(x)$, $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ для $x = 1 (1) 50$ и $\nu = n + \frac{1}{2}$, $n = 0 (1) m$ $\left[\text{где } N_\mu(x) < 10^{10} < N_{\mu+1}(x) \text{ для } \mu = m + \frac{1}{2} \right]$, 9D для $n < x$, 7S для $n \geq x$.
- [52] Royal Society Mathematical Tables Committee: Short table of Bessel functions $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$, Cambridge, 1952. $x^{-\nu} I_\nu(x)$, $(2/\pi)x^\nu K_\nu(x)$ для $\nu = n + \frac{1}{2}$, $n = 0 (1) 10$, $x = 0(.1) 5$; $e^{-x} I_\nu(x)$, $(2/\pi)e^x K_\nu(x)$ для $\nu = n + \frac{1}{2}$, $n = 0 (1) 10$, $x = 5(.1) 10$; большей частью 8S.
- [53] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 28: Tables of Bessel — Clifford functions of orders zero and one, Washington, 1953. $x^{-n/2} J_n(2\sqrt{x})$, $x^{-n/2} N_n(2\sqrt{x})$ для $n = 0, 1$, $x = 0(.02) 1.5 (0.5) 3(.1) 13(.2) 45(.5) 115(1) 410$, 8—9D. $x^{-n/2} I_n(2\sqrt{x})$, $x^{-n/2} K_n(2\sqrt{x})$ для $n = 0, 1$, $x = 0(.02) 1.5 (.05) (6.2)$, 6—9D. $e^{-2\sqrt{x}} x^{-n/2} I_n(2\sqrt{x})$, $e^{2\sqrt{x}} x^{-n/2} K_n(2\sqrt{x})$ с 8—9 десятичными знаками для $n = 0, 1$, $x = 6.2(.1) 13(2) 36(.5) 115(1) 160(5) 410$.
- [54] British Association Report, 1924. $-E_n(x)$ для $n = 0, 1$, $x = 0(.02) 16$, 6D.

ХІV. ФУНКЦИИ МАТЬЕ

Руководства

- [1] Купрадзэ В. Д., О функциях Матье — Ханкеля, Изд-во АН СССР, 1933.
- [2] Мак-Лаклан Н., Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.
- [3] Смирнов В. И., см. V, [7]
- [4] Стрэтт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков — Киев, 1935.
- [5] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [6] Meixner J. und Schäfer F. W., Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1954.

Таблицы

- [7] Goldstein S., Mathieu functions, Trans. Cambridge Philos. Soc. 23 (1927), 303—336. Собственные значения α_0 , β_1 , α_1 , β_2 , α_2 и коэффициенты Фурье se_0 , se_1 , se_2 , se_3 для $q = 0.1 (1) 1 (2) 4 (1) 5 (5) 30 (10) 40 (20) 100 (50) 200$, 5D.
- Ince E. L., Tables of the elliptic-cylinder functions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 52 (1932), 355—423, 424—433. С использованием обозначения $a = 4\alpha$, $\theta = 8q$ таблицы дают: собственные значения $a_n = 4\alpha_n$, $n = 0 (1) 5$; $b_n = 4\beta_n$, $n = 1 (1) 6$ и коэффициенты Фурье для соответствующих функций se_n , se_n для $\theta = 8q = 0 (1) 10 (2) 20 (4) 40$, 7D.

- $se_n(x, q)$, $n=0(1)5$; $se_n(x, q)$, $n=1(1)6$ для $\Theta=8q=1(1)10$, $x=0^\circ(1^\circ)90^\circ$, 5D. Нули функции se_n , $n=2(1)5$, se_n , $n=3(1)6$ и экстремальные значения функций se_n , $n=1(1)5$, se_n , $n=2(1)6$ при $0 < x < \pi/2$ для $\Theta=8q=0(1)10(2)20(4)40$ в $0^\circ.0001$.
- [9] Hidaka K., Tables for computing the Mathieu functions of odd order $se_1(x, \Theta)$, $se_3(x, \Theta)$, $se_5(x, \Theta)$, $se_7(x, \Theta)$ and $se_9(x, \Theta)$ and their derivatives, Mem. Imp. Marine Obs 6, № 2 (1936), 137—157. Собственные значения $b_n=4\beta_n$, $a_n=4\alpha_n$, $n=1(2)7$, и коэффициенты Фурье для соответствующих функций и их производных для $\Theta=8q=0(1)2.3$, 7D
- [10] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Tables relating to Mathieu functions, New York, 1951. С использованием обозначения $s=32q$, $b=4\alpha+\frac{s}{2}$ для коэффициентов дифференциального уравнения Матье, $be_r-\frac{1}{2}s=4a_r$, $bo_r-\frac{1}{2}s=4\beta_r$ для собственных значений и $Se_r(s, x)=\frac{1}{A}se_r(x, q)$, $So_r(s, x)=\frac{1}{B}se_r(x, q)$ для нормированных в соответствии с $Se_r(s, 0)=1$, $[dSo_r(s, x)/dx]_{x=0}=1$ периодических функций Матье таблицы дают. $be_r(s)$, $r=0(1)15$; $bo_r(s)$, $r=1(1)15$ для области $0 \leq s \leq 100$ с табличными шагами между 0.2 и 10 в 8D. Коэффициенты Фурье соответствующих функций $Se_r(s, x)$, $So_r(s, x)$, которые позволяют составить ряды Фурье в области $0 \leq s \leq 100$ с точностью 9—10D. Нормирующие множители A , B и соответствующие множители для вычисления видоизмененных функций Матье.
- [11] Blanch G. and Rhodes I., Table of characteristic values of Mathieu's equation for large values of the parameter, J. Washington Acad. Sci. 45 (1955), 166—196. В дополнение к [10] таблица дает $Be_r(t)=be_r(s)-(2r+1)/t$, $Bo_r(t)=bo_r(s)-(2r-1)/t$ для $r=0(1)15$ и $s=1/t^2 > 100$. Табличный шаг для аргумента t выбран так, что возможно получать значения с точностью в 8D.

XV. КОНФЛЮЭНТНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Руководства

- [1] Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т., Функции математической физики, Физматгиз, 1963
- [2] Кратцер А. и Франц В., см. V, [3].
- [3] Кузнецов Д. С., см. V, [4].
- [4] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
- [5] Сансоне Д., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, ИЛ, 1953.
- [6] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [7] Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962.
- [8] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [9] Buchholz H., Die konfluente hypergeometrische Funktion mit Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.
- [10] Slater L. J., Confluent hypergeometric functions, Cambridge, 1960.
- [11] Tricomi F., Fonctions hypergéométriques confluentes, Paris, 1960.
- [12] Appell P., Kampé de Fériet J., Fonctions hypergéométriques et hypersphériques; polynômes d'Hermite, Paris, 1926.

Таблицы

- [13] British Association Report, 1926. 1926: $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=\pm 1/2$, $\pm 3/2$, $\alpha=-4(.5)4$, $x=0(.1)1(.2)3(.5)8$, 5D или 6—7S. 1927: $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=\pm 1/2$, $\pm 3/2$, $\alpha=-4(.5)4$, $x=0(.02)0.08$, $0.15(.1)0.95$, $1.1(.2)1.9$, 5D или 6S; и для $\gamma=1(1)4$, $\alpha=-4(.5)4$, $x=0(.02)0.1(.05)1(.1)2(.2)3(.5)8$, 5D или 6—7S.
- [14] Conolly B. W., A short table of the confluent hypergeometric function $M(\alpha, \gamma, x)$, Quart. J. Mech. Appl. Math. 2 (1950), 236—240. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=0.2(.2)1$, $\alpha=-1(.2)1$, $x=0.1, 0.2(.2)1$, 11D.
- [15] Slater L. J., On the evaluation of the confluent hypergeometric function, Proc. Cambridge Philos. Soc. 49 (1953), 612—622. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=0.1(.1)1$, $\alpha=-1(.1)1$, $x=1(1)10$, 8S.
- [16] Nath P., Confluent hypergeometric function, Sankhyā 11 (1951), 153—166. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=3$, $\alpha=1(1)40$ и $\gamma=4$, $\alpha=1(1)50$, $x=0.02(.02)0.1(.1)1(1)10(10)50$, 100, 200, 7S.

- [17] Rushton S. and Lang E. D., Tables of the confluent hypergeometric function, *Sankhyā* 13 (1954), 377—411. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=0.5(.5)3.5, 4.5$, α —целое и половина целого из $0 \leq \alpha \leq 25$ до $0 \leq \alpha \leq 50$ с табличным шагом 0.5 или 1, x как и в [14].
- [18] Gran Olsson R., Tabellen der konfluenten hypergeometrischen Funktion erster und zweiter Art, *Ingenieur-Arch.* 8 (1937), 99—103. $M(\alpha, \gamma, kq^n)$ для $n=2, 4$, частные значения α между -0.675 и 1.65 , частные значения γ между 0.5 и 3 . $k=-2(.5)2$, $q=0(.1)1$, 4D.
- [19] Gran Olsson R., Über einige Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe, II, *Ingenieur. Arch.* 8 (1937), 373—380. $M(1.3, 3, x)$, $M(0.65, 2, x)$, $M(0.325, 1.5, x)$, $x^{-1/2}M(-0.175, 0.5, x)$ для $x=0.02(.02)0.1(.05)1(.1)2.5$, 4D.
- [20] Chappel G. E., The properties of a new orthogonal function associated with the confluent hypergeometric function, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 43 (1925), 117—130. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=1$, $\alpha=1/2-k$, $k=1(1)10$, $kx=0.1(.1)10$, $kx=0.1(.1)1.5$, $2(1)10$, 4D.
- [21] Lowan A. N. and Horenstein W., On the function $H(m, a, x) = \exp(-ix) F(m+1-ia, 2m+2; 2ix)$, *J. Math. Physics* 21 (1942), 264—283. Reprint in NBS, Applied Mathematical Series 37, Washington, 1954. $H(m, a, x) = e^{-ix} M(m+1-ia, 2m+2, 2ix)$ и $dH(m, a, x)/dx$ для $a=0(1)10$, $m=0(1)3$, $x=0(1)10$, 7S.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Амплитуда гиперболическая $\operatorname{amph} x$ 33

— Якоби $\operatorname{am}(u, k)$ 120

Ангера функции $J_\nu(z)$ 287

— — неполные 288

Бернулли числа B_n 15, 53, 57, 60

Бесселя интегральное представление 221, 287

Бесселя функции 178, 317

— —, асимптотические разложения 222

— — второго рода см Неймана функции

— — мнимого аргумента $I_\nu(z)$ 247

— — модифицированные 247

— —, нули 229

— — первого рода $J_\nu(z)$ 181

— —, порядок (параметр, индекс) 178

— —, теоремы сложения и умножения 244, 245

— — третьего рода см Ганкеля функции

— —, формулы дифференцирования и интегрирования 244, 245

Бэ́та-функци́и $B(z, w)$ 55

Ватсона формула 227

Вебера функции $E_\nu(z)$ 287

— — неполные 288

Вейерштрасса эллиптические функции $\wp u$, ζu , σu 127, 128

Гамма-функции $\Gamma(z)$, $\Pi(z)$, $z!$ 49, 52

— —, логарифмическая выпуклость 49, 57

— —, логарифмическая производная $\psi(z)$, $\Psi(z)$ 49, 56, 316

— — неполные $\Gamma(a, z)$, $\gamma(a, z)$, $P(a, z)$, $Q(a, z)$, $(a-1, z)!$ 60, 62, 70, 71, 317

— —, формулы дополнения и умножения 54, 55

Ганкеля контурный интеграл 52

— разложение асимптотическое 222

— функции $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ 70, 189

— — модифицированные $K_\nu(z)$ 247

Гармоники сферические 178

Гейне интегральное представление 164

Гиперболические функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ 30

— — комплексного аргумента 36

— — обратные $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$ 30

— —, связь с показательной и логарифмической функциями 32

— —, формулы дифференцирования и интегрирования 32

— —, формулы сложения 31

Гипергеометрическая вырожденная функция $\Phi(a, c, z)$ 308

Гипергеометрические конфлюэнтные функции $\Phi(a, c, z)$, $\Psi(a, c, z)$, $M_{\kappa, \mu}(z)$, $W_{\kappa, \mu}(z)$ 308

Гипергеометрическое уравнение 119

— — вырожденное 308

Гидерманиан $\operatorname{gd} x$ 33

Дебая ряды 224

— функции 326

Зоммерфельда интегральное представление 222

Интеграл вероятности см. Интеграл ошибок

—, главное значение в смысле Коши 63

— ошибок $\Phi(z)$, $\Phi(r)$, $\operatorname{Erfi}(x)$, $\operatorname{Erfc}(r)$, $\operatorname{Erfi}(x)$, $\Theta(x)$, $H(x)$ $\alpha(x)$ 60, 70, 72, 82

— —, обобщение $E_n(z)$ 71

— —, производные $\Phi_{n+1}(x)$, $\Phi(x)$ 71, 72

— эллиптический см. Эллиптический интеграл

Интегральная показательная функция

$E_1(z)$, $E_1(-x)$, $E_1^\pm(x)$, $E_1^*(z)$, $\overline{E}_1(z)$ 60, 62, 67

Интегральный гиперболический косинус $\operatorname{ch}_1(z)$ 67

— — синус $\operatorname{sh}_1(z)$ 67

— косинус $\operatorname{ci}(z)$ $\operatorname{Ci}(z)$ 60, 65

— логарифм $\operatorname{li}(z)$, $\operatorname{Li}(x)$ 60, 63, 67

— синус $\operatorname{si}(z)$, $\operatorname{Si}(z)$ 60, 65

Интерполяция квадратичная 13

— линейная 13

Каталана постоянная G 16, 116

Кельвина функции $\operatorname{ber}_\nu(z)$, $\operatorname{bei}_\nu(z)$, $\operatorname{ker}_\nu(z)$, $\operatorname{kei}_\nu(z)$, $\operatorname{ke}_1(z)$, $\operatorname{ke}_2(z)$, $\operatorname{ke}_3(z)$ 264

Клотоида 83

Конфлюэнтное дифференциальное уравнение 308, 315—317

Куммера формула 315

— функция $\Phi(a, c, z)$, $M(a, c; z)$ 308

Лагерра полиномы $L_n^{(\alpha)}(z)$, $l_n(x)$ 147, 151, 317

Лангера формула 227

Ланжевена функция $L(x)$ 320

- Лапласа интегральное представление 163
 Лежандра соотношение 116
 — функции второго рода $Q_n(z)$, $\Omega(z)$ 159, 160
 — —, индексы 158
 — — нормированные 166
 — — первого рода $P_n(z)$, $\mathfrak{P}(z)$ 158, 159
 — —, порядок 159
 — — присоединенные 1-го и 2-го рода $P_n^m(z)$, $Q_n^m(z)$, $\mathfrak{P}_n^m(z)$, $\Omega_n^m(z)$ 159, 162, 163
 — —, степень 159
 — —, теорема сложения 165
 Ломмеля—Вебера функция $\Omega_\nu(z)$ 287
- Макдональда функция $K_\nu(z)$ 247
 Матье дифференциальное уравнение 298, 306
 — функции $se_n(z, q)$, $se_n(z, q)$ 298
 — — нормированные 301
 — — присоединенные $Se_n(z)$, $Se_n(z)$ 307
 Меллера интегральное представление 163, 221
- Неймана интегральное представление 163
 — функции $N_\nu(z)$ 184
 Никольсона формулы 227
- Планка уравнение 318
 — функция излучения 318
 Планка—Эйнштейна функции 322, 323
- Показательные функции $e^{\pm x}$, $e^{\pm \frac{\pi}{2}x}$ 32, 34
- Постоянная циклическая 62
 Постоянные π , e и t д 15
 Похгаммера функция $\Phi(a, c; z)$ 308
 Пуассона интегральное представление 221, 288
 Разности 1-го порядка 13
 — 2-го порядка $\delta^2 y_0$ 13
 — — — видоизмененные $\hat{\delta}^2 y_0$ 14
 Римана дзета-функция $\zeta(z)$ 88
- Сонина интегральное представление 221, 222
 Спираль Корню 83
 — si 66
 Стирлинга формула 53
 Струве функция $H_\nu(z)$ 288
- Сферические функции см. Лежандра функции
- Тригонометрические функции 24, 29
 — — комплексного аргумента $\sin z$, $\cos z$, $\text{tg } z$, $\arcsin z$, $\text{arctg } z$ 36, 39, 40, 43
 Тэта-функции $\vartheta_n(v, \kappa)$ 130
- Уиттекера функция $W_{\nu, \mu}(z)$ 317
 Уравнения элементарные трансцендентные 24, 35
- Френеля интегралы $C(z)$, $S(z)$ 60, 82, 87
 Функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$, $\Psi_n(z)$, $\Phi_n(z)$ 153, 317
 — распространения тепла от источников 326
 — цилиндрические см. Бесселя функции
 — эллиптического цилиндра см. Матье функции
- Чебышева ортогональные полиномы 1-го и 2-го рода $T_n(z)$, $U_n(z)$ 144
 Числа комплексные 16, 18, 20, 21
- Эверетта—Лапласа формула 14
 Эйлера интегралы 1-го и 2-го рода 52, 55
 — постоянные s , γ 15, 52, 57, 63, 184, 249
 — числа E_n 16
 Эллиптическая функция 120
 — — модулярная 133
 Эллиптический интеграл 94
 — —, дополнительный модуль 95
 — —, модуль 95, 133
 — — неполный 1-го, 2-го или 3-го рода в нормальной форме Лежандра $D(\varphi, k)$, $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$, $\Pi(\varphi, n, k)$ 95, 99
 — —, нормальная форма Вейерштрасса 127
 — —, параметр 95
 — — полный в нормальной форме $K(k)$, $E(k)$, $D(k)$, $B(k)$, $C(k)$ 96, 109, 114, 133
 — —, приведение к нормальной форме 96
 Эрмита полиномы $H_n(z)$, $\Phi_n(z)$ 151, 153
- Якоби дзета-функция $z\eta(u, k)$ 127, 134
 — эллиптические функции $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$, $\text{dn}(u, k)$ 122, 134